

วิธีการแปรผันพลังงานของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในดักกลางแบบไม่เชิงเส้น



นายพัฒนชัย จันทร์

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ ภาควิชาฟิสิกส์

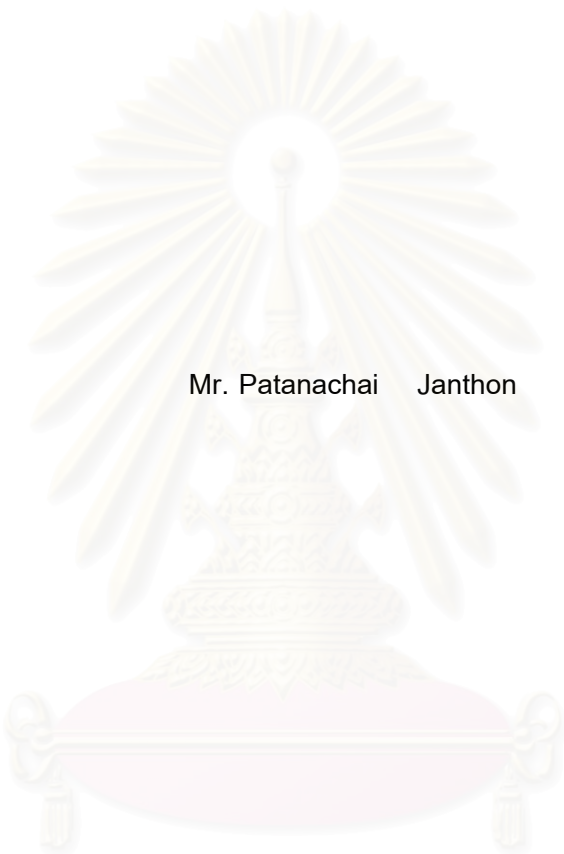
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2543

ISBN 974-18-0751-9

ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

VARIATIONAL ENERGY METHODS OF ELECTROSTATIC  
BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN NONLINEAR MEDIA



Mr. Patanachai Janthon

สถาบันวิทยบริการ

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of Master of Science in Physics

Department of Physics

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2000

ISBN 974-18-0751-9



## บทคัดย่อวิทยานิพนธ์

นายพัฒนชัย จันทร : วิธีการแปรผันพลังงานของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในตัวกลาง  
แบบไม่เชิงเส้น ( VARIATIONAL ENERGY METHODS OF ELECTROSTATIC  
BOUNDARY - VALUE PROBLEM IN NONLINEAR MEDIA )  
อาจารย์ที่ปรึกษา : รองศาสตราจารย์ ดร.มยุรี เนตรนภิส 161 หน้า. ISBN 974-13-0751-9.

การวิจัยครั้งนี้ มีจุดประสงค์เพื่อศึกษาวิธีการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในตัวกลางแบบไม่เชิงเส้นด้วยวิธีการแปรผันพลังงาน โดยพิจารณาปัญหาของวัสดุเชิงประกอบของสารไดอิเล็กทริก สมบัติของวัสดุชนิดนี้สามารถคำนวณได้จากผลเฉลยของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต แต่เนื่องจากความซับซ้อนของปัญหาจึงไม่สามารถหาผลเฉลยที่แน่นอนตรงได้ ได้มีวิธีการสำหรับประมาณผลเฉลยปัญหานี้อยู่หลายวิธีด้วยกัน ในที่นี้ได้เลือกวิธีการแปรผันพลังงานในการแก้ปัญหาดังกล่าว โดยจะแสดงให้เห็นว่าเมื่อใช้วิธีนี้ในวัสดุเชิงประกอบแบบเชิงเส้น จะได้ผลเฉลยที่แน่นอนตรงเช่นเดียวกับวิธีอื่น ๆ และเมื่อประยุกต์ใช้ในวัสดุเชิงประกอบไม่เชิงเส้นแบบเข้ม จะได้ผลเฉลยที่ดีพอควร ซึ่งสามารถทำให้ผลเฉลยแน่นอนตรงขึ้นได้จากการเพิ่มพารามิเตอร์ลงในฟังก์ชันศักย์ทดลองเริ่มต้น นอกจากนี้ยังได้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้นมาตามลำดับ เช่น ในระบบที่มีทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นล้อมรอบด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกอีกชนิดหนึ่ง ซึ่งทั้งหมดอยู่ภายในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ และเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีเพอร์เทอร์เบชันอันดับที่ 1 ผลที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันเมื่อพิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่แสดงความไม่เป็นเชิงเส้น ( $\lambda$ ) ที่ค่าน้อย แต่เมื่อพิจารณาที่ค่า  $\lambda$  มีค่ามากขึ้น ผลเฉลยจากวิธีการแปรผันจะทำให้ค่าฟังก์ชันศักย์และค่าส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าที่ผิวทรงกลมไดอิเล็กทริก มีค่าต่อเนื่องมากกว่าวิธีเพอร์เทอร์เบชันเล็กน้อย

ภาควิชา ฟิสิกส์

สาขาวิชา ฟิสิกส์

ปีการศึกษา 2543

ลายมือชื่อนิสิต.....

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา.....

## ABSTRACT

PATANACHAI JANTHON : VARIATIONAL ENERGY METHODS OF  
ELECTROSTATIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN NONLINEAR MEDIA  
THESIS ADVISOR : MAYUREE NATENAPIT 161 pp. ISBN 974-13-0751-9.

The objective of this research is to study and to solve the electrostatic boundary-value problems in nonlinear media using variational energy methods. The properties of the dielectric composite materials can be calculated using solutions to the electrostatic boundary-value problems, but the problem's complexity precludes finding the exact solution. There are many ways to evaluate the solutions, and the method chosen here is the variational energy methods. This research demonstrates that using this method with linear composite media provides results that are as precise as other methods. Furthermore, fairly good results are obtained by applying this method to strongly nonlinear composite medium, and more precise solutions can be found by having additional parameters in the trial potential function. In addition, more complex problems can be solved using this method, such as in a system in which a nonlinear dielectric sphere is surrounded by another dielectric medium where all of them are in a uniform electric field. The results were comparable with first order perturbation methods. The results of both methods are very close when considered with the nonlinearity parameter ( $\lambda$ ) at low values, but when larger values of  $\lambda$  are considered the results of the potential function and normal component of electric displacement at the surface of dielectric sphere under the variational energy methods show slightly more continuity than the perturbation method.

Department of Physics

Field of study in Physics

Academic year 2000

Student's signature.....

Advisor's signature.....

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยการชี้แนะ คำปรึกษาที่ดี และความเมตตาของท่านรองศาสตราจารย์ ดร.มยุรี เนตรนภิส อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พิศิษฐ์ รัตนวรารัตน์ ประธานกรรมการ และท่านคณะกรรมการตรวจวิทยานิพนธ์ทุกท่านที่สละเวลาเพื่อพิจารณาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้กรุณาชี้แนะแก้ไขจนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์ ตลอดจนคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ทุกท่าน ที่ให้ความกรุณาอบความเอาใจใส่ เสมอมา จึงขอขอบพระคุณมา ณ ที่นี้

ท้ายที่สุด ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ได้ดูแลให้ความรัก ความเข้าใจ และให้การสนับสนุนทุกสิ่งทุกอย่าง ขอขอบคุณเพื่อน ๆ ที่ให้ความช่วยเหลือ มอบคำปรึกษาและห่วงใยตลอดมา.



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	จ
กิตติกรรมประกาศ.....	ฉ
สารบัญ.....	ช
สารบัญรูป.....	ฌ
สารบัญตาราง.....	ญ
<b>บทที่</b>	
1 <b>บทนำ.....</b>	1
1.1   ลักษณะของปัญหาที่พิจารณา.....	2
1.2   สมการพื้นฐานของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต.....	2
1.2.1   กรณีปัญหาเชิงเส้น.....	3
1.2.2   กรณีปัญหาไม่เชิงเส้น.....	5
1.3   ขอบเขตการวิจัย.....	6
2 <b>การประยุกต์หลักการแปรผันในการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต.....</b>	8
2.1   สมการออยเลอร์ – ลากราง.....	8
2.1.1   สมการออยเลอร์ – ลากราง ในกรณี 1 ตัวแปร.....	8
2.1.2   สมการออยเลอร์ – ลากราง ในกรณีหลายตัวแปร.....	11
2.2   ฟังก์ชันนัลพลังงาน .....	13
2.3   การนำหลักการแปรผันไปประยุกต์ในปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต.....	17
2.3.1   พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น.....	17
2.3.2   พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น.....	19
3 <b>ปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้น .....</b>	22
3.1   ลักษณะโดยทั่วไปของปัญหาค่าขอบในทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว.....	22
3.2   วิธีการแปรผันพลังงานในปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้น.....	26
3.3   โปรแกรมช่วยคำนวณสำหรับวิธีการแปรผันพลังงาน.....	32
3.4   ผลการคำนวณจากโปรแกรม.....	42

## สารบัญ ( ต่อ )

บทที่	หน้า
4	ปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวไม่เชิงเส้นแบบเข้ม..... 47
4.1	ปัญหาค่าขอบไดอิเล็กทริกทรงกลมเดี่ยวไม่เชิงเส้นแบบเข้ม ..... 47
4.2	วิธีการแปรผันพลังงานโดยใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองอย่างง่าย..... 48
4.3	วิธีการแปรผันพลังงานโดยใช้ฟังก์ชันศักย์ที่ปรับปรุง..... 50
4.4	ผลการคำนวณของโปรแกรม..... 51
5	ปัญหาค่าขอบของไดอิเล็กทริกทรงกลมแบบไม่เชิงเส้นในตัวกลางแบบเชิงเส้น..... 62
5.1	ลักษณะโดยทั่วไปของปัญหา..... 62
5.2	ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตวิธีการแปรผันพลังงาน..... 64
5.3	ผลการคำนวณของโปรแกรม..... 66
6	สรุปและวิเคราะห์ผลวิจัย..... 74
<b>รายการอ้างอิง</b>	
<b>ภาคผนวก</b>	
ก	เงื่อนไขขอบ ( boundary conditions ) ..... 78
ข	วิธีเพอร์เทอร์เบชัน ของ Brito และคณะ ..... 81
ค	โปรแกรม trial linear.nb ..... 85
ง	โปรแกรม trial strongly nonlinear.nb..... 96
จ	โปรแกรม c11b12b32b34.nb ..... 110
ฉ	โปรแกรม NL_L.nb ..... 124
	ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์ ..... 152



## สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
2.1	แสดงค่าฟังก์ชันนำ $I[y]$ .....	9
3.1	แสดงแบบจำลองของปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว ที่อยู่ในสนามไฟฟ้า ภายนอกสม่ำเสมอ $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ ในกรณีปัญหาเชิงเส้น .....	22
3.2	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ และค่า $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ ในกรณีปัญหาเชิงเส้น .....	43
3.3	กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง $W$ และ $b$ ที่อัตราส่วน $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ เป็น 0.02 , 0.2 , 1 , 3 , 6 .....	44
3.4	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$ กับ $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ ค่าต่าง ๆ ในกรณีปัญหาเชิงเส้น.....	46
4.1	แสดงแบบจำลองของปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว ที่อยู่ในสนามไฟฟ้า ภายนอกสม่ำเสมอ $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ ในกรณีปัญหาไม่เชิงเส้นแบบเข้ม.....	48
4.2	กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง $W$ และ $b$ ในกรณีที่ใช้ค้ำกัณฑ์ทดลองอย่างง่ายที่อัตราส่วน $\frac{\chi_i}{\chi_m}$ เป็น 0.02 , 0.6 , 1 , 1.5 , 10.....	53
4.3	แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $\frac{\chi_e}{\chi_m}$ และ $\frac{\chi_i}{\chi_m}$ .....	54
4.4	แสดงส่วนประกอบตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าภายในทรงกลม ( $D_{in}$ ) และ ภายนอกทรงกลม ( $D_{mn}$ ) ที่ผิวของทรงกลม ( $r = a$ ) เมื่อ ( a ) พิจารณาโดยใช้ค้ำกัณฑ์ทดลองอย่างง่าย ( c11,b12 ) ( b ) พิจารณาโดยใช้ค้ำกัณฑ์ทดลองแบบเพิ่มพารามิเตอร์ (c11,b12,b32,b34) .....	58
5.1	แสดงแบบจำลองของปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว ที่อยู่ในสนามไฟฟ้า ภายนอกสม่ำเสมอ $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ ในกรณีทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นถูก ล้อมรอบด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น .....	64
5.2	แสดงกราฟระหว่างฟังก์ชันนำพลังงานและพารามิเตอร์ $b$ โดย a ) $\lambda = 10^{-10}$ b ) $\lambda = 0.1$ c ) $\lambda = 0.4$ .....	67
5.3	แสดงกราฟระหว่างฟังก์ชันนำพลังงาน ณ ตำแหน่งที่มีค่าต่ำสุด ที่ค่าอัตราส่วน $\frac{K_i}{K_m}$ ตั้งแต่ 0.02 ถึง 10 โดย a) ใช้ค่า $\lambda = 10^{-10}$ b) ใช้ค่า $\lambda = 0.4$ .....	69
5.4	แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$ เทียบกับอัตราส่วน $\frac{K_i}{K_m}$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 10^{-10}$ .....	70
5.5	แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$ เทียบกับอัตราส่วน $\frac{K_i}{K_m}$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 0.4$ .....	70

สารบัญรูป ( ต่อ )

รูปที่		หน้า
5.6	แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$ เทียบกับอัตราส่วน $\frac{K_i}{K_m}$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 10^{-10}$ โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความของ Brito [5] .....	71
5.7	แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$ เทียบกับอัตราส่วน $\frac{K_i}{K_m}$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 0.4$ โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความของ Brito [5] .....	71
5.8	แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน $\frac{\Phi_i}{\Phi_m}$ เทียบกับอัตราส่วน $\frac{K_i}{K_m}$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 10^{-10}$ โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความ [8] .....	72
5.9	แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน $\frac{\Phi_i}{\Phi_m}$ เทียบกับอัตราส่วน $\frac{K_i}{K_m}$ เมื่อกำหนดให้ $\lambda = 0.4$ โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความ [8] .....	73

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
4.1	แสดงค่าฟังก์ชันพลังงานที่ได้จากการคำนวณการแปรผันในกรณีที่ใช้ฟังก์ชันศักย์ ทดลองอย่างง่าย ( c11,b12 ) และแบบเพิ่มพารามิเตอร์ เป็น c11,b12,b32,b34.....	56
4.2	แสดงค่า $\frac{\chi_e}{\chi_m}$ ในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นแบบเข้ม ที่ค่า $\frac{\chi_i}{\chi_m}$ มีค่าเท่ากับ 0.02 , 0.1,0.2,0.3,0.4,0.6,0.8,1,1.2,1.5,2,3,4,5,6,8,10ตามลำดับ.....	57

# บทที่ 1

## บทนำ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในตัวกลางแบบไม่เชิงเส้น (electrostatic boundary-value problems in nonlinear media) ซึ่งมีความสัมพันธ์ของการกระจัดทางไฟฟ้า (electric displacement :  $\vec{D}$ ) และสนามไฟฟ้า (electric field :  $\vec{E}$ ) อยู่ในรูปแบบที่ยุ่งยากซับซ้อน โดยใช้วิธีการแปรผันพลังงาน (variational energy methods) ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งที่สามารถประยุกต์ใช้แก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตได้ดี

ในปัจจุบันวัสดุเชิงประกอบแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear composite material) เป็นที่สนใจอย่างมาก เนื่องจากมีการประยุกต์สมบัติของวัสดุชนิดนี้ เช่น สภาพการนำทางไฟฟ้า (electrical conductivity) สมบัติเชิงแสง (optical properties) เป็นต้น [1] ไปใช้ในทางด้านฟิสิกส์และวิศวกรรม โดยสมบัติของวัสดุชนิดนี้สามารถคำนวณได้จากการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต

ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตพื้นฐานที่พิจารณาในตัวกลางเชิงเส้น (linear media) โดยทั่วไปสามารถหาผลเฉลยได้โดยสมการลาปลาซ (Laplace equation) หรือสมการพัวซอง (Poisson equation) ของศักย์ไฟฟ้าแต่การพิจารณาในตัวกลางแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear media) รูปแบบของค่าศักย์อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equation) ซึ่งมีความซับซ้อน ด้วยเหตุนี้จึงทำให้ปัญหาที่พิจารณาในตัวกลางแบบไม่เชิงเส้นไม่สามารถหาผลเฉลยที่แม่นยำได้ ได้มีผู้ศึกษาวิธีการแก้ปัญหานี้อยู่หลายแนวทางด้วยกัน เช่น Blumenfeld และ Bergman [2] ศึกษาวิธีเพอร์เทอร์เบชัน (perturbation methods) Yu และ Gu [3,4] ศึกษาวิธีการประมาณแปรผัน (variational approach) , Bruggeman ศึกษาการประมาณตัวกลางยังผล (effective medium approximation) เป็นต้น

วิธีโดยทั่วไปที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ของค่าศักย์คือ วิธีเพอร์เทอร์เบชัน แต่วิธีนี้มีข้อจำกัดที่สามารถใช้ได้ดีเฉพาะในปัญหาที่ตัวกลางมีความไม่เชิงเส้นแบบอ่อน (weakly nonlinear case) ในการแก้ปัญหาค่าขอบกรณี่ตัวกลางมีความไม่เชิงเส้นแบบเข้ม (strongly nonlinear case) จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการหาผลเฉลยอื่น วิธีการหนึ่งที่สามารถหาผลเฉลยได้ดี คือ วิธีการแปรผันพลังงาน ซึ่งสามารถหาผลเฉลยของค่าศักย์โดยการเลือกฟังก์ชันศักย์ทดลองที่เหมาะสม (proper trial potential function) เพื่อเป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณหาพารามิเตอร์ของการแปรผัน โดยฟังก์ชันศักย์ทดลองที่จะเป็นผลเฉลยได้นี้ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ทำให้การแปรผันของฟังก์ชันพลังงาน (energy functional) เทียบกับพารามิเตอร์ของการแปรผันมีค่าเป็นศูนย์ หรือค่าของฟังก์ชันพลังงานมีค่าน้อยที่สุด จากเงื่อนไขนี้สามารถคำนวณค่าพารามิเตอร์ของการแปรผันได้ เมื่อนำพารามิเตอร์นี้ไปแทนในฟังก์ชันศักย์ทดลองจะได้

รูปแบบศักย์ โดยขั้นตอนการคำนวณสามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยเพื่อให้การคำนวณมีความแม่นยำและรวดเร็วมากยิ่งขึ้น

## 1.1 ลักษณะของปัญหาที่พิจารณา

ปัญหาทางไฟฟ้าสถิตขั้นพื้นฐานของวัสดุเชิงประกอบ คือ การคำนวณเพื่อหาค่าความเข้มของสนามไฟฟ้า หรือสนามไฟฟ้า ( electric field :  $\vec{E}$  ) ซึ่งนำไปสู่การคาดคะเนสมบัติของวัสดุเชิงประกอบซึ่งประกอบด้วยสารต่างชนิดกัน เช่น ค่าสภาพนำไฟฟ้า ค่าคงที่ไดอิเล็กทริก เป็นต้น โดยอธิบายในรูปของค่ายังผล ( effective ) ของวัสดุเชิงประกอบทั้งสิ้น

ตัวอย่างของการพิจารณาสมบัติของวัสดุเชิงประกอบ เช่น พิจารณาค่าคงที่ไดอิเล็กทริกยังผล ( effective dielectric constant ,  $\epsilon_e$  ) ในวัสดุเชิงประกอบแบบเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยวัสดุเล็ก ๆ ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกอีกชนิดหนึ่ง โดยจะเรียกวัสดุนั้นว่า วัสดุเจือปน หรือ “ inclusion “ และเรียกตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่ว่า “ host ” และได้ผ่านสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก  $\vec{E}_0$  ซึ่งค่า  $\epsilon_e$  นิยามจากความหนาแน่นพลังงานไฟฟ้าเฉลี่ยโดยปริมาตรของวัสดุเชิงประกอบทั้งสิ้น ดังนี้

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_e E_0^2 = \frac{1}{2V} \int_V \epsilon(\vec{r}) E^2(\vec{r}) dV$$

เมื่อ  $\langle w \rangle$  คือ การเฉลี่ยความหนาแน่นพลังงานโดยปริมาตร ( volume average ) ของพลังงานไฟฟ้าในวัสดุเชิงประกอบ

$$\text{นั่นคือ} \quad \epsilon_e = \frac{1}{E_0^2 V} \int_V \epsilon(\vec{r}) E^2(\vec{r}) dV$$

ซึ่งถ้าพิจารณาจากปัญหาค่าขอบก็จะทราบรูปแบบค่าของ  $\vec{E}$  ใน inclusion และในตัวกลาง host แล้วจึงสามารถหาค่า  $\epsilon_e$  ได้จากวิธีข้างต้นนั่นเอง

ในวิทยานิพนธ์นี้และบทความส่วนใหญ่ที่ตีพิมพ์จนถึงปัจจุบัน ได้พิจารณากรณีที่วัสดุเจือปนกระจายแบบเบาบาง ( dilute inclusion ) ซึ่งสามารถประมาณสนามไฟฟ้าโดยการจำลองว่ามีเพียง inclusion เพียงอันเดียวในตัวกลาง ( single inclusion model ) ซึ่งการประมาณนี้ใช้ได้ในการกรณีที่ค่าสัดส่วนโดยปริมาตรของวัสดุเจือปนที่กระจายในตัวกลาง (  $p$  ) มีค่า  $\leq 0.08$  [4]

## 1.2 สมการพื้นฐานของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาปัญหาของวัสดุไดอิเล็กทริกเชิงประกอบ ( composite dielectric ) แบบภาพจำลองเดี่ยว ( single inclusion model ) ซึ่งประกอบด้วยสารไดอิเล็กทริก 2 ชนิด ชนิดหนึ่งเป็น inclusion ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริก อีกชนิดหนึ่ง โดยมีสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอเป็นเนื้อไขขอบ พิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นและไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

### 1.2.1 กรณีปัญหาเชิงเส้น

สมบัติที่ระบุลักษณะของไดอิเล็กทริกว่าเป็นไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น คือ ค่าการกระจายทางไฟฟ้าในตัวกลางชนิดนั้นจะแปรผันตรงกับค่าสนามไฟฟ้าในอันดับที่ 1 หรือ  $\vec{D} \propto \vec{E}$  เมื่อพิจารณาในปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต ผลเฉลยที่ได้คือ สนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  เริ่มต้นพิจารณาจากสมการพื้นฐานของแมกซ์เวลล์ ซึ่งทั้งในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นต่างเป็นไปตามสมการดังต่อไปนี้

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \dots (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \text{หรือ} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi \quad \dots (1.2)$$

โดย  $\Phi$  เป็น ศักย์ไฟฟ้า ( electric potential )

$\rho_f$  เป็น ความหนาแน่นของประจุอิสระ

ในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\vec{D}$  และ  $\vec{E}$  อยู่ในรูปแบบนี้ คือ

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \dots (1.3)$$

เมื่อ  $\epsilon$  คือค่าคงที่ไดอิเล็กทริก ( dielectric constant )

เมื่อแทนความสัมพันธ์จากสมการ ( 1.3 ) ในสมการ ( 1.1 )

จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho_f \quad \dots (1.4)$$

ในที่นี้พิจารณาในกรณีที่ไม่มีประจุอิสระ ทำให้ความหนาแน่นประจุ เป็นศูนย์ ( $\rho_f = 0$ ) ดังนั้น จากสมการ ( 1.2 ) และ ( 1.4 ) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot (-\epsilon \nabla \Phi) = 0$$

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \dots (1.5)$$

สมการ (1.5) เรียกว่า สมการลาปลาซ (Laplace equation) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของค่าอนุพันธ์ย่อยของค่าศักย์ไฟฟ้า ( $\Phi$ ) โดยผลเฉลยที่ได้ คือ ค่าศักย์ไฟฟ้านั่นเอง เมื่อทราบค่าศักย์แล้ว จึงจะสามารถคำนวณหาค่า  $\vec{E}$  ได้ตามความสัมพันธ์จากสมการ (1.2)

สมการลาปลาซมีหลายรูปแบบด้วยกันขึ้นอยู่กับชนิดระบบพิกัดของปัญหาที่พิจารณา ซึ่งในงานวิจัยนี้พิจารณา inclusion เป็นทรงกลม จึงได้พิจารณาในระบบพิกัดทรงกลม (spherical coordinates) ดังต่อไปนี้ :

$$\Phi(r, \theta, \phi) \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \quad \dots (1.6)$$

เนื่องจากค่าขอบเป็นสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ ( $\vec{E}_0$ ) จึงได้กำหนดให้แกน  $Z$  อยู่ในแนวเดียวกับทิศของ  $\vec{E}_0$  เพื่อทำให้เกิดความสมมาตรของสนามไฟฟ้า (azimuthal symmetry) และพจน์สุดท้ายของสมการ (1.6) จึงละทิ้งไม่ต้องพิจารณาได้ จึงเป็นปัญหาของสองตัวแปร นั่นคือ  $r$  และ  $\theta$

ขั้นตอนในการแก้ปัญหาค่าขอบโดยใช้สมการลาปลาซ เริ่มจากการพิจารณาตัวแปรจากฟังก์ชัน  $\Phi$  ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัวแปรตามสมการ (1.6) ในขั้นตอนนี้จะยังไม่ได้คำตอบที่ต้องการ เพราะเป็นคำตอบที่ติดอยู่ในเทอมที่มีค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าจึงต้องพิจารณาต่อไป เมื่อหาผลเฉลยของสมการ (1.6) ในแต่ละบริเวณทั้งใน inclusion และตัวกลาง host แล้วจึงใช้เงื่อนไขขอบเพื่อหาค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่า หลังจากทราบ  $\Phi$  จึงสามารถหาค่า  $\vec{E}$  จากสมการ (1.2) และค่า  $\vec{D}$  จาก (1.3) ได้นั่นเอง

เงื่อนไขที่บริเวณรอยต่อระหว่างไดอิเล็กทริกทั้งสอง (ดูภาคผนวก ก) ซึ่งใช้ในการหาค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าในผลเฉลยเพื่อให้ได้ผลเฉลยที่สมบูรณ์ มีดังต่อไปนี้

1. องค์ประกอบแนวสัมผัสของสนามไฟฟ้า ( $\vec{E}_t$ ) ณ บริเวณรอยต่อของตัวกลางทั้งสองมีค่าต่อเนื่องกัน หรือมีค่าไม่เปลี่ยนแปลงเมื่อข้ามผ่านรอยต่อ กล่าวคือ

$$\vec{E}_{it} = \vec{E}_{mt} \quad \dots (1.7)$$



เมื่อ  $\vec{E}_{it}$  และ  $\vec{E}_{mt}$  เป็นองค์ประกอบแนวสัมผัสผิวของสนามไฟฟ้าภายในและภายนอก inclusion ที่พิจารณาตามลำดับ

2. องค์ประกอบแนวตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า ( $\vec{D}_n$ ) ณ บริเวณรอยต่อของตัวกลางทั้งสองมีค่าต่อเนื่องกัน ถ้าบริเวณผิวรอยต่อระหว่างสองตัวกลางนี้ไม่มีประจุอิสระ ( $\rho_f$ ) กล่าวคือ

$$\vec{D}_{in} = \vec{D}_{mn} \quad \dots (1.8)$$

เมื่อ  $\vec{D}_{in}$  และ  $\vec{D}_{mn}$  เป็นองค์ประกอบแนวตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า ภายในและภายนอก inclusion ที่พิจารณาตามลำดับ

จากเงื่อนไขทั้งสองนี้เอง ที่จะสามารถนำไปสู่การคำนวณหาค่าคงที่ที่ไม่ทราบค่าได้ เมื่อทราบค่าศักย์สมบูรณ์เรียบร้อยแล้ว จึงสามารถนำค่านั้นไปคำนวณหาปริมาณอื่น ๆ ได้ต่อไป

### 1.2.2 กรณีปัญหาไม่เชิงเส้น

ในที่นี้พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น โดยวัสดุนั้นมีค่าการกระจัดทางไฟฟ้า ( $\vec{D}$ ) และสนามไฟฟ้า ( $\vec{E}$ ) อยู่ในทิศทางเดียวกัน หรือเรียกว่าวัสดุนี้เป็น ไอโซโทรปิก (Isotropic) และจากความสัมพันธ์โดยทั่วไประหว่างส่วนประกอบย่อยของค่า  $\vec{D}$  และ  $\vec{E}$

$$D_\alpha = E_\alpha + 4\pi \left( P_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial Q'_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \dots \right)$$

เมื่อ  $\vec{P}$ ,  $Q'_{\alpha\beta}$  และ เทอมลำดับสูงอื่น ๆ แสดงความหนาแน่นโมเมนต์ของไดโพล (dipole moment density), ความหนาแน่นโมเมนต์ของควอดรอปอล (quadrupole moment density) และ ความหนาแน่นของมัลติโพลลำดับสูง (higher multipole densities) อื่น ๆ ในตัวกลางซึ่งถูกวางอยู่ในสนามไฟฟ้าภายนอก

หรือเขียนได้ว่า 
$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

เรียก  $\vec{P}$  ว่า โพลาริเซชัน (polarization)

โดยที่ 
$$\vec{P} = \vec{P} - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}'_{\alpha\beta} + \dots$$

ในกรณีทั่วไป เนื่องจากความหนาแน่นของมลติโพลลำดับสูงจะมีค่าน้อยมาก จึงละทิ้งเทอมดังกล่าวไว้ หรือกรณีนี้ค่าโพลาริเซชันจะขึ้นอยู่กับความหนาแน่นโมเมนต์ของไดโพล ( $\vec{P}$ ) นั่นเอง

$\vec{P}$  และ  $\vec{E}$  มีความสัมพันธ์หลายรูปแบบด้วยกัน ในที่นี้พิจารณารูปแบบอัตราส่วนเชิงสเกลาร์ คือ  $\vec{P} = \chi\vec{E}$  หรือค่า  $\vec{P}$  จะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ  $\vec{E}$  โดยเรียก  $\chi$  ว่า สภาพรับได้ทางไฟฟ้า (electric susceptibility) และจาก  $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$  จะได้ว่า

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่าง  $\vec{D}$  และ  $\vec{E}$  แบบเชิงเส้นนั่นเอง

ในกรณีที่สนามไฟฟ้าภายนอกมีความเข้มประมาณ  $10^6 \text{ V/m}$  หรือมากกว่า จะเกิดภาวะไม่เชิงเส้นขึ้นกับไดอิเล็กทริก โดยต้องพิจารณาค่าโพลาริเซชันจากมลติโพลลำดับสูงด้วย โดยในที่นี้พิจารณาพจน์ลำดับแรกและจากที่พิจารณาในกรณีที่ตัวกลางเป็นไอโซโทรปิก จึงเลือก  $\vec{P}$  ประกอบด้วย  $\vec{E}$  กำลังคี่ (เพื่อแสดงสมบัติไอโซโทรปิก คือเมื่อ  $\vec{E}$  กลับทิศจะทำให้  $\vec{P}$  และ  $\vec{D}$  กลับทิศด้วย) ดังต่อไปนี้

$$\vec{P} = \chi\vec{E} + \zeta|\vec{E}|^2\vec{E}$$

เมื่อ  $\zeta$  คือ สัมประสิทธิ์ที่แสดงความไม่เป็นเชิงเส้นของไดอิเล็กทริก

$$\text{และจะได้ว่า } \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} + 4\pi\zeta|\vec{E}|^2\vec{E}$$

$$\text{หรือ } \vec{D} = \epsilon\vec{E} + \chi|\vec{E}|^2\vec{E}$$

พิจารณาตามสมการพื้นฐานของแมกซ์เวลล์ (1.1) กรณีที่ไม่มีประจุอิสระ ( $\rho_f = 0$ ) ในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น

$$\text{จาก } \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } \vec{\nabla} \cdot [\epsilon\vec{E} + \chi|\vec{E}|^2\vec{E}] = 0$$

จากสมการ (1.2) จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \cdot [\epsilon(-\vec{\nabla}\Phi) + \chi|-\vec{\nabla}\Phi|^2(-\vec{\nabla}\Phi)] = 0$$



$$\nabla \cdot [\epsilon(\nabla\Phi) + \chi|\nabla\Phi|^2(\nabla\Phi)] = 0 \quad \dots (1.9)$$

สมการ (1.9) แสดงความสัมพันธ์ของค่าอนุพันธ์ย่อยของค่าศักย์ไฟฟ้า ( $\Phi$ ) จึงเรียก รูปแบบของความสัมพันธ์ตามสมการ (1.9) ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear partial differential equation)

วิธีหาค่าศักย์กรณีนี้มีความซับซ้อนกว่าในกรณีของตัวกลางแบบเชิงเส้นที่สามารถแก้ปัญหา ด้วยสมการลาปลาซ เนื่องจากไม่สามารถหา ผลเฉลยแม่นยำที่เป็นรูปแบบง่าย ๆ ที่ลงตัว (closed form) ของค่าศักย์ที่มีความสัมพันธ์อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ในทางปฏิบัติจึงมักนิยามหาค่าผลเฉลยด้วยวิธีคำนวณเชิงตัวเลข (numerical calculation) แล้วจึงนำค่าที่ได้ไปใช้คำนวณหาปริมาณอื่น ๆ ต่อไป

### 1.3 ขอบเขตงานวิจัย

ด้วยเหตุที่ค่าศักย์ไฟฟ้าซึ่งเป็นผลเฉลยของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในกรณีที่พิจารณา ในตัวกลางแบบไม่เชิงเส้นมีความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยที่แม่นยำได้ จึงไม่สามารถคำนวณหาผลเฉลยได้โดยตรง ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จึงได้เลือกวิธีการในการแก้ปัญหานี้ ด้วยวิธีการแปรผันพลังงานซึ่งทำให้ได้ผลเฉลยเป็นค่าศักย์ในแบบเชิงตัวเลข โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ ซึ่งเมื่อได้ค่าศักย์ดังกล่าวแล้วสามารถนำไปคำนวณหาค่าสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุเชิงประกอบได้ต่อไป

ในบทที่ 2 จะอธิบายหลักการของการแปรผันและแสดงให้เห็นว่าสามารถใช้การแปรผันของฟังก์ชันพลังงานเพื่อแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตได้ทั้งกรณีที่พิจารณาตัวกลางแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้นหลังจากนั้นจึงได้ศึกษาปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้นซึ่งเป็นปัญหาที่สามารถหาผลเฉลยที่แม่นยำได้ในบทถัดมา เพื่อแสดงให้เห็นตัวอย่างของการประยุกต์ใช้หลักการแปรผันในปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตซึ่งจะได้ผลเฉลยที่แม่นยำเช่นกัน และทำการทดสอบความแม่นยำของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนขึ้นมาเพื่อช่วยในการคำนวณอีกด้วย ต่อมาได้ศึกษาปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวไม่เชิงเส้นเชิงเส้นแบบเข้ม ในบทที่ 4 โดยพิจารณาผลของการเพิ่มพารามิเตอร์ของการแปรผันลงไปในพื้นที่ศักย์ทดลองเบื้องต้น และในบทที่ 5 จะทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณของวิธีแปรผันพลังงานกับวิธีเพอร์เทอร์เบชันในปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวไม่เชิงเส้นถูกล้อมด้วยตัวกลางแบบเชิงเส้นในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอตามบทความของ P. Brito [5] เพื่อวิเคราะห์การใช้วิธีแปรผันพลังงานในปัญหาที่มีความซับซ้อนขึ้นตามลำดับ

## บทที่ 2

### การประยุกต์หลักการแปรผันในการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต

การแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต สมการ ( 1.9 ) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้น ( nonlinear partial differential equation ) มีความซับซ้อนและไม่สามารถหาผลเฉลยแบบเชิงวิเคราะห์ได้อย่างแม่นยำตรง ( exact ) ได้ วิธีหลักการแปรผันเป็นวิธีหนึ่งที่เหมาะสมในการแก้ปัญหานี้

หลักการแปรผัน ( variational principle ) [6] เป็นทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ซึ่งอธิบายความสัมพันธ์ของพารามิเตอร์กับฟังก์ชันนัล ณ สภาวะที่เรียกว่า “ extremum ” คือ สภาวะที่พารามิเตอร์ทำให้ค่าของฟังก์ชันนัลมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด หลักการแปรผันสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตได้ เนื่องจากฟังก์ชันนัลทางไฟฟ้าสถิตเมื่อพิจารณาตามสมการออยเลอร์ – ลากรางแล้ว เห็นได้ว่ามีลักษณะที่สอดคล้องกับหลักการแปรผันอย่างลงตัว

ในบทนี้จะกล่าวถึงที่มาของความเชื่อมโยงระหว่างหลักการแปรผันและปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตด้วยสมการออยเลอร์ – ลากราง

#### 2.1 สมการออยเลอร์ – ลากราง ( Euler – Lagrange equation )

ในหัวข้อนี้จะพิสูจน์ที่มาของสมการออยเลอร์ – ลากราง จากหลักการแปรผัน ทั้งในกรณีที่มีตัวแปรเดียวและกรณีที่มี 3 ตัวแปร ดังนี้

##### 2.1.1 สมการออยเลอร์ – ลากราง ในกรณี 1 ตัวแปร

ในที่นี้เริ่มจากกรณีง่าย ๆ โดยเลือกฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว คือ  $x$  , ตัวแปรตามเพียงตัวเดียว คือ  $y$  ซึ่งเป็นตัวแปรที่ขึ้นกับตัวแปร  $x$  (  $y(x)$  ) , และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรตาม (  $\frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$  )

$$\text{กำหนดให้} \quad I = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad \dots (2.1)$$

โดย  $F$  ขึ้นกับตัวแปร  $x$  ,  $y(x)$  และอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ  $y$  เทียบกับ  $x$

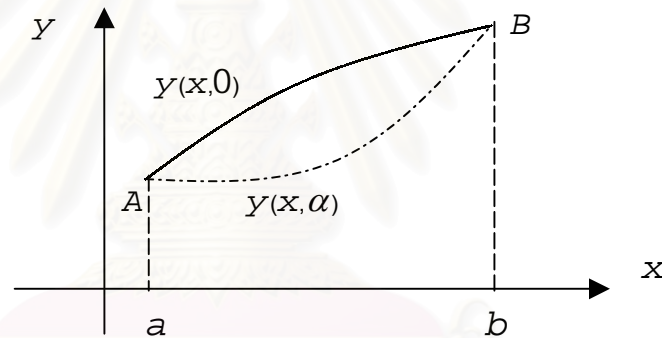
ถ้าเปลี่ยนฟังก์ชัน  $y$  ให้ต่างไปจากเดิมด้วยพารามิเตอร์  $\alpha$  ซึ่งมีค่าเล็ก ๆ (infinitesimal) เขียนได้ว่า  $y(x, \alpha)$  กำหนดให้ฟังก์ชันนัล  $I$  มีค่า extremum เมื่อ  $\alpha = 0$  ซึ่งก็คือ  $y(x, \alpha = 0)$  เพื่อใช้เปรียบเทียบกับฟังก์ชันนัลที่เปลี่ยนไปด้วยพารามิเตอร์  $\alpha$

สามารถเขียน  $y(x, \alpha)$  ได้เป็น

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x)$$

$$y'(x, \alpha) = y'(x, 0) + \alpha \eta'(x)$$

$\eta(x)$  เป็นตัวอธิบายลักษณะการเปลี่ยนไปของฟังก์ชัน  $y(x, \alpha)$  และจะมีค่าเป็นศูนย์ที่จุดปลายของฟังก์ชัน  $y(x)$  ในช่วงที่พิจารณา ซึ่งก็คือ  $\eta(a) = \eta(b) = 0$



รูปที่ 2.1 แสดงค่าฟังก์ชันนัล  $I[y]$

- กรณีพิจารณา ฟังก์ชัน  $y$  ทำให้ได้ฟังก์ชันนัล เป็น  $I[y]$  มีค่า extremum ที่  $\alpha = 0$  แสดงด้วยเส้นทึบ ( — )
- ในกรณีพิจารณา ให้ฟังก์ชัน  $y$  ต่างไปจากเดิมด้วยพารามิเตอร์  $\alpha$  ทำให้ฟังก์ชันนัล เปลี่ยนไปเป็น  $I[y + \alpha \eta]$  แสดงด้วยเส้นประ ( - - - - - )

จากสมการ ( 2.1 ) เมื่อพิจารณาที่ extremum เมื่อ  $\alpha = 0$

$$I[y] = \Psi(0) = \int_a^b F(y, y', x) dx \quad \dots (2.2)$$

$\Psi(0)$  คือ ผลของการอินทิเกรต ที่ทำให้ได้ค่า  $I[y]$  มีค่า extremum

เมื่อ  $y(x)$  เปลี่ยนไปเป็น  $y(x) + \alpha\eta(x)$  จึงทำให้ผลการอินทิเกรตเปลี่ยนไปด้วยจากสมการ (2.1) จึงเปลี่ยนไปอยู่ในรูปดังนี้

$$I[y + \alpha\eta] = \Psi(\alpha) = \int_a^b F(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) dx \quad \dots (2.3)$$

$\Psi(\alpha)$  คือ ผลของการอินทิเกรต เมื่อ  $y(x)$  เปลี่ยนไปโดยพารามิเตอร์  $\alpha$   
ค่าความแตกต่างของผลการอินทิเกรตทั้งสองฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนัล  $I[y]$  คือ  $\Psi(\alpha) - \Psi(0)$  เรียกว่า การแปรผันของฟังก์ชันนัล  $I$  ( $\delta I$ ) นั่นคือ

$$\Psi(\alpha) - \Psi(0) = \delta I \quad \dots (2.4)$$

ฟังก์ชันนัล  $I[y]$  จะมีค่า extremum ก็ต่อเมื่อการแปรผันของฟังก์ชันนัล  $I[y]$  มีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\delta I = 0$$

จากสมการ (2.3 )

$$F(y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', x) = F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y} \alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \alpha\eta' \quad \dots (2.5)$$

แทนค่าสมการ (2.5) ในสมการ (2.3)

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= \int_a^b (F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y} \alpha\eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \alpha\eta') dx \\ &= \int_a^b F(y, y', x) dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \alpha\eta dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \alpha\eta' dx \quad \dots (2.6) \end{aligned}$$

นำสมการ (2.6) ไปลบสมการที่ (2.2)

$$\Psi(\alpha) - \Psi(0) = \int_a^b F(y, y', x) dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \alpha\eta dx + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \alpha\eta' dx - \int_a^b F(y, y', x) dx$$

$$\delta I = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \alpha \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \alpha \eta' \right) dx$$

ใช้การอินทิเกรตส่วนย่อย ( integration by part ) จะได้

$$\delta I = \frac{\partial F}{\partial y'} \alpha \eta(x) \Big|_a^b + \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \alpha \eta dx$$

พจน์ทางขวามือจะเป็นศูนย์ เนื่องจาก  $\eta(a) = \eta(b) = 0$

จากเงื่อนไขที่ extremum

$$\delta I = 0$$

จะได้ว่า

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \alpha \eta dx = 0$$

ขณะที่  $\alpha \neq 0$  และ  $\eta \neq 0$  พร้อมกัน จึงได้ว่า

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \dots (2.7)$$

สมการนี้คือ **สมการออยเลอร์ – ลากราง** ตัวแปรเดียวและคำตอบจากสมการ (2.7) นี้คือ  $y(x)$  ที่ทำให้  $I[y]$  มีค่า extremum

### 2.1.2 สมการออยเลอร์ – ลากราง ในกรณีหลายตัวแปร

ในปัญหาโดยทั่วไปฟังก์ชันมักจะขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว [7] ซึ่งทำให้การแปรผันมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ดังจะกล่าวดังต่อไปนี้

กำหนดให้  $u$  เป็นฟังก์ชันที่เลือกมาขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ 3 ตัว คือ  $x$ ,  $y$  และ  $z$  หรือ  $u = u(x, y, z)$  โดยเรียก  $u$  ว่าเป็น “ ฟังก์ชันทดลอง ( trial function ) ” เมื่อพิจารณาการแปรผันตามสมการ (2.1) จะได้ว่า

$$I = \iiint F(u, u_x, u_y, u_z, x, y, z) dx dy dz \quad \dots (2.8)$$

เมื่อฟังก์ชัน  $u(x,y,z)$  เปลี่ยนไปด้วยค่า พารามิเตอร์  $\alpha$  เล็ก ๆ จะได้ว่า

$$u(x,y,z,\alpha) = u(x,y,z,0) + \alpha\eta(x,y,z) \quad \dots (2.9)$$

เมื่อ  $\alpha\eta(x,y,z)$  เป็นการแปรผันของฟังก์ชัน  $u(x,y,z)$  หรือ  $\alpha\eta = \delta u$  ที่ทำให้ผลของการอินทิเกรตมีค่า extremum

พิจารณาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจากสมการ (2.9)

$$u_x(x,y,z,\alpha) = u_x(x,y,z,0) + \alpha\eta_x$$

$$u_y(x,y,z,\alpha) = u_y(x,y,z,0) + \alpha\eta_y$$

$$u_z(x,y,z,\alpha) = u_z(x,y,z,0) + \alpha\eta_z$$

$$\text{เมื่อ } u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$$

พิจารณาการแปรผัน  $I$  โดยให้  $\Psi(\alpha) - \Psi(0)$  ทำนองเดียวกันกับกรณีที่มี 1 ตัวแปร จะได้

$$\begin{aligned} & F(u(x,y,z,\alpha), u_x(x,y,z,\alpha), u_y(x,y,z,\alpha), u_z(x,y,z,\alpha), x,y,z) \\ & - F(u(x,y,z,0), u_x(x,y,z,0), u_y(x,y,z,0), u_z(x,y,z,0), x,y,z) \\ & = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial u_z} \delta u_z \end{aligned}$$

พิจารณาการแปรผันของ  $I$  ณ extremum

$$\delta I = I(u(x,y,z,\alpha)) - I(u(x,y,z,0))$$

$$\delta I = \iiint \left( \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial F}{\partial u_z} \delta u_z \right) dx dy dz \quad \dots (2.10)$$

เนื่องจาก 
$$\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \delta u$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \delta u$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_z} \delta u = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \delta u$$

แทนค่าลงในสมการ ( 2.10 ) จะได้

$$\begin{aligned} \delta I = & \iiint \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right) \delta u dx dy dz \\ & + \iiint \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \delta u \right) \right) dx dy dz \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบทของไดเวอร์เจนท์ พจน์ที่ 2 ทางขวาของสมการข้างต้นจะเป็นศูนย์ เนื่องจาก  $\delta u = 0$  บนผิวขอบ จึงทำให้

$$\delta I = \iiint \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) \right) \delta u dx dy dz$$

ซึ่งก็คือ 
$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial u_z} \right) = 0 \quad \dots (2.11)$$

สมการ ( 2.11 ) เรียกว่า สมการออยเลอร์ – ลากรางในกรณี 3 ตัวแปร

## 2.2 ฟังก์ชันนัลพลังงาน ( $W$ )

พลังงานศักย์ไฟฟ้า (  $w$  ) คือ งานในการเลื่อนประจุ  $q$  จากระยะอนันต์มายังจุด  $(x,y,z)$  ซึ่งมีค่าศักย์ไฟฟ้า  $\Phi(x,y,z)$  อันเนื่องมาจากสนามไฟฟ้าภายนอก  $\vec{E}$



พิจารณาให้ประจุไฟฟ้ากระจายในตัวกลางด้วยความหนาแน่นเชิงปริมาตร  $\rho$  สมมติให้ การกระจายของประจุนั้นเกิดจากการนำประจุเข้ามาในระบบครั้งละปริมาณเล็ก ๆ  $\delta q$  มาที่ยังจุด  $(x, y, z)$  ซึ่งมีค่าศักย์ไฟฟ้า  $\Phi(x, y, z)$  ดังนั้นงานในการเลื่อนประจุ  $\delta q$  มายังตำแหน่งนี้คือ

$$\delta w = \delta q \Phi(x, y, z) \quad \dots (2.12)$$

ปริมาณประจุที่เพิ่มขึ้นแต่ละครั้ง จะนำเข้าไปรวมกับประจุที่กระจายในบริเวณเล็ก ๆ ที่ ตำแหน่ง  $(x, y, z)$  เขียนได้ว่า

$$\delta q = \delta \rho dV$$

แทนค่า  $\delta q$  ในสมการ (2.12) จะได้ว่า

$$\delta w = \delta \rho \Phi(x, y, z) dV$$

พลังงานทางไฟฟ้าสถิตทั้งหมดของระบบจากการนำประจุ  $\delta q$  เข้ามา คือ ผลรวมของงาน ตามสมการ (2.12) ซึ่งคำนวณได้จากการอินทิเกรตสมการ (2.12) ทั้งทั้งบริเวณที่มีประจุอิสระ หรือ

$$\delta w = \int_V \Phi \delta \rho dV \quad \dots (2.13)$$

จาก

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_f$$

จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) = \delta \rho \quad \dots (2.14)$$

แทนค่า  $\delta \rho$  จากสมการ (2.14) ลงใน (2.13) จะได้ว่า

$$\delta w = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\delta \vec{D}) \Phi dV \quad \dots (2.15)$$



เนื่องจาก  $\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}\Phi) = [\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D})]\Phi + \delta\vec{D} \cdot [\vec{\nabla}\Phi]$

$$[\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D})]\Phi = \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}\Phi) - \delta\vec{D} \cdot [\vec{\nabla}\Phi] \quad \dots (2.16)$$

แทนค่า จากสมการ ( 2.16 ) ลงในสมการ ( 2.15 )

$$\delta w = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}\Phi) dV - \int_V \delta\vec{D} \cdot [\vec{\nabla}\Phi] dV$$

และแทนค่า  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$  จะได้ว่า

$$\delta w = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}\Phi) dV + \int_V \delta\vec{D} \cdot [\vec{E}] dV \quad \dots (2.17)$$

จากทฤษฎีบทของไดเวอร์เจนซ์ เขียนพจน์แรกของสมการข้างต้นได้เป็น

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}\Phi) dV = \oint_S (\delta\vec{D}\Phi) \cdot \hat{n} da$$

ดังนั้น 
$$\delta w = \oint_S (\delta\vec{D}\Phi) \cdot \hat{n} da + \int_V \delta\vec{D} \cdot [\vec{E}] dV \quad \dots (2.18)$$

สำหรับพจน์  $\oint_S (\delta\vec{D}\Phi) \cdot \hat{n} da$  เรียกว่า พจน์ผิว ( surface term ) โดย  $S$  เป็นพื้นที่ผิวปิดล้อมรอบปริมาตรของระบบที่สนใจ ( $V$ ) ถ้าพิจารณา  $S$  เป็นผิวปิดรูปทรงกลมที่ไกลมาก ๆ จากบริเวณที่มีการกระจายของประจุ ( ซึ่งทำให้เห็นคล้ายเป็นจุดประจุ ) ทำให้ค่าของสนามไฟฟ้าบนผิวนั้นประมาณเป็นค่าคงตัวได้ และเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ  $\left| \frac{\hat{r}}{r^2} \right|$  และค่าศักย์ไฟฟ้าจะเป็นสัดส่วนกับ  $\frac{1}{r}$  ซึ่งถ้า  $r \rightarrow \infty$  ค่าของพจน์  $\oint_S (\delta\vec{D}\Phi) \cdot \hat{n} da$  จะมีค่าน้อยมาก จึงละไว้ได้

ในกรณีที่ขอบเขตของพื้นที่ผิวปิด  $S$  ที่คลุมทั้งระบบที่สนใจ มีปริมาตรจำกัด ( finite ) หรือเงื่อนไขขอบที่ศักย์ไม่ทำให้ผลการอินทิเกรตของพลังงานจากพจน์ผิวเข้าสู่ค่าศูนย์ จะต้องพิจารณาค่าพลังงานจากพจน์ผิวด้วย เรียกว่าพลังงานตามพื้นผิว ( surface energy ;  $W_s$  ) ดังนี้

$$W_s = \oint_S \Phi \vec{D} \cdot \hat{n} da \quad \dots (2.19)$$

ดังนั้น ถ้าเลือก  $V$  ที่มีขนาดใหญ่มา ๆ ครอบคลุมทั้งบริเวณ จะได้ว่า

$$\delta w = \int_{\text{allspace}} \delta \vec{D} \cdot \vec{E} dV \quad \dots (2.20)$$

ถ้าพิจารณากรณีไดโพลีกริกแบบเชิงเส้น ซึ่งการกระจัดทางไฟฟ้าและสนามไฟฟ้ามีความสัมพันธ์กัน คือ

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

จะได้ว่า 
$$\delta \vec{D} = \epsilon \delta \vec{E}$$

และจาก 
$$\vec{D} \cdot \vec{E} = \epsilon \vec{E} \cdot \vec{E} = \epsilon E^2$$

จะได้ว่า 
$$\delta \vec{D} \cdot \vec{E} = \epsilon \delta \vec{E} \cdot \vec{E} = \epsilon \frac{1}{2} \delta E^2 = \frac{1}{2} \delta \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \delta (\vec{D} \cdot \vec{E}) \quad \dots (2.21)$$

ดังนั้น 
$$\delta w = \delta \left[ \frac{1}{2} \int_{\text{allspace}} (\vec{D} \cdot \vec{E}) dV \right]$$

กำหนดให้ 
$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{allspace}} (\vec{D} \cdot \vec{E}) dV$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{allspace}} \epsilon E^2 dV$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{allspace}} \epsilon |\vec{\nabla} \Phi|^2 dV \quad \dots (2.22)$$

เรียก  $W$  ว่า ฟังก์ชันนัลพลังงาน ( energy functional ) ซึ่งในหัวข้อต่อไป จะแสดงให้เห็นว่าศักย์ไฟฟ้า  $\Phi$  ที่ทำให้ฟังก์ชันนัลพลังงานมีค่าต่ำที่สุด เป็นไปตามสมการลาปลาซ

## 2.3 การนำการแปรผันไปประยุกต์ในปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต

ในหัวข้อนี้ จะแสดงว่าการใช้หลักการแปรผันและการแก้สมการพื้นฐานทางไฟฟ้าสถิตด้วยสมการลาปลาซสำหรับกรณีไดอิเล็กทริกเชิงเส้น และสมการอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นสำหรับกรณีไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น คือความสัมพันธ์เดียวกัน

### 2.3.1 พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น

ค่าฟังก์ชันพลังงานของตัวกลางปริมาตร  $V$  ที่อยู่ในสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  ในกรณีที่พิจารณาตัวกลางเป็นไดอิเล็กทริกเชิงเส้น จะเป็นดังสมการ (2.22) พิจารณาจากความสัมพันธ์ของ  $\Phi$  และ  $\vec{E}$  ตามสมการ (1.2) จะได้ว่า

$$W = \frac{1}{2} \iiint \epsilon |\vec{\nabla}\Phi|^2 dx dy dz \quad \dots (2.23)$$

$$\text{พิจารณา } |\vec{\nabla}\Phi|^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 = \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2$$

$$\text{จะได้ว่า } W = \frac{1}{2} \iiint \epsilon (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) dx dy dz \quad \dots (2.24)$$

เปรียบเทียบฟังก์ชัน  $W$  จากปัญหาทางไฟฟ้าสถิต กับฟังก์ชัน  $I$  จากหลักการแปรผันในสมการที่ (2.8) จะได้ว่า

$$F(u, u_x, u_y, u_z, x, y, z) \equiv \frac{1}{2} \epsilon (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) \quad \dots (2.25)$$

ผลของการแปรผัน ทำให้ได้สมการออยเลอร์ - ลากราง ดังนั้นจึงแทนสมการ (2.25) ลงในสมการออยเลอร์ - ลากรางในกรณี 3 ตัวแปร จากสมการ (2.11) จะได้ว่า

$$-\epsilon (\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) = 0$$

$$\text{เมื่อ } \Phi_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right), \quad \Phi_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right), \quad \Phi_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)$$

$$-\epsilon \nabla^2 \Phi(x, y, z) = 0$$

หรือ 
$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = 0 \quad \dots (2.26)$$

ซึ่งตรงกับสมการลาปลาซ สำหรับการแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต

พิจารณาจากเงื่อนไขของการแปรผันที่ทำให้ฟังก์ชัน  $I$  มีค่า extremum [6] คือ

$$\delta I = 0$$

จาก 
$$\delta I = \alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha}$$

ดังนั้น จากกรณีที่พิจารณา จะได้ว่า 
$$\alpha \frac{\partial I}{\partial \alpha} = 0$$

หรือเขียนได้เป็น 
$$\frac{dI}{d\alpha} = 0 \quad \dots (2.27)$$

โดย  $\alpha$  เป็นพารามิเตอร์ใด ๆ ที่เปลี่ยนค่าได้

ในกรณีนี้พิจารณา ฟังก์ชันพลังงาน เทียบกับ ฟังก์ชัน  $I$  จะได้ว่า

$$\frac{dI}{d\alpha} \equiv \frac{dW}{d\alpha}$$

กล่าวคือ 
$$\frac{dW}{d\alpha} = 0 \quad \dots (2.28)$$

จากสมการที่ (2.28) หมายความว่า ถ้าให้ฟังก์ชันพลังงานมีค่า extremum จะได้ว่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของค่าฟังก์ชันนั้นเทียบกับพารามิเตอร์ของการแปรผัน มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง

ผลเฉลยจากวิธีนี้ คือ ค่าศักย์ไฟฟ้า  $\Phi$  ที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์  $\alpha$  ด้วย และถ้า

อนุพันธ์อันดับสองของสมการที่ (2.28) มากกว่าศูนย์ ( $\frac{d^2W}{d\alpha^2} > 0$ ) แสดงว่า ฟังก์ชันพลังงาน

มีค่าต่ำที่สุด ในกรณีตรงข้ามกัน หากอนุพันธ์อันดับสองของสมการที่ (2.28) น้อยกว่าศูนย์

( $\frac{d^2W}{d\alpha^2} < 0$ ) แสดงว่าฟังก์ชันพลังงานมีค่ามากที่สุด แต่ถ้าอนุพันธ์อันดับสองของสมการที่

(2.28) เป็นศูนย์ ( $\frac{d^2W}{d\alpha^2} = 0$ ) จะไม่สามารถระบุลักษณะของพลังงานว่าเป็นตำแหน่งสูงสุด หรือต่ำสุดได้

สรุปคือ ถ้าเราทำการแปรค่าฟังก์ชันพลังงาน ( energy functional ,  $W$  ) ตามสมการ (2.23) ให้มีค่าต่ำที่สุด ค่าศักย์  $\Phi(x,y,z)$  ที่เป็นผลเฉลยจากการคำนวณ จะเป็นไปตามสมการลาปลาซ (2.26)

### 2.3.2 พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{D}$  และ  $\bar{E}$  ในกรณีที่พิจารณาตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นมีรูปแบบที่ซับซ้อนกว่ากรณีเชิงเส้น ในที่นี้จะพิจารณา ลักษณะความสัมพันธ์แบบหนึ่ง ดังนี้

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \chi |\bar{E}|^2 \bar{E} \quad \dots (2.29)$$

เมื่อ  $\epsilon$  และ  $\chi$  คือ ค่าคงที่ไดอิเล็กทริก ( dielectric constant ) และสภาพรับได้ทางไฟฟ้า ( electric susceptibility ) ตามลำดับ

กรณีที่พิจารณาในไดอิเล็กทริกที่ไม่เป็นเชิงเส้น ค่าฟังก์ชันพลังงาน ( energy functional ,  $W$  ) จากความสัมพันธ์ของ  $\Phi$  และ  $\bar{E}$  ตามสมการ (1.10) ในกรณีที่พิจารณา [8] เป็นไปตามสมการดังนี้

$$W[\Phi] = \frac{1}{2} \int_V \epsilon(x) |\nabla \Phi(x)|^2 dV + \frac{1}{4} \int_V \chi(x) |\nabla \Phi(x)|^4 dV \quad \dots (2.30)$$

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ถ้าทำการหาค่าต่ำที่สุด ( Minimize ) ค่าฟังก์ชันพลังงาน  $W$  ตามสมการ (2.30) จะได้สมการอนุพันธ์เชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นตามสมการ (1.9)

จากสมการ (2.30)

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \int \epsilon \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \Phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \Phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi \right)^2 \right] dx dy dz \\ & + \frac{1}{4} \int \chi \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \Phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \Phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \Phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} \Phi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \Phi \right)^2 \right] dx dy dz \end{aligned}$$

กำหนดให้  $\Phi_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$  ,  $\Phi_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  ,  $\Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  จะได้ว่า

$$W = \int \left[ \frac{1}{2} \varepsilon (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) \right] dx dy dz + \int \left[ \frac{1}{4} \chi (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) \right] dx dy dz$$

$$\begin{aligned} W &= \int \left[ \frac{1}{2} \varepsilon (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) \right] dx dy dz \\ &+ \int \left[ \frac{1}{4} \chi (\Phi_x^4 + \Phi_y^4 + \Phi_z^4 + 2\Phi_x^2 \Phi_y^2 + 2\Phi_y^2 \Phi_z^2 + 2\Phi_x^2 \Phi_z^2) \right] dx dy dz \end{aligned}$$

เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบปัญหาทางไฟฟ้าสถิตกับหลักการแปรผัน ในทำนองเดียวกันกับที่พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น จะได้ฟังก์ชัน  $F$  ตามสมการ (2.8) ในกรณีนี้ดังนี้

$$\begin{aligned} F &= F(\Phi, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z; x, y, z) \\ &\equiv \frac{1}{2} \varepsilon (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \frac{1}{4} \chi (\Phi_x^4 + \Phi_y^4 + \Phi_z^4 + 2\Phi_x^2 \Phi_y^2 + 2\Phi_y^2 \Phi_z^2 + 2\Phi_x^2 \Phi_z^2) \end{aligned}$$

... (2.31)

จาก สมการออยเลอร์ – ลากราง 3 ตัวแปร สมการ (2.11) :

$$\frac{\partial}{\partial \Phi} F - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \Phi_x} F - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \Phi_y} F - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \Phi_z} F = 0$$

แทนค่าฟังก์ชัน  $F$  จากสมการ (2.31) ลงในสมการออยเลอร์ – ลากราง 3 ตัวแปรข้างต้น  
จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \Phi_z - \chi \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x^3 - \chi \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x \Phi_y^2 - \chi \frac{\partial}{\partial x} \Phi_x \Phi_z^2 - \chi \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y^3 \\ - \chi \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y \Phi_x^2 - \chi \frac{\partial}{\partial y} \Phi_y \Phi_z^2 - \chi \frac{\partial}{\partial z} \Phi_z^3 - \chi \frac{\partial}{\partial z} \Phi_z \Phi_x^2 - \chi \frac{\partial}{\partial z} \Phi_z \Phi_y^2 = 0 \end{aligned}$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\epsilon\Phi_x + \frac{\partial}{\partial y}\epsilon\Phi_y + \frac{\partial}{\partial z}\epsilon\Phi_z\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}\chi[\Phi_x^3 + \Phi_x\Phi_y^2 + \Phi_x\Phi_z^2] + \frac{\partial}{\partial y}\chi[\Phi_y^3 + \Phi_y\Phi_x^2 + \Phi_y\Phi_z^2] + \frac{\partial}{\partial z}\chi[\Phi_z^3 + \Phi_z\Phi_y^2 + \Phi_z\Phi_x^2]\right] = 0$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\epsilon\Phi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\epsilon\Phi_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\epsilon\Phi_z)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial x}\chi\Phi_x[\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2] + \frac{\partial}{\partial y}\chi\Phi_y[\Phi_y^2 + \Phi_x^2 + \Phi_z^2] + \frac{\partial}{\partial z}\chi\Phi_z[\Phi_z^2 + \Phi_y^2 + \Phi_x^2]\right] = 0$$

$$-\left[\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi)\right] - \left[\nabla \cdot (\chi |\nabla \Phi|^2 \nabla \Phi)\right] = 0$$

หรือ 
$$\nabla \cdot [\epsilon \nabla \Phi + \chi |\nabla \Phi|^2 \nabla \Phi] = 0 \quad \dots (2.32)$$

เห็นได้ว่าศักย์ไฟฟ้าที่ทำให้ฟังก์ชันนำพลังงานตามสมการ ( 2.30 ) มีค่าต่ำสุดจะสอดคล้องกับศักย์ไฟฟ้าตามสมการ ( 1.9 ) และจะเห็นได้ว่า เมื่อ  $\chi \rightarrow 0$  จะได้สมการ ( 2.30 ) และ ( 2.32 ) ลดรูปเป็นสมการ ( 2.23 ) และ ( 2.26 ) ตามลำดับ

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการแสดงให้เห็นว่า เมื่อพิจารณาทั้งในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นและแบบไม่เชิงเส้น ผลเฉลยที่ได้จากหลักการแปรผันจะสอดคล้องกับสมการลาปลาซในทางไฟฟ้าสถิต ดังนั้นในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางแบบไม่เชิงเส้นที่ค่าศักย์อยู่ในรูปแบบที่ยุงยาก และไม่สามารถหาผลเฉลยที่แม่นยำตรงได้หากพิจารณาตามปกติ จึงสามารถใช้วิธีการแปรผันพลังงานเพื่อหาผลเฉลยแทนได้เช่นกัน

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

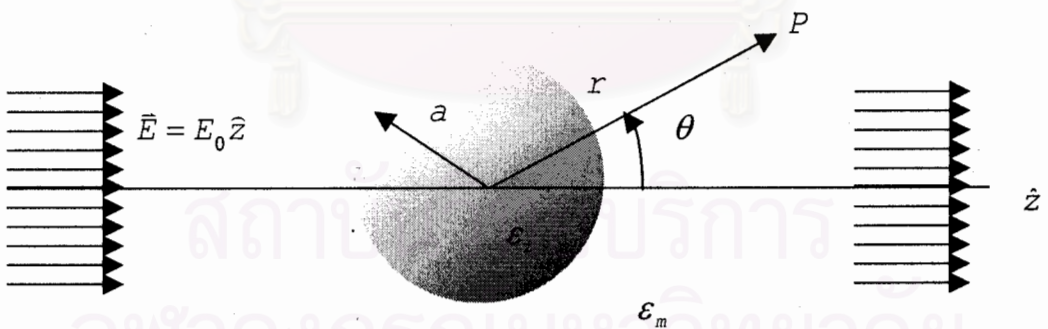


### ปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้น

ในบทนี้จะศึกษาปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้น ซึ่งเป็นปัญหาพื้นฐานที่สามารถคำนวณในแบบเชิงวิเคราะห์ได้ไม่ยากนัก ในที่นี่ได้ทำการคำนวณทั้งแบบที่แก้ด้วยการใช้สมการลาปลาซโดยตรง และแบบที่ใช้วิธีแปรผันพลังงาน โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณแล้วจึงเปรียบเทียบผลที่ได้ ซึ่งในที่นี่มีจุดประสงค์เพื่อทดสอบความถูกต้องแม่นยำของโปรแกรมที่เขียนขึ้นมาเพื่อจะได้นำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณปัญหาที่ซับซ้อนต่อไป

#### 3.1 ลักษณะโดยทั่วไปของปัญหาค่าขอบในทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว

ในที่นี่ พิจารณาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวเป็น inclusion มีค่าคงที่ไดอิเล็กทริกเป็น  $\epsilon_i$  รัศมี  $a$  ปริมาตร  $\Omega_i$  ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลาง host อีกชนิดหนึ่ง ซึ่งมีค่าคงที่ไดอิเล็กทริกเป็น  $\epsilon_m$  รัศมี  $R$  ปริมาตร  $V$  ซึ่งมีขนาดใหญ่กว่า  $\Omega_i$  มาก ทั้งระบบอยู่ภายในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$  ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 3.1 แสดงแบบจำลองของปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว ที่อยู่ภายในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$

พิจารณาค่าศักย์ใน 2 บริเวณ คือ

1. ศักย์ไฟฟ้าภายนอกทรงกลมไดอิเล็กทริก ( $r > a$ ) ;  $\Phi_m$
2. ศักย์ไฟฟ้าภายในทรงกลมไดอิเล็กทริก ( $r < a$ ) ;  $\Phi_i$



ซึ่งค่าศักย์ทั้งสองบริเวณต่างก็เป็นไปตามสมการลาปลาซ ในปัญหาที่พิจารณาอยู่นี้อยู่ในระบบพิกัดทรงกลม ( spherical coordinate ) พังก์ชันของค่าศักย์ในที่นี้จะขึ้นอยู่กับค่า  $r$  และ  $\theta$  ดังมีรูปแบบดังต่อไปนี้ คือ

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta) \quad \dots (3.1)$$

จากเงื่อนไขขอบ ทำให้สามารถทราบรูปแบบของค่าศักย์ในกรณีทีพิจารณาได้ดังต่อไปนี้ คือ เมื่อพิจารณาที่ไกลมาก ๆ ( $r \rightarrow \infty$ ) เทอมที่ขึ้นอยู่กับ  $r^{-(n+1)}$  จะเป็นศูนย์ และค่าศักย์ที่ภายนอกนี้จะขึ้นอยู่กับค่าสนามไฟฟ้าภายนอก ดังนี้

$$\Phi(r, \theta) = -E_0 z + C = -E_0 r \cos \theta + C \quad \dots (3.2)$$

โดยค่า  $C$  เป็นค่าคงที่ สามารถเลือกเป็นศูนย์โดยจะไม่มีผลต่อการหาค่าสนามไฟฟ้าของระบบ

จากรูปแบบของศักย์ในสมการ (3.1) เมื่อพิจารณา ที่ไกลมาก ๆ ( $r \rightarrow \infty$ ) จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta \quad \dots (3.3)$$

เมื่อเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์จากสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$A_0 = 0, \quad A_1 = -E_0, \quad \text{และ} \quad A_n = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad n \geq 2$$

และเมื่อพิจารณาที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม พจน์ที่ขึ้นอยู่กับ  $r^{-(n+1)}$  จะทำให้ค่าศักย์ไม่สามารถระบุได้ ( $\Phi \rightarrow \infty$ ) จึงกำหนดให้  $B_n = 0$  สำหรับทุกค่า  $n$  เมื่อพิจารณาภายในทรงกลม ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\Phi_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad \dots (3.4)$$

$$\Phi_m = -E_0 r \cos \theta + \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad \dots (3.5)$$

เมื่อ  $\Phi_i$  และ  $\Phi_m$  คือ ค่าศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงกลม ตามลำดับ

หลังจากที่ทราบรูปแบบคร่าว ๆ ของค่าศักย์ไฟฟ้าแล้ว แต่ยังคงอยู่ในพจน์ที่มีค่าคงที่ที่ไม่ทราบ ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขขอบที่รอยต่อระหว่าง 2 ตัวกลาง ( $r = a$ ) โดยปริมาณที่ต่อเนื่องกันดังนี้

1. องค์ประกอบแนวสัมผัสของสนามไฟฟ้า ( $E_t$ ) ณ บริเวณรอยต่อของตัวกลางทั้งสอง มีค่าต่อเนื่องกัน กล่าวคือ  $E_{it} = E_{mt}$  จะได้ค่าศักย์ที่ผิวขอบของทรงกลมต่อเนื่องกันด้วย ดังนี้ คือ

$$\Phi_i(r=a) = \Phi_m(r=a)$$

แทนค่า ศักย์จากสมการ (3.4) และ (3.5) จะได้ว่า

$$A_1 a \cos\theta = -E_0 a \cos\theta + B_1 \frac{\cos\theta}{a^2}$$

$$A_1 = -E_0 + \frac{B_1}{a^3} \quad \dots (3.6)$$

2. ส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า ( $D_n$ ) ที่ผิวรอยต่อระหว่าง 2 ตัวกลางต่อเนื่องกัน ดังนี้ คือ

$$D_{in} = D_{mn}$$

$$\epsilon_i E_{ir} = \epsilon_m E_{mr}$$

$$\epsilon_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \Big|_{r=a} = \epsilon_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

จะได้พจน์  $n=1$  มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\epsilon_i A_1 \cos\theta = \epsilon_m \left( -E_0 \cos\theta - 2B_1 \frac{\cos\theta}{a^3} \right)$$

$$\epsilon_i A_1 = \epsilon_m \left( -E_0 - \frac{2B_1}{a^3} \right) \quad \dots (3.7)$$

จากเงื่อนไขของ 3.1 และ 3.2 จะได้ค่า  $A_n$  และ  $B_n$  เป็นศูนย์กรณี  $n \neq 1$

แทนค่า  $A_1$  จากสมการ (3.6) ลงในสมการ (3.7)

$$\varepsilon_i \left( -E_0 + \frac{B_1}{a^3} \right) = \varepsilon_m \left( -E_0 - \frac{2B_1}{a^3} \right)$$

$$-\varepsilon_i E_0 + \varepsilon_i \frac{B_1}{a^3} = -\varepsilon_m E_0 - \varepsilon_m \frac{2B_1}{a^3}$$

$$\varepsilon_i \frac{B_1}{a^3} + \varepsilon_m \frac{2B_1}{a^3} = \varepsilon_i E_0 - \varepsilon_m E_0$$

$$\frac{B_1}{a^3} (\varepsilon_i + 2\varepsilon_m) = E_0 (\varepsilon_i - \varepsilon_m)$$

$$B_1 = E_0 a^3 \left( \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} \right) \quad \dots (3.8)$$

แทนค่า  $B_1$  จากสมการ (3.8) ลงในสมการ (3.6) เพื่อหาค่า  $A_1$

$$A_1 = -E_0 + \frac{1}{a^3} E_0 a^3 \left( \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} \right)$$

$$A_1 = \frac{-E_0 (\varepsilon_i + 2\varepsilon_m) + E_0 (\varepsilon_i - \varepsilon_m)}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m}$$

$$A_1 = \frac{-\varepsilon_i E_0 - 2\varepsilon_m E_0 + \varepsilon_i E_0 - \varepsilon_m E_0}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m}$$

$$A_1 = \frac{-3\varepsilon_m E_0}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} \quad \dots (3.9)$$

จากสมการ (3.4), (3.5), (3.8) และ (3.9) จะได้รูปแบบฟังก์ชันศักย์ที่ต้องการดังนี้

$$\Phi_i = \frac{-3\varepsilon_m E_0}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} r \cos\theta = -cE_0 r \cos\theta \quad \dots (3.10)$$

$$\Phi_m = -E_0 r \cos\theta + E_0 a^3 \left( \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m} \right) \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$\Phi_m = -E_0 r \cos\theta + bE_0 \frac{a^3}{r^2} \cos\theta \quad \dots (3.11)$$

โดย  $c = \frac{3\varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m}$  และ  $b = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m}$

จากเงื่อนไขขอบ  $\Phi_i(r = a) = \Phi_m(r = a)$

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $c$  และ  $b$  คือ  $c = 1 - b$

ค่าศักย์ภายในทรงกลมไดอิเล็กทริก จากสมการ (3.10) เกิดจากการที่สารไดอิเล็กทริก  $\varepsilon_i$  ในทรงกลม ทำให้สนามไฟฟ้าจากการที่ถูกโพลาไรซ์จากสนามภายนอก ทำให้เกิดโพลาไรเซชัน แล้วสร้างสนามไฟฟ้าขึ้นมาเองทำให้สนามไฟฟ้าเดิมเปลี่ยนไปจากเดิม

ค่าศักย์ภายนอกทรงกลมไดอิเล็กทริก จากสมการ (3.11) มีอยู่ด้วยกัน 2 พจน์ คือ พจน์แรกเป็นศักย์ที่เกิดจากสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก พจน์ที่สองเป็นศักย์ที่เกิดจากสารไดอิเล็กทริก  $\varepsilon_m$  ถูกสนามไฟฟ้าภายนอกโพลาไรซ์เกิดเป็นไดโพลคู่ชั่วคราวไฟฟ้า ซึ่งขนาดศักย์ของไดโพลมีค่าขึ้นกับ  $\frac{\cos\theta}{r^2}$

### 3.2 วิธีการแปรผันพลังงานในปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้น

หลักการของวิธีการแปรผันคือ การเลือกฟังก์ชันนำมาพิจารณาการแปรผันเทียบกับ พารามิเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชันนั้นมีค่าน้อยที่สุด สำหรับปัญหาค่าขอบในทางไฟฟ้าสถิต ฟังก์ชันนำที่นำมาแปรผัน คือ ฟังก์ชันนำพลังงานนั่นเอง แต่เมื่อพิจารณาแล้วจะพบว่า ฟังก์ชันนำพลังงานจะขึ้นอยู่กับรูปแบบของค่าศักย์นั่นเอง

ดังนั้น จึงเริ่มต้นด้วยการเลือกค่าศักย์ที่จะนำมาหาค่าฟังก์ชันนำพลังงานโดยจะใช้ค่าศักย์ทดลองพื้นฐานซึ่งดัดแปลงเล็กน้อยจากผลเฉลยของสมการลาปลาซตามปัญหาไดโพลีทริกทรงกลมเดี่ยวในเงื่อนไขที่พิจารณา เพื่อความสะดวกในการคำนวณ โดยตัดเครื่องหมายลบบางพจน์ทิ้ง ดังต่อไปนี้

$$\Phi_i(r, \theta) = cE_0 r \cos \theta \quad \dots (3.12)$$

$$\Phi_m(r, \theta) = E_0 r \cos \theta + bE_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad \dots (3.13)$$

โดย  $\Phi_i$  เป็นค่าศักย์ทดลองภายในทรงกลมไดโพลีทริก ( $r < a$ )

$\Phi_m$  เป็นค่าศักย์ทดลองภายนอกทรงกลมไดโพลีทริก ( $r > a$ )

โดยกำหนดให้  $\vec{E} = -\nabla\Phi$

และจากเงื่อนไขขอบ  $\Phi_i(r=a) = \Phi_m(r=a)$

จะได้ว่า  $c = 1 + b$

ฟังก์ชันนำพลังงานในปริมาตร  $V$  จึงแบ่งเป็นพลังงานภายในทรงกลม, พลังงานภายนอกทรงกลม และพลังงานตามพื้นผิว ดังนี้

$$W = \frac{1}{2} \int_V \epsilon_i |\nabla\Phi_i|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_V \epsilon_m |\nabla\Phi_m|^2 d\tau + W_s$$

$$W = \frac{1}{2} \left[ \int_V \epsilon_i |\nabla\Phi_i|^2 d\tau + \int_V \epsilon_m |\nabla\Phi_m|^2 d\tau + 2W_s \right]$$

$$W = \frac{1}{2} [W_1 + W_2 + 2W_s]$$

โดยที่  $d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$  เป็นปริมาตรของบริเวณที่พิจารณา

$$\text{จาก } \nabla\Phi = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\Phi)\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\Phi)\hat{\phi} \quad \dots (3.14)$$

ระบบที่พิจารณาทำให้ปัญหาไม่ขึ้นกับค่า  $\Phi$  (azimuthal symmetry) พจน์ที่ 3 จากสมการ (3.14) จึงละไว้ไม่ต้องพิจารณา

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\nabla\Phi_i = cE_0\cos\theta\hat{r} - cE_0\sin\theta\hat{\theta}$$

$$|\nabla\Phi_i|^2 = c^2E_0^2\cos^2\theta + c^2E_0^2\sin^2\theta = c^2E_0^2$$

$$\nabla\Phi_m = (E_0\cos\theta - 2E_0ba^3r^{-3}\cos\theta)\hat{r} + (-E_0\sin\theta - E_0ba^3r^{-3}\sin\theta)\hat{\theta}$$

$$\begin{aligned} |\nabla\Phi_m|^2 &= E_0^2\cos^2\theta - 4E_0^2ba^3r^{-3}\cos^2\theta + 4E_0^2b^2a^6r^{-6}\cos^2\theta \\ &\quad + E_0^2\sin^2\theta + 2E_0^2ba^3r^{-3}\sin^2\theta + E_0^2b^2a^6r^{-6}\sin^2\theta \\ &= E_0^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2E_0^2ba^3r^{-3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &\quad + E_0^2b^2a^6r^{-6}(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) \end{aligned}$$

$$W_1 = \int \epsilon_i |\nabla\Phi_i|^2 d\tau = \int \epsilon_i c^2 E_0^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \epsilon_i c^2 E_0^2 \left( \frac{4\pi a^3}{3} \right) = \epsilon_i c^2 E_0^2 \Omega_i$$

$$W_2 = \int \epsilon_m |\nabla\Phi_m|^2 d\tau$$

$$= \int \epsilon_m \left[ E_0^2 - 2E_0^2ba^3r^{-3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) + E_0^2b^2a^6r^{-6}(4\cos^2\theta + \sin^2\theta) \right] r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$= \left[ \epsilon_m E_0^2 \left( \frac{4\pi R^3}{3} \right) - \epsilon_m E_0^2 \left( \frac{4\pi a^3}{3} \right) + 2\epsilon_m E_0^2 b^2 \left( \frac{4\pi a^3}{3} \right) - 2 \left( \frac{4}{3} \pi \epsilon_m E_0^2 b^2 \frac{a^6}{R^3} \right) \right]$$



จากที่กล่าวไว้ข้างต้นว่า  $V \gg \Omega_i$  ดังนั้น  $R \gg a$  จะได้ว่า

$$W_2 = [\epsilon_n E_0^2 (V - \Omega_i) + 2\epsilon_m E_0^2 b^2 \Omega_i]$$

$$W_1 + W_2 = [\epsilon_i c^2 E_0^2 \Omega_i + \epsilon_m E_0^2 V - \epsilon_m E_0^2 \Omega_i + 2\epsilon_m E_0^2 b^2 \Omega_i]$$

$$= [\epsilon_i c^2 E_0^2 \Omega_i + \epsilon_m E_0^2 (V - \Omega_i + 2b\Omega_i)] \quad \dots (3.15)$$

พิจารณาพลังงานที่ผิว ( $r = R$ )

จาก

$$W_s = \oint_s \Phi \vec{D} \cdot \hat{n} da$$

$$\Phi_m(r=R) = E_0 \left( R + \frac{ba^3}{R^2} \right) \cos\theta$$

$$\vec{D} \cdot \hat{n} = \vec{D}_n = \epsilon_m \vec{E}_r = \epsilon_m \left. \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right|_{r=R}$$

$$= \epsilon_m \left[ E_0 \cos\theta - 2bE_0 \frac{a^3}{R^3} \cos\theta \right] = \epsilon_m E_0 \cos\theta \left[ 1 - 2b \frac{a^3}{R^3} \right]$$

$$W_s = \oint_s \left[ \epsilon_m E_0^2 \cos^2\theta \left( R + b \frac{a^3}{R^2} \right) \left( 1 - 2b \frac{a^3}{R^3} \right) \cdot 2\pi R^2 \sin\theta d\theta \right]$$

$$= \epsilon_m E_0^2 (R^3 + ba^3) (1 - 2ba^3 R^{-3}) \int_0^\pi 2\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{4\pi}{3} \epsilon_m E_0^2 [R^3 - 2ba^3 + ba^3 - 2b^2 a^6 R^{-3}]$$

$$= \frac{4\pi}{3} \epsilon_m E_0^2 [R^3 - ba^3 - 2b^2 a^6 R^{-3}]$$

$$\begin{aligned}
 W_s &= \frac{4\pi R^3}{3} \varepsilon_m E_0^2 - \frac{4\pi a^3}{3} \varepsilon_m b E_0^2 - \frac{8\pi a^6}{3} \varepsilon_m b^2 R^{-3} E_0^2 \\
 &= \varepsilon_m E_0^2 V - b \varepsilon_m E_0^2 \Omega_i - \frac{8\pi a^6}{3} \varepsilon_m b^2 R^{-3} E_0^2
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $R \gg a$  ทำให้พจน์ที่สามทางขวาเป็นศูนย์ และ พลังงานพื้นผิวมีค่าแปรผันไปตามพารามิเตอร์  $b$  [8] คือ

$$W_s \sim -b \varepsilon_m E_0^2 \Omega_i$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_i c^2 E_0^2 \Omega_i + \varepsilon_m E_0^2 (V - \Omega_i + 2b^2 \Omega_i) - 2b \varepsilon_m E_0^2 \Omega_i \right]$$

$$W = \frac{1}{2} E_0^2 V \left[ \varepsilon_i c^2 \frac{\Omega_i}{V} + \varepsilon_m \left( 1 - \frac{\Omega_i}{V} + 2b^2 \frac{\Omega_i}{V} \right) - 2b \varepsilon_m \frac{\Omega_i}{V} \right]$$

นิยามให้  $p = \frac{\Omega_i}{V}$  อัตราส่วนระหว่างปริมาตรของทรงกลมไดอิเล็กทริกและตัวกลางที่ล้อมรอบ

จะได้ว่า 
$$W = \frac{1}{2} E_0^2 V \left[ \varepsilon_i c^2 p + \varepsilon_m (1 - p + 2b^2 p) - 2b \varepsilon_m p \right]$$

$$W = \frac{1}{2} E_0^2 V \left[ \varepsilon_m + \varepsilon_m p (-1 - 2b + 2b^2) + \varepsilon_i c^2 p \right]$$

จาก  $c = 1 + b$

$$W = \frac{1}{2} E_0^2 V \left[ \varepsilon_m + \varepsilon_m p (-1 - 2b + 2b^2) + \varepsilon_i (1 + b)^2 p \right]$$

$$W = \frac{1}{2} E_0^2 V \left[ \varepsilon_m + \varepsilon_m p (-1 - 2b + 2b^2) + \varepsilon_i (1 + 2b + b^2) p \right]$$

$$W = \frac{1}{2} E_0^2 V \left[ \varepsilon_m - \varepsilon_m p - 2b \varepsilon_m p + 2b^2 \varepsilon_m p + \varepsilon_i p + 2b \varepsilon_i p + b^2 \varepsilon_i p \right] \quad \dots (3.16)$$



ตัด แพคเตอร์  $\frac{1}{2}$  ซึ่งไม่มีผลต่อการแปรผันฟังก์ชันพลังงานจากสมการ (3.17) ออก จะได้ว่า

$$W = E_0^2 V [\epsilon_m - \epsilon_m p - 2b\epsilon_m p + 2b^2\epsilon_m p + \epsilon_i p + 2b\epsilon_i p + b^2\epsilon_i p] \quad \dots (3.17)$$

จากหลักการแปรผัน สามารถหาค่า  $b$  ที่ทำให้  $W$  มีค่า extremum ได้คือ  $\frac{\partial W}{\partial b} = 0$   
แทนค่าสมการ (3.17) ตามเงื่อนไขข้างต้น จะได้ว่า

$$-\epsilon_m p + 2b\epsilon_m p + \epsilon_i p + \epsilon_i b p = 0$$

$$p(\epsilon_i - \epsilon_m) + b p(\epsilon_i + 2\epsilon_m) = 0$$

$$b = \frac{-p(\epsilon_i - \epsilon_m)}{p(2\epsilon_m + \epsilon_i)} = \frac{-(\epsilon_i - \epsilon_m)}{(2\epsilon_m + \epsilon_i)}$$

$$\therefore b = \frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \quad \dots (3.18)$$

$$c = 1 + b = 1 + \left( \frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right)$$

$$= \frac{\epsilon_i + 2\epsilon_m + \epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$$

$$\therefore c = \frac{3\epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \quad \dots (3.19)$$

นิยามค่าคงตัวไดอิเล็กทริกยังผลแบบเชิงเส้น ( effective linear dielectric constant ;  $\epsilon_e$  )

[9] เป็นดังนี้ คือ

$$\epsilon_e = \frac{1}{|\bar{E}_0|^2 V} \int \epsilon |\bar{E}_0|^2 dV$$

หรือ 
$$\epsilon_e = \frac{1}{|\vec{E}_0|^2 V} \int \epsilon |\nabla \Phi|^2 dV$$

จากสมการที่ (2.22) 
$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon |\nabla \Phi|^2 dV$$

จึงได้ว่า 
$$\epsilon_e = \frac{2W}{|\vec{E}|^2 V}$$

เปรียบเทียบกับสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$\epsilon_e = \epsilon_m - \epsilon_m p - 2b\epsilon_m p + 2b^2\epsilon_m p + \epsilon_i p + 2b\epsilon_i p + b^2\epsilon_i p \quad \dots (3.20)$$

แทนค่า  $b = \frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$  ลงในสมการ (3.20) จะได้ว่า

$$\epsilon_e = \epsilon_m - \epsilon_m p - 2\left(\frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}\right)\epsilon_m p + 2\left(\frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}\right)^2 \epsilon_m p + \epsilon_i p$$

$$+ 2\left(\frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}\right)\epsilon_i p + \left(\frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}\right)^2 \epsilon_i p$$

$$\epsilon_e = \epsilon_m + \frac{3\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)p}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \quad \dots (3.21)$$

ค่าคงที่ไดอิเล็กทริกยังผล ตามสมการที่ (3.21) เป็นสมบัติของวัสดุเชิงประกอบที่ประกอบด้วยไดอิเล็กทริก 2 ชนิด ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านอื่น ๆ ต่อไปได้

### 3.3 โปรแกรมช่วยคำนวณสำหรับวิธีการแปรผันพลังงาน

วิธีแปรผันพลังงานมีข้อจำกัดอยู่ที่การคำนวณ ถึงแม้วิธีนี้สามารถหาผลเฉลยได้แม่นยำ แต่ต้องมีการคำนวณที่ค่อนข้างยาว อย่างเช่นในปัญหาค่าขอบที่พิจารณานี้แม้จะเป็นกรณีง่าย ๆ ที่พิจารณาไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นซึ่งไม่ซับซ้อน ในขั้นตอนที่พิจารณาค่าพลังงานด้วยการอินทิเกรต

ปริมาตรฟังก์ชันศักย์ หากคำนวณด้วยตนเองโดยตรง อาจต้องใช้เวลาค่อนข้างมาก ด้วยเหตุนี้ ใน การศึกษาครั้งนี้จึงได้นำโปรแกรมคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในขั้นตอนของการคำนวณ เพื่อลดเวลาใน การศึกษา ทำให้การคำนวณสะดวกและรวดเร็วขึ้น โดยได้นำโปรแกรมของ Yu [8] มาประยุกต์ใช้

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ คือ MATHEMATICA VERSION 4.0 โดยใช้กับคอมพิวเตอร์ที่มี คุณสมบัติดังนี้ คือ PENTIUM III 550 MHz RAM 128 MB

ในหัวข้อนี้จะทำการทดสอบโปรแกรมที่เขียนขึ้นตามวิธีการแปรผันพลังงาน โดยเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณตามปกติและการคำนวณจากโปรแกรม ขั้นตอนของการเขียน โปรแกรมเพื่อแก้ไขปัญหาค่าขอบของไดอิเล็กทริกทรงกลมเดี่ยวแบบเชิงเส้นมีดังนี้

1. เลือกฟังก์ชันศักย์ทดลองโดยแบ่งพิจารณาใน 2 บริเวณ คือ ศักย์ภายนอกและภายในทรงกลม
2. คำนวณค่า  $\nabla\Phi$  เพื่อแทนค่า  $E$  จากความสัมพันธ์  $E = -\nabla\Phi$
3. คำนวณค่าฟังก์ชันนำพลังงาน จากสมการ

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_i |\nabla\Phi_i|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int \epsilon_m |\nabla\Phi_m|^2 d\tau + W_s$$

4. ทำการแปรผันพลังงานเพื่อหาค่า  $b$  ที่ทำให้ฟังก์ชันนำพลังงานรวมมีค่าต่ำสุด หรือ

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 0$$

นอกจากนี้ โปรแกรมนี้จะเปรียบเทียบผลของขนาด  $\epsilon_i, \epsilon_m$  ที่มีต่อค่าฟังก์ชันนำพลังงาน และความต่อเนื่องของส่วนประกอบตั้งฉากของการกระจัดตามเงื่อนไขขอบของปัญหาค่าขอบทาง ไฟฟ้าสถิต

โปรแกรม trial linear.nb (ดูภาคผนวก ค เพิ่มเติม)

(\* load package program \*)

<< Calculus`VectorAnalysis`

SetCoordinates [Spherical [r,  $\theta$ ,  $\phi$ ]];

<< Graphics`Legend`

<< Graphics`Graphics`

(\* เลือกค่าศักย์ทดลองเบื้องต้นใน 2 บริเวณ คือ ภายในและภายนอกทรงกลม \*)

$$\Phi_i = (c + r) * E_0 * \text{LegendreP} [1, \text{Cos} [\theta]]$$

$$c r \text{Cos}[\theta] e_0$$

$$\Phi_m = r * E_0 * \text{LegendreP} [1, \text{Cos} [\theta]] + (b * a^3 * r^{-2}) * E_0 * \text{LegendreP} [1, \text{Cos} [\theta]]$$

$$\frac{a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^2} + r \text{Cos}[\theta] e_0$$

(\* คำนวณค่า  $\nabla \Phi$  \*)

$$\mathbf{E}_i = \text{Grad} [\Phi_i]$$

$$(c \text{Cos}[\theta] e_0, -c \text{Sin}[\theta] e_0, 0)$$

$$\mathbf{E}_m = \text{Grad} [\Phi_m]$$

$$\left\{ \text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3}, \frac{-\frac{a^3 b \text{Sin}[\theta] e_0}{r^2} - r \text{Sin}[\theta] e_0}{r}, 0 \right\}$$

(\* คำนวณค่า  $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$  \*)

$$\mathbf{E}_{ni} = \partial_r \Phi_i$$

$$c \text{Cos}[\theta] e_0$$

$$\mathbf{E}_{nm} = \partial_r \Phi_m$$

$$\text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3}$$

(\* คำนวณฟังก์ชันนัลพลังงานตามสมการ

$$W = \frac{1}{2} \int \epsilon_i |\nabla \Phi_i|^2 d\tau + \frac{1}{2} \int \epsilon_m |\nabla \Phi_m|^2 d\tau + W_s *)$$

$$\mathbf{G}_i = \epsilon_i * (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_i)$$

$$(c^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 + c^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2) \epsilon_i$$

$$\mathbf{G}_i = \text{Expand} [\mathbf{G}_i, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$$

$$c^2 e_0^2 \epsilon_i$$

$$\mathbf{G}_m = \epsilon_m * (\mathbf{E}_m \cdot \mathbf{E}_m)$$

$$\left( \left( \text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3} \right)^2 + \frac{\left( -\frac{a^3 b \text{Sin}[\theta] e_0}{r^2} - r \text{Sin}[\theta] e_0 \right)^2}{r^2} \right) \epsilon_m$$

$$\text{Expand} [\%]$$

$$\text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m + \frac{4 a^6 b^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^6} - \frac{4 a^3 b \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^3} +$$

$$\text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m + \frac{a^6 b^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^6} + \frac{2 a^3 b \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^3}$$

$G_m = \text{Expand} [G_m, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$$e_0^2 \epsilon_m + \frac{5 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m}{2 r^6} - \frac{a^3 b e_0^2 \epsilon_m}{r^3} + \frac{3 a^6 b^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{2 r^6} - \frac{3 a^3 b \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{2 r^6} - \frac{3 a^6 b^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{2 r^6} + \frac{3 a^3 b \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^3}$$

$$P = \int_0^a \int_0^\pi G_i * 2 * \pi * r^2 * \text{Sin}[\theta] d\theta dr$$

$$\frac{4}{3} a^3 c^2 \pi e_0^2 \epsilon_i$$

$$P_0 = P / \left( \frac{4}{3} \pi \right)$$

$$a^3 c^2 e_0^2 \epsilon_i$$

$P_0 = \text{Expand} [\%]$

$$a^3 c^2 e_0^2 \epsilon_i$$

$P_1 = \text{Simplify} [\text{Coefficient} [\text{Collect} [P_0, a^3], a^3]] * \Omega_i$

$$c^2 e_0^2 \epsilon_i \Omega_i$$

$$Q = \int_a^R \int_0^\pi G_m * 2 * \pi * r^2 * \text{Sin}[\theta] d\theta dr$$

$$2 \pi \left( \frac{2 (-a^6 e_0^2 \epsilon_m + 2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m)}{3 a^3} - \frac{2 (2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m - R^6 e_0^2 \epsilon_m)}{3 R^3} \right)$$

$\text{Expand} [\%]$

$$-\frac{4}{3} a^3 \pi e_0^2 \epsilon_m + \frac{8}{3} a^3 b^2 \pi e_0^2 \epsilon_m - \frac{8 a^6 b^2 \pi e_0^2 \epsilon_m}{3 R^3} + \frac{4}{3} \pi R^3 e_0^2 \epsilon_m$$

$$Q_0 = Q / \left( \frac{4}{3} \pi \right)$$

$$\frac{3}{2} \left( \frac{2 (-a^6 e_0^2 \epsilon_m + 2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m)}{3 a^3} - \frac{2 (2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m - R^6 e_0^2 \epsilon_m)}{3 R^3} \right)$$

$Q_0 = \text{Expand} [\%]$

$$-a^3 e_0^2 \epsilon_m + 2 a^3 b^2 e_0^2 \epsilon_m - \frac{2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m}{R^3} + R^3 e_0^2 \epsilon_m$$

$Q_1 = \text{Simplify} [\text{Coefficient} [\text{Collect} [Q_0, a^3], a^3]] * \Omega_i$

$$(-1 + 2 b^2) e_0^2 \epsilon_m \Omega_i$$

$Q_2 = \text{Simplify} [\text{Coefficient} [\text{Collect} [Q_0, R^3], R^3]] * V$

$$V e_0^2 \epsilon_m$$

(\* คำนวณหาค่าพลังงานพื้นผิว  $W_s = \oint_S \Phi \vec{D} \cdot \hat{n} da$  \*)

$\mathfrak{E}_{mR} = \mathfrak{E}_m /. \{r \rightarrow R\}$

$$\frac{a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{R^2} + R \text{Cos}[\theta] e_0$$

$\mathbf{E}_r = (\mathcal{O}_r \mathfrak{E}_m)$

$$\text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3}$$

$\mathbf{D}_r = \epsilon_m * \mathbf{E}_r$

$$\left( \text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3} \right) \epsilon_m$$

$$D_R = D_r /. \{r \rightarrow R\}$$

$$\left( \cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{R^3} \right) \epsilon_m$$

$$W_s = \int_0^\pi (\epsilon_{mR} * D_R * 2 * \pi * R^2 * \sin[\theta]) d\theta$$

$$\frac{4 \pi (-2 a^3 b^2 e_0^2 - a^3 b R^3 e_0^2 + R^6 e_0^2) \epsilon_m}{3 R^3}$$

$$W_s = \text{Expand} [\%]$$

$$-\frac{4}{3} a^3 b \pi e_0^2 \epsilon_m - \frac{8 a^6 b^2 \pi e_0^2 \epsilon_m}{3 R^3} + \frac{4}{3} \pi R^3 e_0^2 \epsilon_m$$

$$s_0 = \text{Expand} \left[ \frac{W_s}{\left( \frac{4}{3} \pi \right)} \right]$$

$$-a^3 b e_0^2 \epsilon_m - \frac{2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m}{R^3} + R^3 e_0^2 \epsilon_m$$

$$\text{surface} = \text{Simplify} [\text{Coefficient} [\text{Collect} [s_0, a^3], a^3]] * \Omega_i$$

$$-b e_0^2 \epsilon_m \Omega_i$$

(\* คำฟังก์ชันนำพลังงานที่ได้จากการคำนวณ \*)

$$W = (P_1 + Q_1 + Q_2) + 2 * \text{surface}$$

$$V e_0^2 \epsilon_m + c^2 e_0^2 \epsilon_i \Omega_i - 2 b e_0^2 \epsilon_m \Omega_i + (-1 + 2 b^2) e_0^2 \epsilon_m \Omega_i$$

(\* คำนวณค่าพารามิเตอร์ b จากหลักการแปรผัน คือ การหาค่า b ที่ทำให้  $\frac{\partial W}{\partial b} = 0$

ซึ่งจะได้ค่า b ในรูปแบบ closed form \*)

$$W_e = W /. \{c \rightarrow (1 + b)\}$$

$$V e_0^2 \epsilon_m + (1 + b)^2 e_0^2 \epsilon_i \Omega_i - 2 b e_0^2 \epsilon_m \Omega_i + (-1 + 2 b^2) e_0^2 \epsilon_m \Omega_i$$

$$\text{trial} = \partial_b W_e$$

$$2 (1 + b) e_0^2 \epsilon_i \Omega_i - 2 e_0^2 \epsilon_m \Omega_i + 4 b e_0^2 \epsilon_m \Omega_i$$

$$\text{Solve} [\text{trial} == 0, b]$$

$$\left\{ \left\{ b \rightarrow -\frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2 \epsilon_m} \right\} \right\}$$

(\* คำนวณค่า  $\epsilon_e$  \*)

$$e_r = \text{Simplify} [W]$$

$$e_0^2 (c^2 \epsilon_i \Omega_i + \epsilon_m (V + (-1 - 2 b + 2 b^2) \Omega_i))$$

$$e_r = e_r /. \{V \rightarrow 1, \Omega_i \rightarrow p, E_0 \rightarrow 1\}$$

$$c^2 p \epsilon_i + (1 + (-1 - 2 b + 2 b^2) p) \epsilon_m$$

$$e_r = e_r /. \{c \rightarrow (1 + b)\}$$

$$(1 + b)^2 p \epsilon_i + (1 + (-1 - 2 b + 2 b^2) p) \epsilon_m$$



$$\epsilon_e = \epsilon_r / \left\{ b \rightarrow - \frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right\}$$

$$p\epsilon_i \left( 1 - \frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right)^2 + \epsilon_m \left( 1 + p \left( -1 + \frac{2(\epsilon_i - \epsilon_m)^2}{(\epsilon_i + 2\epsilon_m)^2} + \frac{2(\epsilon_i - \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right) \right)$$

$$\epsilon_e = \text{Simplify} [\%]$$

$$\frac{\epsilon_m ((1+3p)\epsilon_i + (2-3p)\epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$$

(\* เขียนกราฟระหว่างฟังก์ชันนำพลังงานและพารามิเตอร์ b

เมื่อพิจารณากรณีที่มีอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ค่าต่าง ๆ \*)

$$\text{Wer} = \text{We} / \{V \rightarrow 1, \Omega_i \rightarrow p, E_0 \rightarrow 1, \epsilon_i \rightarrow y, \epsilon_m \rightarrow 1\}$$

$$1 - 2bp + (-1 + 2b^2)p + (1+b)^2py$$

$$\text{Wer} = \text{Wer} / \{p \rightarrow 0.08\}$$

$$1 - 0.16b + 0.08(-1 + 2b^2) + 0.08(1+b)^2y$$

$$r[0] = 0; r[1] = 0.02; r[2] = 0.1; r[3] = 0.2; r[4] = 0.3;$$

$$r[5] = 0.4; r[6] = 0.6; r[7] = 0.8; r[8] = 1; r[9] = 1.2;$$

$$r[10] = 1.5; r[11] = 2; r[12] = 3; r[13] = 4; r[14] = 5;$$

$$r[15] = 6; r[16] = 8;$$

$$r[17] = 10;$$

$$\text{Do}[h = \text{Wer} / \{y \rightarrow r[i]\};$$

$$t[i] = h;$$

$$\{i, 0, 17\}]$$

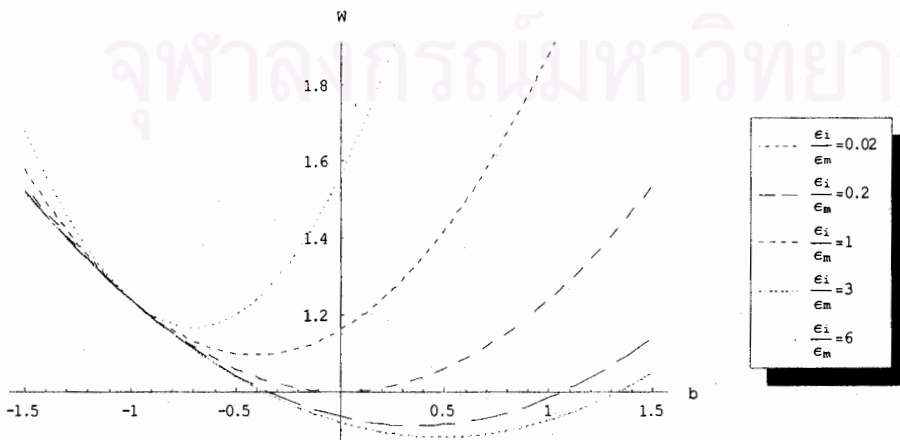
$$\text{Plot}[\{t[1], t[3], t[8], t[12], t[16]\}, \{b, -1.5, 1.5\},$$

$$\text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Dashing}[\{0.001, 0.001\}], \text{Dashing}[\{0.06, 0.02\}], \text{Dashing}[\{0.02, 0.02\}],$$

$$\text{Dashing}[\{0.0095, 0.01\}], \text{Dashing}[\{0.002, 0.009\}]\},$$

$$\text{PlotLegend} \rightarrow \left\{ \frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.02, \frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.2, \frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 1, \frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 3, \frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 6 \right\},$$

$$\text{LegendPosition} \rightarrow \{1.1, -.4\}, \text{LegendSize} \rightarrow 0.7, \text{AxesLabel} \rightarrow \{b, W\}]$$





(\* คำนวณการแปรผันพลังงานอีกแบบหนึ่ง ซึ่งจะได้ค่า  $\frac{\mathcal{E}_e}{\mathcal{E}_m}$  และค่า b แบบเชิงตัวเลข

ที่อัตราส่วน  $\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  ค่าต่าง ๆ \*)

Do [z = r[j];

soll [j] = FindMinimum [Wer /. {y → z}, {b, 0}];

Print [ " $\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [", j, "] = ", z, " ", soll [j] ] ;  
 , {j, 1, 17} ]

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [1] = 0.02 {0.883564, {b → 0.485149}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [2] = 0.1 {0.897143, {b → 0.428571}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [3] = 0.2 {0.912727, {b → 0.363636}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [4] = 0.3 {0.926957, {b → 0.304348}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [5] = 0.4 {0.94, {b → 0.25}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [6] = 0.6 {0.963077, {b → 0.153846}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [7] = 0.8 {0.982857, {b → 0.0714285}}

FindMinimum::fmgz : Encountered a vanishing gradient. The

result returned may not be a minimum; it may be a maximum or a saddle point.

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [8] = 1 {1., {b → 0.}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [9] = 1.2 {1.015, {b → -0.0625}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [10] = 1.5 {1.03429, {b → -0.142857}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [11] = 2 {1.06, {b → -0.25}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [12] = 3 {1.096, {b → -0.4}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [12] = 3 {1.096, {b → -0.4}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [14] = 5 {1.13714, {b → -0.571429}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [15] = 6 {1.15, {b → -0.625}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [16] = 8 {1.168, {b → -0.7}}

$\frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_m}$  [17] = 10 {1.18, {b → -0.75}}

ko [0] = 0.5000000000000279 ;

ko [1] = 0.48514851485145294 ;

ko [2] = 0.42857142857142916 ;

ko [3] = 0.3636363636363715 ;

ko [4] = 0.3043478260869554 ;

ko [5] = 0.24999999999999953 ;

ko [6] = 0.15384615384604475 ;

ko [7] = 0.0714285714285669 ;

$k_0[8] = 0.;$   
 $k_0[9] = -0.062499978991859544 ;$   
 $k_0[10] = -0.1428571428570535 ;$   
 $k_0[11] = -0.2500000191824921 ;$   
 $k_0[12] = -0.39999998256282 ;$   
 $k_0[13] = -0.499999983912505 ;$   
 $k_0[14] = -0.5714285714285705 ;$   
 $k_0[15] = -0.6249999999999999 ;$   
 $k_0[16] = -0.7000000000000741 ;$   
 $k_0[17] = -0.7499999999999998 ;$

(\* พิจารณาความต่อเนื่องของส่วนประกอบแนวตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า ( $D_n$ )

ที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ค่าต่าง ๆ \*)

$\epsilon_i[0] = 0;$	$\epsilon_m[0] = 1;$
$\epsilon_i[1] = 0.02 ;$	$\epsilon_m[1] = 1;$
$\epsilon_i[2] = 0.1 ;$	$\epsilon_m[2] = 1 ;$
$\epsilon_i[3] = 0.2 ;$	$\epsilon_m[3] = 1;$
$\epsilon_i[4] = 0.3 ;$	$\epsilon_m[4] = 1;$
$\epsilon_i[5] = 0.4 ;$	$\epsilon_m[5] = 1;$
$\epsilon_i[6] = 0.6 ;$	$\epsilon_m[6] = 1;$
$\epsilon_i[7] = 0.8 ;$	$\epsilon_m[7] = 1;$
$\epsilon_i[8] = 1;$	$\epsilon_m[8] = 1;$
$\epsilon_i[9] = 1.2 ;$	$\epsilon_m[9] = 1;$
$\epsilon_i[10] = 1.5 ;$	$\epsilon_m[10] = 1;$
$\epsilon_i[11] = 2;$	$\epsilon_m[11] = 1;$
$\epsilon_i[12] = 3;$	$\epsilon_m[12] = 1;$
$\epsilon_i[13] = 4;$	$\epsilon_m[13] = 1;$
$\epsilon_i[14] = 5;$	$\epsilon_m[14] = 1;$
$\epsilon_i[15] = 6;$	$\epsilon_m[15] = 1;$
$\epsilon_i[16] = 8;$	$\epsilon_m[16] = 1;$
$\epsilon_i[17] = 10;$	$\epsilon_m[17] = 1;$

$$G_{ri} = \epsilon_i * E_{ri}$$

$$c \cos[\theta] \epsilon_0 \epsilon_i$$

$$G_{rm} = \epsilon_m * E_{rm}$$

$$\left( \cos[\theta] \epsilon_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] \epsilon_0}{r^3} \right) \epsilon_m$$

$$G_{ai} = G_{ri} / . \{c \rightarrow 1 + b, \epsilon_0 \rightarrow 1, r \rightarrow a\}$$

$$(1 + b) \cos[\theta] \epsilon_i$$

$G_{ai} = \text{Expand}[G_{ai}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$\text{Cos}[\theta] \epsilon_i + b \text{Cos}[\theta] \epsilon_i$

$\text{Simplify}[G_{ai}]$

$(1+b) \text{Cos}[\theta] \epsilon_i$

$G_{am} = G_{im} /. \{c \rightarrow 1+b, E_0 \rightarrow 1, r \rightarrow a\}$

$(\text{Cos}[\theta] - 2b \text{Cos}[\theta]) \epsilon_m$

$G_{am} = \text{Expand}[G_{am}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$\text{Cos}[\theta] \epsilon_m - 2b \text{Cos}[\theta] \epsilon_m$

$\text{Simplify}[G_{am}]$

$(1-2b) \text{Cos}[\theta] \epsilon_m$

$eq = \text{Simplify}[G_{ai}/G_{am}]$

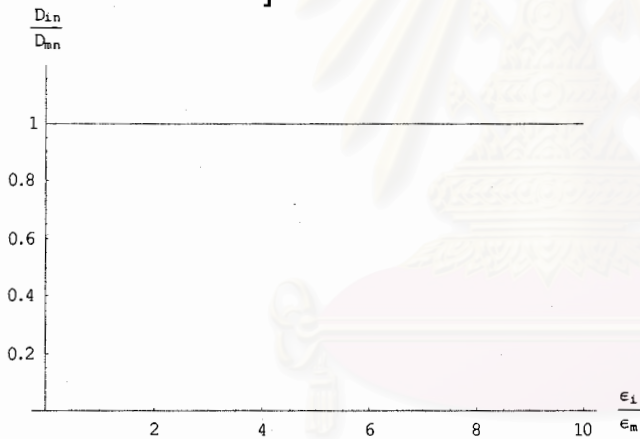
$\frac{(1+b) \epsilon_i}{(1-2b) \epsilon_m}$

$\text{Do}[qe[k] = eq /. \{b \rightarrow ko[k], \epsilon_i \rightarrow r[k], \epsilon_m \rightarrow 1\}, \{k, 1, 17\}]$

$GTO = \text{Table}[\{r[i], qe[i]\}, \{i, 1, 17\}];$

$\text{ListPlot}[GTO, \text{AxesLabel} \rightarrow \left\{ \frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}, \frac{D_{in}}{D_{mn}} \right\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{0, 1.2\},$

$\text{PlotJoined} \rightarrow \text{True}]$



(\* เขียนกราฟระหว่าง  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ที่อัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  ค่าต่าง ๆ \*)

$$xe = \frac{1-r}{r+2}$$

$$\frac{1-r}{2+r}$$

$$tr = 1 - 3 * p * xe$$

$$1 - \frac{3p(1-r)}{2+r}$$

$$u = tr /. \{p \rightarrow 0.08\}$$

$$1 - \frac{0.24(1-r)}{2+r}$$

```
Do [tu[i] = u /. {r -> r[i]}];
```

```
Print [{" $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ " = ", r[i], " $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ " = ", tu[i]}];
```

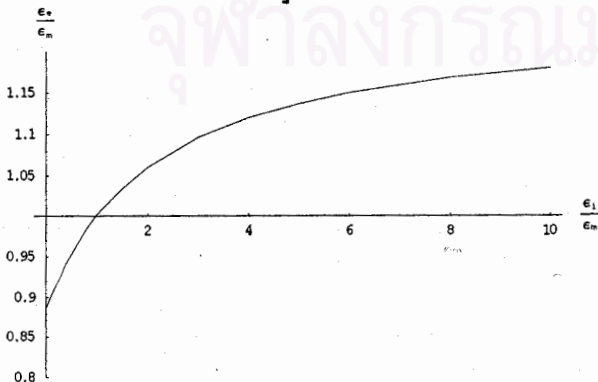
```
, {i, 1, 17}]
```

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 0.02	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 0.883564
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 0.1	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 0.897143
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 0.2	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 0.912727
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 0.3	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 0.926957
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 0.4	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 0.94
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 0.6	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 0.963077
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 0.8	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 0.982857
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 1	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 1.2	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.015
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 1.5	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.03429
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 2	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.06
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 3	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.096
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 4	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.12
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 5	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.13714
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 6	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.15
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 8	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.168
$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ = 10	$\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ = 1.18

```
Gt = Table [{r[i], tu[i]}, {i, 1, 17}];
```

```
ListPlot [Gt, AxesLabel -> {" $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ ", " $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$ "}, PlotRange -> {0.8, 1.2},
```

```
PlotJoined -> True]
```



- Graphics -

### 3.4 ผลจากการคำนวณของโปรแกรม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงผลจากการคำนวณของโปรแกรม trial linear.nb ซึ่งเขียนขึ้นมาเพื่อพิจารณาปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้น ในกรณีที่มีอัตราส่วนระหว่างค่าคงที่ไดอิเล็กทริกของ inclusion และตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่ (host) หรือ  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มีค่าต่าง ๆ

พิจารณาความถูกต้องของโปรแกรม พบว่าค่าที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมกับค่าที่ได้จากการคำนวณปกติ มีค่าที่ตรงกัน ได้แก่

1. ค่า  $b = \frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$  ตรงกับค่า  $b$  ตามสมการที่ (3.18)

2. ค่า  $c = \frac{3\epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$  ตรงกับค่า  $c$  ตามสมการที่ (3.19)

3. ค่า  $\epsilon_e$  ที่ได้จากโปรแกรมอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_m((1+3p)\epsilon_i + (2-3p)\epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$$

$$= \frac{\epsilon_m \epsilon_i + 3p\epsilon_m \epsilon_i + 2\epsilon_m \epsilon_m - 3p\epsilon_m \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$$

$$= \frac{\epsilon_m(\epsilon_i + 2\epsilon_m) + 3p\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$$

$$\therefore \epsilon_e = \epsilon_m + \frac{3p\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \quad \text{ซึ่งตรงกับค่า } \epsilon_e \text{ ตามสมการ (3.21)}$$

พิจารณาค่าคงที่ไดอิเล็กทริกยังผล จากสมการ (3.21) และค่าที่ได้จากการคำนวณของโปรแกรม

$$\epsilon_e = \epsilon_m + \frac{3p\epsilon_m(\epsilon_i - \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} = \epsilon_m + 3p\epsilon_m \left( \frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right)$$

จาก  $b = \frac{\epsilon_m - \epsilon_i}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$  จะได้ว่า

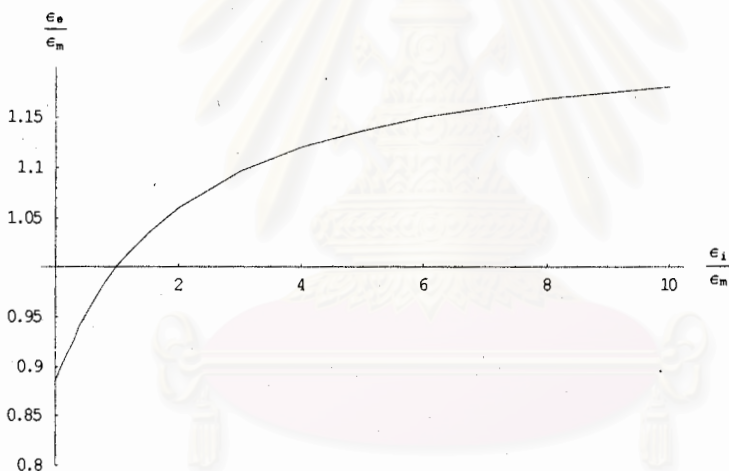
$$\epsilon_e = \epsilon_m + 3p\epsilon_m(-b) = \epsilon_m - 3bp\epsilon_m$$

หรือ  $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1 - 3bp$

จากผลการคำนวณของโปรแกรมพบว่า ค่า  $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$  คือค่าฟังก์ชันนัลพลังงาน ณ ตำแหน่งที่มี

ค่าต่ำสุด เมื่อพิจารณาจากหลักการแปรผันนั่นเอง หากพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า  $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$

และค่า  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  โดยเขียนในรูปแบบของกราฟ จะได้กราฟดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า  $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$  และค่า  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$

จากกราฟเห็นได้ว่า ที่  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} < 1$  (เมื่อค่าคงที่ไดอิเล็กทริกของ inclusion น้อยกว่า host )

พบว่าเมื่อเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงค่า  $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$  เมื่อเปลี่ยนค่า  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  จะมีการเปลี่ยนแปลงได้มาก

กว่าในกรณีที่พิจารณาที่  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} > 1$  (เมื่อค่าคงที่ไดอิเล็กทริกของ inclusion มากกว่า host ) หรือ

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันนัลพลังงาน ในกรณีที่ค่าคงที่ของไดอิเล็กทริกของ inclusion มากกว่า host

พบว่าฟังก์ชันนัลพลังงานจะไม่แตกต่างกันมากนัก แม้ว่าจะเพิ่มค่าอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ก็ตามเมื่อ



ค่าอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 1$  เป็นกรณีที่ inclusion และ host เปรียบเสมือนเป็นตัวกลางเนื้อเดียวกัน (homogeneous) ซึ่งจากโปรแกรมแสดงให้เห็นว่า เมื่ออยู่ในสภาวะนี้ ค่าของพารามิเตอร์  $b$  จากการคำนวณการแปรผันพลังงานตามโปรแกรม จะมีค่าเป็นศูนย์ ( $b = 0$ ) เมื่อนำไปแทนในสมการค่าศักย์เริ่มต้น (3.12) และ (3.13) จะได้ผลดังนี้คือ

$$\text{จาก } \Phi_i(r, \theta) = cE_0 r \cos \theta$$

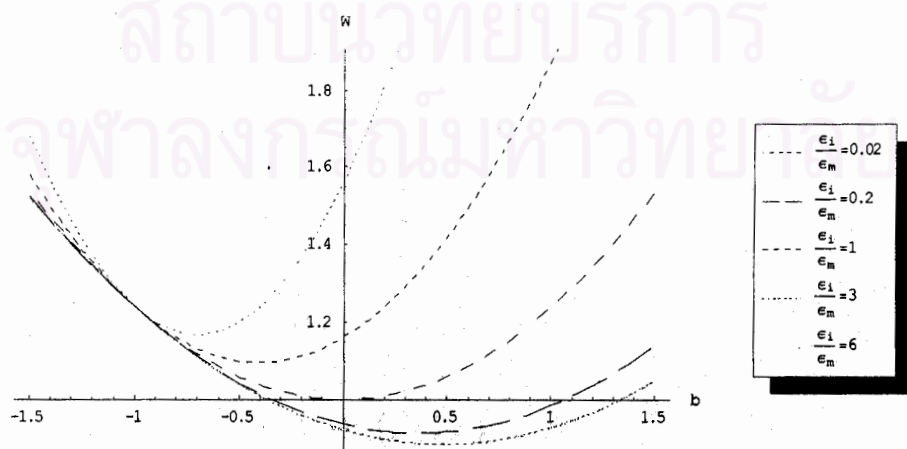
$$\text{จะได้ว่า } \Phi_i(r, \theta) = (1+b)E_0 r \cos \theta = E_0 r \cos \theta \quad \dots (3.22)$$

$$\text{และ } \Phi_m(r, \theta) = E_0 r \cos \theta + bE_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta$$

$$\text{จะได้ว่า } \Phi_m(r, \theta) = E_0 r \cos \theta \quad \dots (3.23)$$

จากสมการที่ (3.22) และ (3.23) แสดงให้เห็นว่าเมื่อพิจารณากรณีที่  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 1$  ค่าศักย์ทั้งในและนอกทรงกลม (inclusion และ host) จะมีรูปแบบเดียวกันนั่นเองหรือที่ผิวรอยต่อระหว่าง ในและนอกทรงกลม ( $r = a$ ) มีค่าศักย์ไฟฟ้าต่อเนื่องกันนั่นเอง

สิ่งที่พิจารณาต่อมา คือ กราฟระหว่างค่าฟังก์ชันพลังงาน ( $W$ ) และพารามิเตอร์  $b$  ที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มีค่าต่าง ๆ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3 กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง  $W$  และ  $b$  ที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  เป็น 0.02, 0.2, 1, 3, 6

โดยเส้นกราฟที่แสดงนั้นเรียงจากเส้นล่างไปเส้นบน ตามลำดับ



กราฟที่ได้เป็นกราฟโค้งหงาย แสดงให้เห็นว่าค่าฟังก์ชันนำพลังงานในกรณีที่พิจารณานี้ สามารถคำนวณหาค่าที่เป็นค่าต่ำสุดได้ ซึ่งสอดคล้องกับวิธีการแปรผันพลังงานที่อาศัยสมบัติของการแปรผันของฟังก์ชันนำที่ต้องการกับพารามิเตอร์ เพื่อให้ได้ค่าฟังก์ชันนำมีค่าน้อยที่สุด

ค่าฟังก์ชันนำพลังงานที่เปลี่ยนไปตามพารามิเตอร์  $b$  เมื่อพิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ต่างกัน จะมีลักษณะแตกต่างกันแม้ว่าจะมีรูปแบบกราฟเป็นโค้งหงายเหมือนกัน คือ เมื่อพิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  น้อย รูปกราฟจะเป็นรูปโค้งที่มีความกว้างมากกว่า ที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มาก แสดงให้เห็นว่าค่าอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ส่งผลให้ฟังก์ชันนำพลังงานมีการเปลี่ยนแปลงไปได้แตกต่างกัน กล่าวคือ ที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มาก ค่าฟังก์ชันนำพลังงานจะเปลี่ยนแปลงได้มากกว่ากรณีที่พิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  น้อย เมื่อเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์  $b$

เมื่อเปรียบเทียบในกรณีที่พิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ต่าง ๆ กัน พบว่า ค่าฟังก์ชันนำพลังงานต่ำแหน่งต่ำที่สุดที่กรณีที่มีค่าอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  น้อย จะมีค่าต่ำกว่า ในกรณีที่มีค่าอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มาก สังเกตได้จากเส้นกราฟจากรูปที่ 3.2 ที่ค่าอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มีค่าน้อย จะโค้งต่ำกว่าในกรณีที่มีค่าอัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มาก และจากเส้นกราฟเห็นได้ว่าตำแหน่งที่ฟังก์ชันนำพลังงานต่ำสุด ค่าพารามิเตอร์  $b$  ก็แตกต่างกันเมื่อพิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ต่าง ๆ กล่าวคือ เมื่อพิจารณาในกรณีที่  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} < 1$  พบว่าค่าพารามิเตอร์  $b$  เป็นบวก เมื่อพิจารณาในกรณีที่  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} > 1$  พบว่าค่าพารามิเตอร์  $b$  เป็นลบ

เมื่อพิจารณาส่วนประกอบแนวตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า ( $D_n$ ) ที่ผิวรอยต่อระหว่าง inclusion และ host ( $r = a$ ) พบว่า ค่า  $D_n$  จากวิธีการแปรผันพลังงานตามโปรแกรมใน 2 บริเวณมีรูปแบบดังนี้

$$D_{in}(r = a) = \epsilon_i(1 + b)\cos\theta \quad \dots (3.24)$$

$$D_{mn}(r = a) = \epsilon_m(1 - 2b)\cos\theta \quad \dots (3.25)$$

สมการ (3.24) หาร ด้วยสมการ (3.25) จะได้ว่า

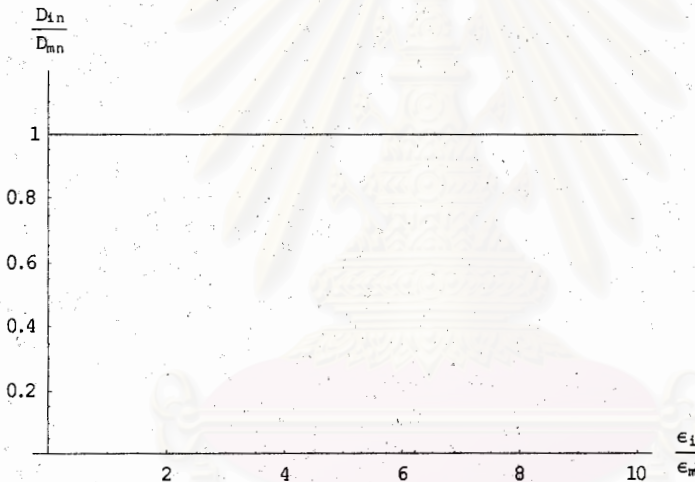
$$\frac{D_{in}}{D_{mn}} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} \left( \frac{1+b}{1-2b} \right) \quad \dots (3.26)$$

จากสมการที่ (3.26) อัตราส่วนของ  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  จะเป็นค่าที่กำหนดความต่อเนื่องของส่วน

ประกอบแนวตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อ กล่าวคือ ถ้า  $\frac{D_{in}}{D_{mn}} = 1$  นั้น

หมายความว่า  $D_n$  ต่อเนื่องที่ผิวรอยต่อนั่นเอง และจากสมการที่ (3.26) แสดงว่าความต่อเนื่องของ  $D_n$  ไม่ขึ้นกับค่ามุม  $\theta$  และเมื่อแทนค่าพารามิเตอร์  $b$  ที่อัตราส่วน  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  มีค่าต่าง ๆ แล้วนำมา

เขียนกราฟระหว่างอัตราส่วนของ  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  กับ  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  จะได้ดังนี้



รูปที่ 3.4 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  กับ  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ค่าต่าง ๆ

จากรูปที่ 3.4 แสดงให้เห็นว่า ค่าอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  มีค่าประมาณ 1 ( $\frac{D_{in}}{D_{mn}} \approx 1$ ) เมื่อ

พิจารณาในทุก ๆ ค่า  $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  ด้วยเหตุนี้จึงกล่าวได้ว่าที่ผิวรอยต่อระหว่าง inclusion และ host ค่าของส่วนประกอบตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าภายในทรงกลม ( $D_{in}$ ) จะต่อเนื่องกับส่วนประกอบแนวตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าภายนอกทรงกลม ( $D_{mn}$ )

จึงสรุปได้ว่าโปรแกรมที่เขียนขึ้นมาี้ มีความแม่นยำเมื่อพิจารณาในกรณีตัวกลางแบบเชิงเส้น และจะได้นำโปรแกรมดังกล่าวนี้ไปประยุกต์ใช้ในตัวกลางไม่เชิงเส้นแบบเข้ม และในปัญหาที่ซับซ้อนอื่น ๆ ต่อไป

## บทที่ 4

### ปัญหาค่าขอบของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวไม่เชิงเส้นแบบเข้ม

ในบทนี้ได้ศึกษาปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต ของทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวไม่เชิงเส้นแบบเข้ม โดยได้นำโปรแกรมที่ใช้ในการแก้ปัญหกรณที่พิจารณาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวแบบเชิงเส้น ในบทที่แล้วมาประยุกต์ด้วยการแก้ไขขั้นตอนการคำนวณโดยพิจารณาใช้ศักย์ทดลองอย่างง่าย และพิจารณาเพิ่มเติมโดยใช้ศักย์ทดลองแบบเพิ่มพารามิเตอร์ให้มากขึ้น เพื่อทดสอบผลของการเพิ่มพารามิเตอร์ในค่าศักย์ทดลองเริ่มต้น แล้วจึงวิเคราะห์ความถูกต้องของโปรแกรมอีกครั้งหนึ่ง เพื่อจะได้นำไปประยุกต์ ในปัญหาที่ซับซ้อนกว่ากรณีนี้ต่อไป

#### 4.1 ปัญหาค่าขอบไดอิเล็กทริกทรงกลมเดี่ยวไม่เชิงเส้นแบบเข้ม

ไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น เป็นวัสดุที่มีสมบัติทางไฟฟ้าแตกต่างจากไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นที่พิจารณาในบทที่แล้ว กล่าวคือ ถ้าเป็นไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น ค่าการกระจัดทางไฟฟ้าจะแปรผันตรงกับค่าสนามไฟฟ้าในอันดับที่ 1 หรือ  $\bar{D} \propto \bar{E}$  แต่ในกรณีที่เป็นไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น ค่าการกระจัดทางไฟฟ้าจะมีความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนกว่ากรณีแรก ในที่นี้ศึกษากรณีที่มีการกระจัดทางไฟฟ้าและสนามไฟฟ้ามีความสัมพันธ์กันดังนี้ คือ  $\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \chi |\bar{E}|^2 \bar{E}$

ในกรณีที่  $\chi |\bar{E}|^2 \gg \epsilon$  ทำให้พจน์ที่ 2 ด้านขวามือมีความสำคัญ (อิทธิพล) มากกว่าพจน์แรกจึงละพจน์แรกไว้ไม่ต้องพิจารณา หรือประมาณได้ว่า

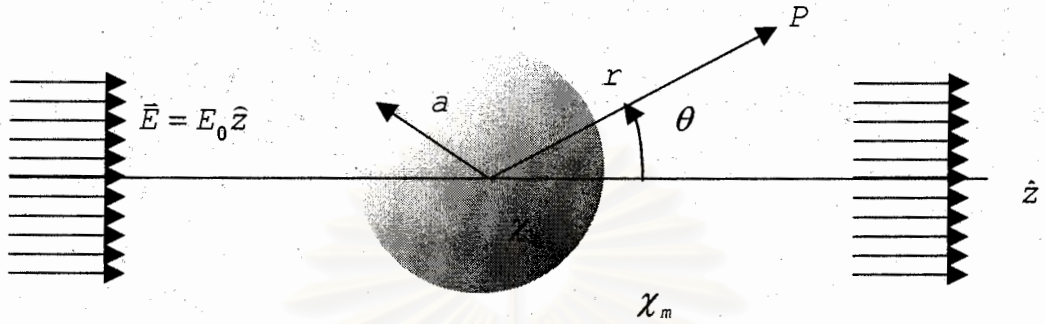
$$\bar{D} \cong \chi |\bar{E}|^2 \bar{E} \quad \dots (4.1)$$

วัสดุที่มีสมบัติแบบนี้เรียกว่า "ไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นแบบเข้ม" คือ พจน์ที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นมีความสำคัญมากกว่าพจน์ที่มีความเป็นเชิงเส้นนั่นเอง

ฟังก์ชันนำพลังงานของกรณีพิจารณาในไดอิเล็กทริกชนิดนี้ [8] เป็นดังนี้ คือ

$$W = \frac{1}{4} \int \chi |\nabla \Phi|^4 d\tau + W_s \quad \dots (4.2)$$

ในที่นี้พิจารณาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวเป็น inclusion มีค่าสภาพรับได้ทางไฟฟ้า  $\chi_i$  รัศมี  $a$  ปริมาตร  $\Omega_i$  วางอยู่ในตัวกลาง host อีกชนิดหนึ่งซึ่งมีค่าสภาพรับได้ทางไฟฟ้าเป็น  $\chi_m$  รัศมี  $R$  ปริมาตร  $V$  ซึ่งมีขนาดใหญ่กว่า  $\Omega_i$  มาก ทั้งระบบอยู่ภายในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$  ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 แสดงแบบจำลองของปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว ที่อยู่ภายในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$

#### 4.2 วิธีแปรผันพลังงานโดยใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองอย่างง่าย ( simple trial potential )

ฟังก์ชันศักย์ทดลองที่ใช้ในที่นี้ เป็นค่าฟังก์ชันศักย์ทดลองอย่างง่าย [8] ที่มีรูปแบบเหมือนกับฟังก์ชันศักย์ทดลองที่ใช้ในปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น คือ

$$\Phi_i(r, \theta) = c E_0 r \cos \theta \quad \dots (4.3)$$

$$\Phi_m(r, \theta) = E_0 r \cos \theta + b \frac{a^3}{r^2} E_0 \cos \theta \quad \dots (4.4)$$

โดย  $\Phi_i(r, \theta)$  เป็นศักย์ทดลองเมื่อพิจารณาในไดอิเล็กทริกทรงกลม ( $r < a$ )

$\Phi_m(r, \theta)$  เป็นศักย์ทดลองเมื่อพิจารณานอกไดอิเล็กทริกทรงกลม ( $r > a$ )

$c$  และ  $b$  เป็นพารามิเตอร์ของฟังก์ชัน

และเช่นเดียวกันกับในบทที่ 3 คือ เมื่อพิจารณาจากเงื่อนไขขอบ

$$\Phi_i(r = a) = \Phi_m(r = a)$$



ทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $c$  และ  $b$  คือ

$$c = 1 + b$$

หลังจากที่เลือกฟังก์ชันศักย์ทดลองเรียบร้อยแล้ว จึงนำฟังก์ชันศักย์นั้นมาคำนวณหาค่าฟังก์ชันนำพลังงาน เพื่อนำฟังก์ชันนำพลังงานดังกล่าวไปคำนวณการแปรผันต่อไป โดยค่าฟังก์ชันนำพลังงานที่จะคำนวณต่อไปนี้ได้แบ่งพิจารณาเป็นฟังก์ชันนำพลังงานภายในทรงกลม , ฟังก์ชันนำพลังงานภายนอกทรงกลม และพลังงานตามพื้นผิว ดังนี้

$$W = \frac{1}{4} \int_V \chi_i |\nabla \Phi_i|^4 d\tau + \frac{1}{4} \int_V \chi_m |\nabla \Phi_m|^4 d\tau + W_s \quad \dots (4.5)$$

$$W = \frac{1}{4} \left[ \int_V \chi_i |\nabla \Phi_i|^4 d\tau + \int_V \chi_m |\nabla \Phi_m|^4 d\tau + 4W_s \right]$$

$$W = \frac{1}{4} [W_1 + W_2 + 4W_s]$$

โดยที่  $d\tau = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$  เป็นปริมาตรของบริเวณที่พิจารณา

จากนั้นจึงใช้โปรแกรมที่เขียนขึ้นเพื่อคำนวณค่าฟังก์ชันนำพลังงาน โดยใช้ฟังก์ชันศักย์ที่เลือกมา แล้วจึงนำฟังก์ชันนำพลังงานมาพิจารณาตามวิธีการแปรผันพลังงาน ดังนั้นจึงสามารถสรุปขั้นตอนของการเขียนโปรแกรมเพื่อแก้ไขปัญหาค่าขอบของไดอิเล็กทริกทรงกลมเดี่ยวไม่เชิงเส้นแบบเข้ม มีดังนี้

1. เลือกฟังก์ชันศักย์ทดลองโดยแบ่งพิจารณาใน 2 บริเวณ คือ ศักย์ภายในและภายนอกทรงกลม ในที่นี้ใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองอย่างง่ายจากสมการ (4.3) และ (4.4) ตามลำดับ
2. คำนวณค่า  $\nabla \Phi$  เพื่อแทนหาค่า  $E$  จากความสัมพันธ์  $E = -\nabla \Phi$
3. คำนวณหาค่าฟังก์ชันนำพลังงาน จากสมการ (4.5) คือ

$$W = \frac{1}{4} \int_V \chi_i |\nabla \Phi_i|^4 d\tau + \frac{1}{4} \int_V \chi_m |\nabla \Phi_m|^4 d\tau + W_s$$

4. ทำการแปรผันพลังงานเพื่อหาค่า  $b$  ที่ทำให้ฟังก์ชันนำพลังงานรวมมีค่าต่ำสุด หรือ

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 0$$

นอกจากนี้ โปรแกรมนี้จะเปรียบเทียบผลของขนาด  $\chi_i, \chi_m$  ที่มีต่อค่าฟังก์ชันนำพลังงาน และความต่อเนื่องของส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัด ตามเงื่อนไขขอบของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต เพื่อทดสอบความแม่นยำตรงของการคำนวณอีกด้วย

#### 4.3 วิธีแปรผันพลังงานโดยใช้ฟังก์ชันศักย์ที่ปรับปรุง

ฟังก์ชันศักย์ทดลองปรับปรุงที่ใช้ในที่นี้ เป็นค่าฟังก์ชันศักย์ที่ยังคงเค้าโครงเหมือนกับค่าศักย์ที่เป็นผลเฉลยของสมการลาปลาซ ซึ่งอยู่ในรูปของพหุนามของเลอจอง (Legendre polynomial) โดยขั้นตอนการคำนวณได้เพิ่มเทอมที่มีพารามิเตอร์  $b_{ij}$  ลงในฟังก์ชัน  $\Phi_m$  เพื่อใช้เริ่มต้นสำหรับการคำนวณหาค่าฟังก์ชันนำพลังงาน คือ

$$\Phi_m = E_0 r \cos \theta + \sum b_{ij} a^{(j+1)} r^{-j} P_j(\cos \theta)$$

ในที่นี้เลือกเพิ่มพารามิเตอร์  $b_{32}$  และ  $b_{34}$  ในฟังก์ชันศักย์ทดลองดังต่อไปนี้

$$\Phi_1(r, \theta) = c_{11} E_0 r \cos \theta \quad \dots (4.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_m(r, \theta) = & E_0 r \cos \theta + b_{12} \frac{a^3}{r^2} E_0 \cos \theta \\ & + \left( b_{34} \frac{a^5}{r^4} + b_{32} \frac{a^3}{r^2} \right) E_0 \left( \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \right) \quad \dots (4.7) \end{aligned}$$

จากนั้นจึงนำค่าฟังก์ชันศักย์ที่เลือกมานี้มาคำนวณหาค่าฟังก์ชันพลังงาน และนำฟังก์ชันนำพลังงานไปคำนวณตามหลักการแปรผันต่อไป ขั้นตอนในการคำนวณด้วยโปรแกรมคล้ายคลึงกับขั้นตอนในการพิจารณาโดยใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองอย่างง่าย แต่จะใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองเบื้องต้นในการคำนวณแตกต่างกันนั่นเอง

#### 4.4 ผลจากการคำนวณของโปรแกรม

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาโปรแกรมที่ช่วยในการคำนวณในการแก้ปัญหา ซึ่งที่ใช้ในบทนี้มี 2 โปรแกรม คือ trial strongly nonlinear.nb ซึ่งพิจารณาโดยใช้ค่าศักย์ทดลองอย่างง่าย (4.3 – 4.4) และ c11b12b32b34.nb ซึ่งใช้ค่าศักย์ทดลองที่เพิ่มพารามิเตอร์ (4.6 – 4.7) (ดูภาคผนวก ก และ จ)

เมื่อเปรียบเทียบความซับซ้อนของปัญหา โปรแกรมที่สองซึ่งมีการเพิ่มพารามิเตอร์ย่อมมีความยุ่งยากซับซ้อนของปัญหามากกว่า โดยเทียบกันได้จากค่าฟังก์ชันพลังงานจากการคำนวณของทั้งสองโปรแกรมซึ่งมีความแตกต่างกัน ดังนี้

กรณีที่ใช้พิจารณาค่าศักย์ทดลองอย่างง่าย

$$W \sim V e_0^4 X_m + c^4 e_0^4 X_i \Omega_i - 4 b e_0^4 X_m \Omega_i + \frac{1}{5} (-5 + 36 b^2 - 8 b^3 + 8 b^4) e_0^4 X_m \Omega_i$$

กรณีที่ใช้พิจารณาค่าศักย์ทดลองที่เพิ่มพารามิเตอร์

$$\begin{aligned} W \sim & V X_m + c11^4 X_i \Omega_i + \\ & \left( -1 + \frac{8 b12^4}{5} + \frac{11728 b32^4}{5005} + \frac{136 b34^2}{21} - \frac{144 b34^3}{77} + \frac{6336 b34^4}{1547} + \frac{8}{385} b12^3 (-77 + 88 b32 + 108 b34) + \right. \\ & \frac{16 b32^3 (-143 + 32172 b34)}{55055} + \frac{16 b32 b34 (2431 - 585 b34 + 2328 b34^2)}{3003} + \\ & \left. \frac{16 b32^2 (321607 - 54756 b34 + 564462 b34^2)}{585585} + \right. \\ & \left. b12^2 \left( \frac{6512 b32^2}{945} + b32 \left( -\frac{24}{5} + \frac{18176 b34}{1155} \right) + \frac{4 (2457 - 2106 b34 + 3512 b34^2)}{1365} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{495495} \right. \\ & \left. (16 b12 (73788 b32^3 + 2145 b34^2 (-77 + 72 b34) + 13 b32^2 (-847 + 20088 b34) + \right. \\ & \left. 33 b32 (-2574 - 4433 b34 + 10116 b34^2))) \right) X_m \Omega_i - 4 b12 e_0^4 X_m \Omega_i \end{aligned}$$

เห็นได้ว่าค่าฟังก์ชันพลังงานในกรณีที่ใช้ฟังก์ชันศักย์แบบเพิ่มพารามิเตอร์ (ในกรณีที่ 2) มีความซับซ้อนมากกว่ากรณีที่ใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองอย่างง่าย สิ่งก็ตามมาคือ การคำนวณย่อมจะยุ่งยากเพิ่มขึ้นด้วย ทำให้การคำนวณอาจจะใช้เวลานานมากขึ้นด้วย

เมื่อพิจารณาค่าฟังก์ชันพลังงานในกรณีที่ใช้ค่าศักย์ทดลองอย่างง่าย

$$W \sim X_m E_0^4 V + X_i E_0^4 c^4 \Omega_i + \left( -1 - 4b + \frac{36}{5} b^2 - \frac{8}{5} b^3 + \frac{8}{5} b^4 \right) E_0^4 X_m \Omega_i$$



$$W \sim \left[ \chi_m + \chi_i c^4 \frac{\Omega_i}{V} + \left( -1 - 4b + \frac{36}{5}b^2 - \frac{8}{5}b^3 + \frac{8}{5}b^4 \right) \chi_m \frac{\Omega}{V} \right]_i E_0^4 V$$

กำหนดให้  $p = \frac{\Omega_i}{V}$  เป็นอัตราส่วนระหว่างปริมาตร inclusion และ host

$$W \sim \left[ \chi_m + p\chi_i c^4 + \left( -1 - 4b + \frac{36}{5}b^2 - \frac{8}{5}b^3 + \frac{8}{5}b^4 \right) p\chi_m \right]_i E_0^4 V$$

เมื่อพิจารณาเพื่อหาค่า  $b$  จากเงื่อนไขของการแปรผัน

$$\frac{\partial W}{\partial b} = 0$$

จะได้ค่า  $b$  ซึ่งขึ้นกับอัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  ซึ่งในโปรแกรมกำหนดให้  $\frac{\chi_i}{\chi_m} = y$  ดังนี้

$$\frac{4}{5}p(-5 + 18b - 6b^2 + 8b^3 + 5y + 15by + 15b^2y + 5b^3y) = 0$$

$$(-5 + 5y) + (18 + 15y)b + (-6 + 15y)b^2 + (8 + 5y)b^3 = 0$$

$$5(-1 + y) + 3(6 + 5y)b + 3(-2 + 5y)b^2 + (8 + 5y)b^3 = 0$$

เอา  $-1$  คูณตลอดทั้งสมการ จะได้ว่า

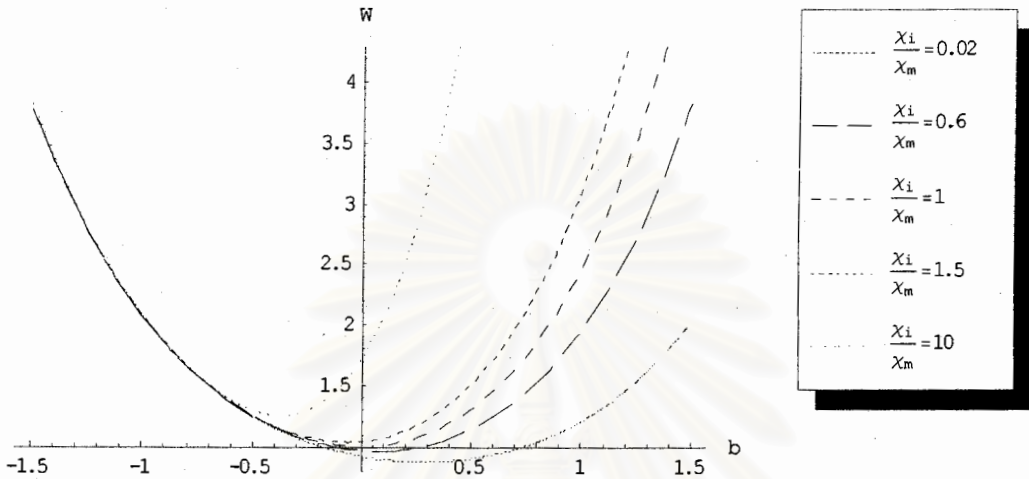
$$5(1 - y) - 3(6 + 5y)b + 3(2 - 5y)b^2 - (8 + 5y)b^3 = 0 \quad \dots (4.8)$$

สมการที่ (4.8) เป็นรูปแบบของความสัมพันธ์ของพหุนามดีกรี 3 ที่ขึ้นกับค่าอัตราส่วน

$\frac{\chi_i}{\chi_m}$  ซึ่งพบได้ในหลายบทความ [3, 8]

เมื่อพิจารณาในกรณีที่ใช้ค่าศักย์ทดลองอย่างง่าย ค่าฟังก์ชันนำพลังงานจะเปลี่ยนไปตามพหุนามดีกรี 3 และตามอัตราส่วนของ  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  ซึ่งเมื่อนำมาเขียนกราฟโดยแกนนตั้งเป็นค่าฟังก์ชันนำ

พลังงานและแกนนอนเป็นค่าพารามิเตอร์  $b$  โดยเส้นกราฟแต่ละเส้นแสดงกรณีที่พิจารณาในอัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.2 กราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง  $W$  และ  $b$  ในกรณีที่ใช้ศักย์ทดลองอย่างง่าย ที่อัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  เป็น 0.02, 0.6, 1, 1.5, 10 โดยเส้นกราฟที่แสดงนั้นเรียงจากขวา มาซ้าย ตามลำดับ

จากรูปที่ 4.2 จะเห็นได้ว่ากราฟเป็นกราฟโค้งหงาย เช่นเดียวกับในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางแบบเชิงเส้นแสดงให้เห็นว่าค่าฟังก์ชันนำพลังงานในกรณีที่พิจารณานี้สามารถคำนวณหาค่าที่เป็นค่าต่ำสุดได้จึงสามารถใช้หลักการแปรผันในการหาผลเฉลยได้

และเช่นเดียวกับที่พิจารณาในตัวกลางแบบเชิงเส้น คือ พบว่าค่าฟังก์ชันนำพลังงานที่เปลี่ยนแปลงไปตามพารามิเตอร์  $b$  เมื่อพิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  ต่างกัน จะมีลักษณะแตกต่างกัน

แม้ว่าจะมีรูปแบบกราฟเป็นโค้งหงายเหมือนกัน คือเมื่อพิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  น้อย รูปกราฟ

จะเป็นรูปโค้งที่มีความกว้างมากกว่า ที่อัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  มาก แสดงให้เห็นว่า ค่าอัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  สูง

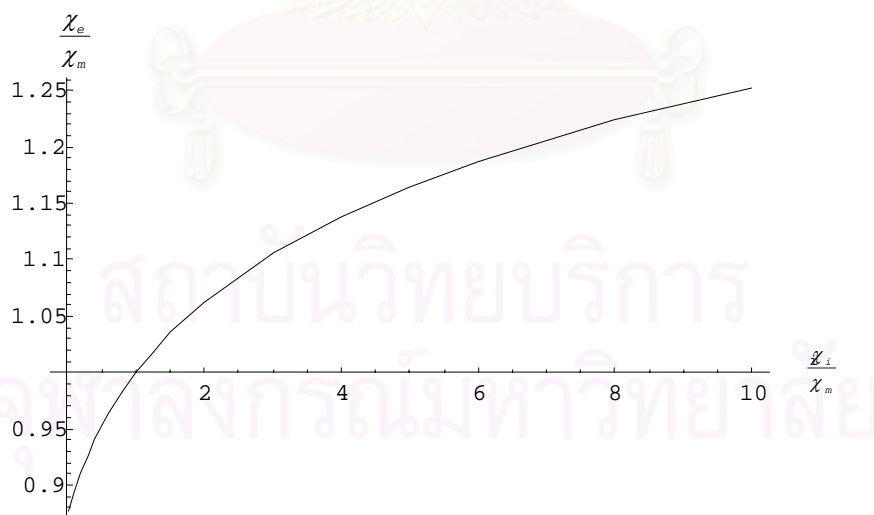
ผลให้ฟังก์ชันนำพลังงานมีการเปลี่ยนแปลงไปได้แตกต่างกัน กล่าวคือ ที่อัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  มาก

ค่าฟังก์ชันนำพลังงานจะเปลี่ยนแปลงได้มากกว่ากรณีที่พิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{x_i}{x_m}$  น้อย เมื่อ

เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์  $b$

และในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาในตัวกลางแบบเชิงเส้น เมื่อเปรียบเทียบในกรณีที  
พิจารณา ที่อัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  ต่าง ๆ กัน พบว่า ค่าฟังก์ชันนำพลังงาน ณ ตำแหน่งต่ำที่สุดที่กรณีที่มีค่า  
อัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  น้อยจะมีค่าต่ำกว่า ในกรณีที่มีค่าอัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  มาก สังเกตได้จากเส้นกราฟจาก  
รูปที่ 4.2 ที่ค่าอัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  มีค่าน้อยจะโค้งต่ำกว่าในกรณีที่มีค่าอัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  มาก และจาก  
เส้นกราฟเห็นได้ว่าตำแหน่งที่ฟังก์ชันนำพลังงานต่ำสุด ค่าพารามิเตอร์  $b$  ก็แตกต่างกันเมื่อ  
พิจารณาที่อัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  เช่นกัน กล่าวคือ เมื่อพิจารณาในกรณีที่  $\frac{\chi_i}{\chi_m} < 1$  พบว่าค่า  
พารามิเตอร์  $b$  เป็นบวก เมื่อพิจารณาในกรณีที่  $\frac{\chi_i}{\chi_m} > 1$  พบว่าค่าพารามิเตอร์  $b$  เป็นลบ

เมื่อพิจารณาจากการแปรผันเพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชันนำพลังงานมีค่าต่ำที่สุด  
โดยเปรียบเทียบฟังก์ชันนำพลังงานที่ต่ำที่สุด ซึ่งฟังก์ชันนำพลังงานที่ได้จากขั้นตอนของการแปรผัน  
จากโปรแกรมคือ ค่า  $\frac{\chi_e}{\chi_m}$  นั้นเอง โดยทั้งกรณีที่ใช้ฟังก์ชันศักย์แบบง่าย และแบบเพิ่มพารามิเตอร์ มี  
ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\frac{\chi_e}{\chi_m}$  และ  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  ในลักษณะเช่นเดียวกัน เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ดังกล่าว  
นำมาเขียนในรูปแบบของกราฟ จะได้กราฟมีลักษณะดังนี้



รูปที่ 4.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $\frac{\chi_e}{\chi_m}$  และ  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$

จากกราฟเห็นได้ว่าที่  $\frac{\chi_i}{\chi_m} < 1$  (เมื่อค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าของ inclusion น้อยกว่า host )

พบว่าเมื่อเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงค่า  $\frac{\chi_e}{\chi_m}$  เมื่อเปลี่ยนค่า  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  จะมีการเปลี่ยนแปลงได้มาก

กว่าในกรณีที่พิจารณาที่  $\frac{\chi_i}{\chi_m} > 1$  (เมื่อค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าของ inclusion มากกว่า host )

หรือเมื่อพิจารณาฟังก์ชันนำพลังงาน ในกรณีที่ค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าของ inclusion มากกว่า host

พบว่าฟังก์ชันนำพลังงานจะไม่แตกต่างกันมากนัก แม้ว่าจะเพิ่มค่าอัตราส่วน  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  ก็ตาม

เมื่อพิจารณาโดยใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองที่มีพารามิเตอร์แตกต่างกัน ฟังก์ชันนำพลังงานที่ได้ ย่อมแตกต่างกันด้วย ในที่นี้ได้ทดลองแทนพารามิเตอร์ต่าง ๆ โดย เมื่อต้องการเพิ่มพารามิเตอร์  $b_{ij}$  ใน ขั้นตอนการคำนวณต้องเพิ่มเทอมที่มีพารามิเตอร์  $b_{ij}$  นี้ คือ  $b_{ij} a^{(j+1)} r^{-j} P_j(\cos \theta)$  ที่ฟังก์ชัน  $\Phi_m$  ค่าฟังก์ชันนำพลังงาน ณ ตำแหน่งที่มีค่าน้อยที่สุด ( $W_{Min}$ ) ได้ผลดังตารางดังนี้

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าฟังก์ชันนัลพลังงานที่ได้จากการคำนวณการแปรผันในกรณีที่ใช้ฟังก์ชันศักย์ทดลองอย่างง่าย ( $c_{11}, b_{12}$ ) และแบบเพิ่มพารามิเตอร์ เป็น  $c_{11}, b_{12}, b_{32}, b_{34}$

$\frac{\chi_i}{\chi_m}$	$w_{Min}(c_{11}, b_{12})$	$w_{Min}(c_{11}, b_{12}, b_{32}, b_{34})$
0.02	0.877826	0.873
0.1	0.893944	0.890467
0.2	0.911363	0.909038
0.3	0.926546	0.925003
0.4	0.940039	0.939039
0.6	0.96329	0.962932
0.8	0.982938	0.982864
1	1	1
1.2	1.01511	1.01505
1.5	1.03498	1.03469
2	1.06275	1.06186
3	1.10562	1.10326
4	1.13838	1.1345
5	1.16491	1.1596
6	1.18723	1.18058
8	1.2234	1.21435
10	1.25211	1.24096

จากตารางเห็นได้ว่า ค่าของฟังก์ชันนัลพลังงานในกรณีที่ใช้ค่าศักย์ทดลองแบบเพิ่มพารามิเตอร์ ซึ่งมีพารามิเตอร์ 4 ตัว มีค่าน้อยกว่ากรณีที่ใช้ค่าศักย์ทดลองอย่างง่ายที่มีพารามิเตอร์เพียง 2 ตัว และจากบทความของ YU [8] แสดงให้เห็นว่าเมื่อใช้พารามิเตอร์ 14 ตัว ฟังก์ชันนัลพลังงานจะน้อยกว่ากรณีที่ใช้ศักย์ทดลองอย่างง่ายอีกด้วย

เมื่อเลือกพิจารณาพารามิเตอร์อื่น ๆ จะได้ ค่าฟังก์ชันนัลพลังงาน ณ ตำแหน่งที่มีค่าน้อยที่สุด เมื่อพิจารณาที่อัตราส่วนระหว่าง  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  ในช่วงค่าที่พิจารณา แตกต่างกัน ดังตารางต่อไปนี้

$\frac{\chi_i}{\chi_m}$	Simple	C11b12 b13	C11b12 b15	C11b12 b16	C11b12 b17	C11b12 b18	C11b12 b13b15	C11b12 b31	C11b12 b32	C11b12 b33	C11b12 b34	C11b12 b32b34
0.02	0.877826	0.876759	0.876516	0.876474	0.87646	0.876464	0.87648	0.874038	0.874864	0.876288	0.877109	0.873000
0.1	0.893944	0.893407	0.893298	0.893282	0.893279	0.893283	0.893285	0.891357	0.892021	0.893033	0.893577	0.890467
0.2	0.911363	0.911131	0.911091	0.911086	0.911086	0.91109	0.911087	0.909734	0.910222	0.910878	0.911203	0.909038
0.3	0.926546	0.926448	0.926432	0.926431	0.926432	0.926434	0.926431	0.925521	0.925867	0.926287	0.926478	0.925003
0.4	0.940039	0.939998	0.939993	0.939993	0.939993	0.939994	0.939993	0.939406	0.93964	0.939902	0.940011	0.939039
0.6	0.963290	0.963285	0.963285	0.963285	0.963285	0.963285	0.963285	0.963081	0.96317	0.963257	0.963287	0.962932
0.8	0.982938	0.982938	0.982938	0.982938	0.982938	0.982938	0.982938	0.982898	0.982917	0.982933	0.82938	0.982864
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.2	1.01511	1.01511	1.01511	1.01511	1.01511	1.01511	1.01511	1.01508	1.01509	1.0151	1.01511	1.01505
1.5	1.03498	1.03498	1.03498	1.03498	1.03498	1.03498	1.03498	1.03485	1.03493	1.03497	1.03498	1.03469
2	1.06275	1.06272	1.06272	1.06272	1.06272	1.06272	1.06272	1.06238	1.06262	1.06274	1.06273	1.06186
3	1.10562	1.10546	1.10545	1.10546	1.10546	1.10547	1.10545	1.10476	1.105039	0.10562	1.10552	1.10326
4	1.13838	1.13794	1.13793	1.13795	1.13797	1.13798	1.13793	1.1371	1.13811	1.13836	1.1381	1.13450
5	1.16491	1.16413	1.16412	1.16414	1.16417	1.16421	1.16411	1.1633	1.16464	1.16486	1.16443	1.15960
6	1.18723	1.18603	1.18602	1.18606	1.18611	1.18616	1.186	1.18534	1.18697	1.18712	1.18649	1.18058
8	1.22340	1.22126	1.22126	1.22134	1.22144	1.22153	1.22123	1.2211	1.2232	1.22312	1.22212	1.21435
10	1.25211	1.24895	1.24898	1.24910	1.24924	1.24938	1.24893	1.24951	1.25195	1.25161	1.25026	1.24096

ตารางที่ 4.2 แสดงค่า  $\frac{\chi_e}{\chi_m}$  ในกรณีทีพิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นแบบเข้ม ที่ค่า  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  มีค่าเท่ากับ 0.02 , 0.1,0.2,0.3,0.4,0.6,0.8,1,1.2,1.5,2,3,4,5,6,8,10 ตามลำดับ

จากตารางที่ 4.2 แสดงให้เห็นถึงค่าของฟังก์ชันนำพลังงานในกรณีที่ใช้พารามิเตอร์สำหรับค่าศักย์เริ่มต้นที่แตกต่างกัน ซึ่งเห็นได้ว่าแนวโน้มของค่าฟังก์ชันนำพลังงานเมื่อเพิ่มพารามิเตอร์ให้มากขึ้น คือ ค่าฟังก์ชันนำพลังงานมักลดลง แต่ก็ไม่เสมอไปขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ที่เลือกใช้ เพราะพารามิเตอร์แต่ละค่าจะทำให้ฟังก์ชันนำพลังงานลดลงได้แตกต่างกัน บางตัวก็ไม่ทำให้ค่าฟังก์ชันนำพลังงานแตกต่างจากกรณีที่ใช้ฟังก์ชันศักย์อย่างง่ายที่มีพารามิเตอร์เพียง 1 ตัว

ข้อมูลที่ได้จากการคำนวณค่าฟังก์ชันกำลังงาน ณ ตำแหน่งที่มีค่าต่ำสุดจากการแปรผัน เมื่อ

เพิ่มพารามิเตอร์ต่าง ๆ พบว่า มีแนวโน้มที่ใกล้เคียงกัน คือ เมื่อ  $\frac{X_i}{X_m}$  ใกล้เคียง 1 ค่าของ  $\frac{X_e}{X_m}$  หรือ  $W_{Min}$

จะไม่แตกต่างกันนักเมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ และเมื่อเปรียบเทียบที่ค่า  $\frac{X_i}{X_m}$  เดียวกัน พารามิเตอร์แต่

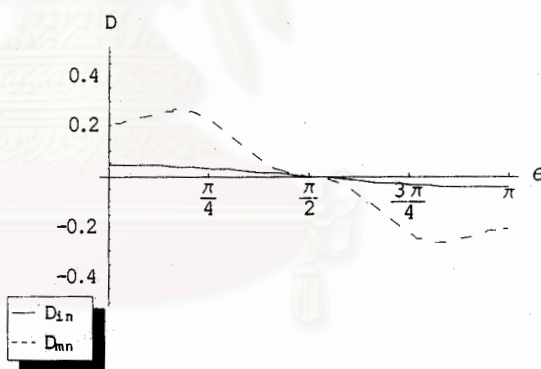
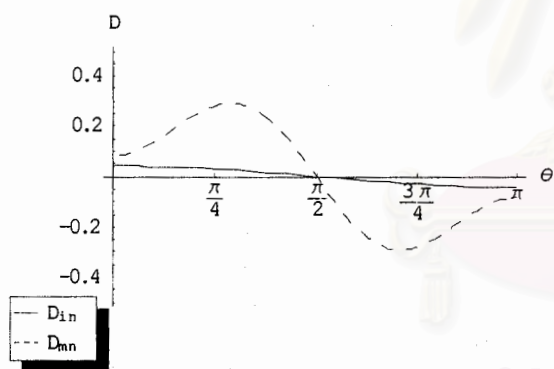
ละค่าจะให้ค่า  $W_{Min}$  ที่แตกต่างกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเพิ่มให้มีพารามิเตอร์เพิ่มมากขึ้น ค่า  $W_{Min}$  จะยังมีค่าน้อยลงมากขึ้นด้วย

จากเงื่อนไขที่ผิวของทรงกลม ( $r = a$ ) พิจารณาความต่อเนื่องของส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อ ( $D_n$ ) โดยเปรียบเทียบค่าในทรงกลม ( $D_{in}$ ) และนอกทรงกลม ( $D_{mn}$ ) เป็นดังต่อไปนี้

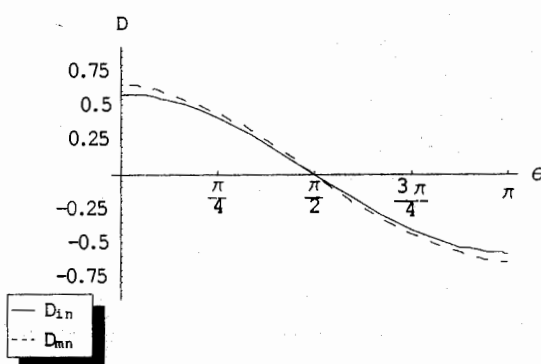
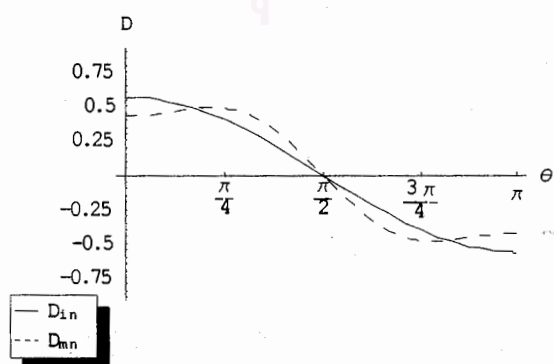
(a)

(b)

$$\frac{X_i}{X_m} = 0.02$$



$$\frac{X_i}{X_m} = 0.4$$

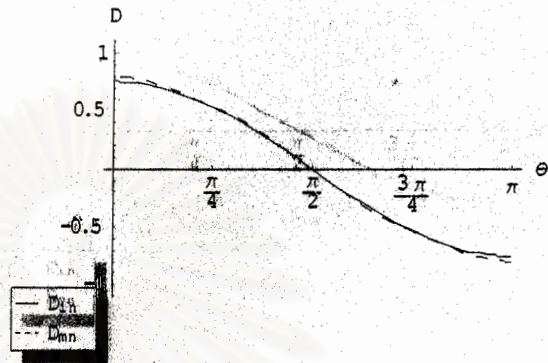
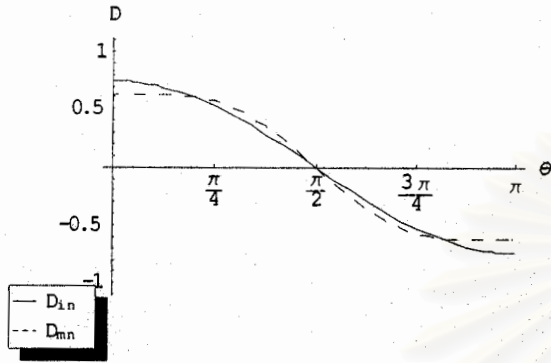




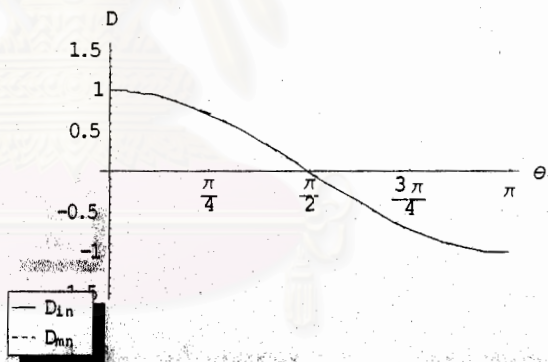
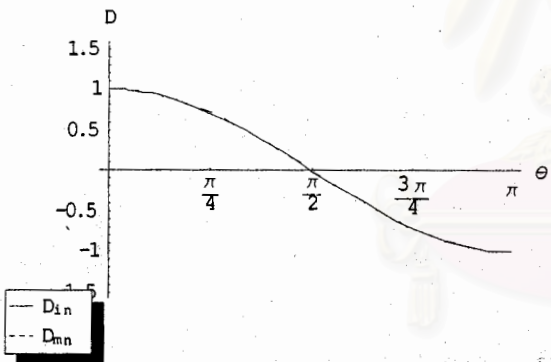
(a)

(b)

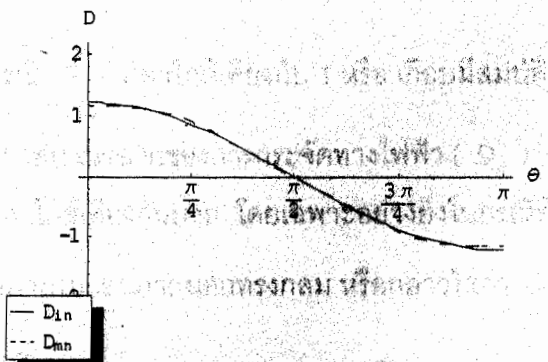
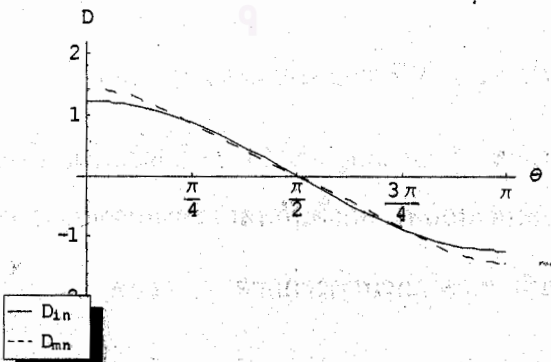
$\frac{X_i}{X_m} = 0.6$



$\frac{X_i}{X_m} = 1$



$\frac{X_i}{X_m} = 1.5$

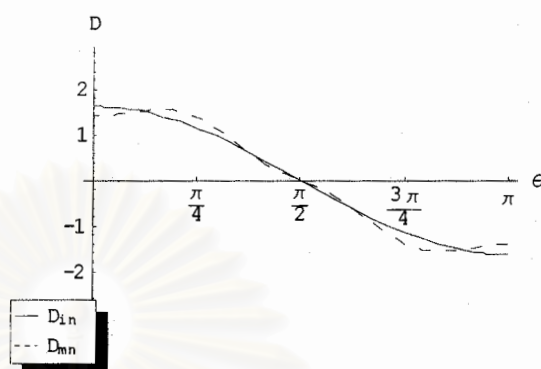
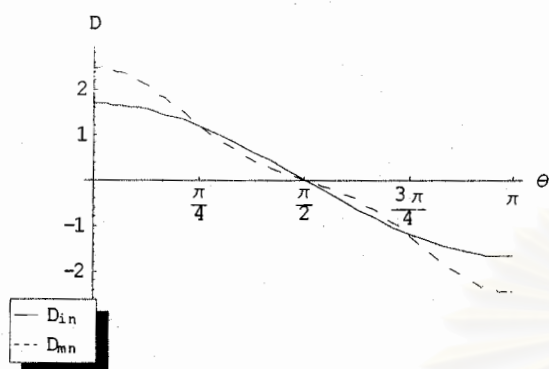


สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

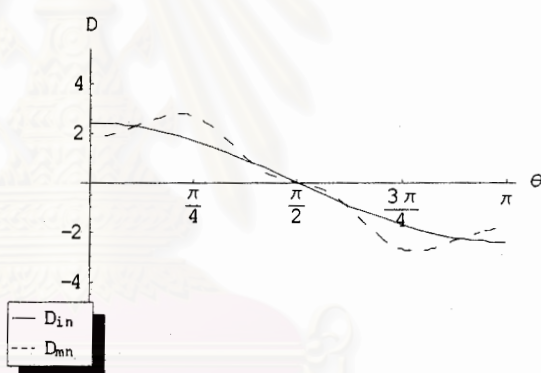
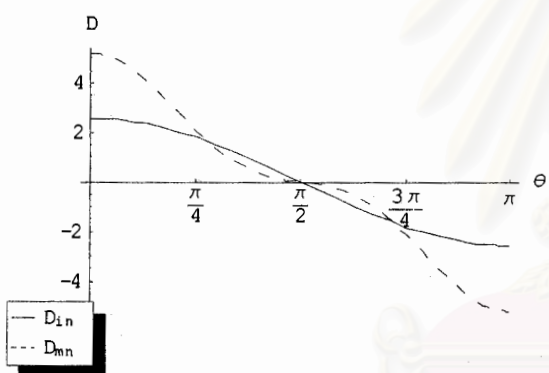
(a)

(b)

$$\frac{\chi_i}{\chi_m} = 3$$



$$\frac{\chi_i}{\chi_m} = 10$$



รูปที่ 4.4 แสดงส่วนประกอบตั้งฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าภายในทรงกลม ( $D_{in}$ ) และภายนอกทรงกลม ( $D_{mn}$ ) ที่ผิวของทรงกลม ( $r = a$ ) เมื่อ

(a) พิจารณาโดยใช้ค่าศักย์ทดลองอย่างง่าย ( $c11, b12$ )

(b) พิจารณาโดยใช้ค่าศักย์ทดลองแบบเพิ่มพารามิเตอร์ ( $c11, b12, b32, b34$ )

จากกราฟแสดงให้เห็นว่า เมื่อพิจารณาในกรณี  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  มีค่าใกล้เคียงกับ 1 หรือ เกือบมีสมบัติ

เสมือนเป็นเนื้อเดียว (homogeneous) ส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า ( $D_n$ ) ที่ผิวรอยต่อของทรงกลมกับตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่มีค่าใกล้เคียงกันมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่

$\frac{\chi_i}{\chi_m} = 1$  พบว่า  $D_n$  จากการคำนวณมีค่าเท่ากันทั้งภายในและภายนอกทรงกลม หรือกล่าวได้ว่า  $D_n$

มีค่าต่อเนื่องที่ผิวรอยต่อของทรงกลม แต่ในกรณีที่  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  มีค่าแตกต่างจาก 1 มาก ๆ คือ อาจจะมากกว่า

หนึ่งมาก ๆ หรือน้อยกว่า 1 มาก ๆ พบว่า  $D_n$  ใน 2 บริเวณที่ผิวรอยต่อมีค่าแตกต่างกันค่อนข้างมาก

สำหรับกรณี que พิจารณาโดยใช้ค่าศักย์ทดลองแตกต่างกัน พบว่าในกรณีที่ใช้ศักย์ทดลองแบบเพิ่มพารามิเตอร์จะมีค่า  $D_n$  ที่ผิวยรอยต่อทั้งข้างในและนอกทรงกลมมีค่าใกล้เคียงมากกว่าในกรณีที่ใช้ศักย์ทดลองอย่างง่าย หรืออาจกล่าวได้ว่า เมื่อเลือกใช้ศักย์ทดลองที่มีพารามิเตอร์เพิ่มขึ้น ทำให้ค่า  $D_n$  ที่ผิวยรอยต่อของทรงกลมมีค่าต่อเนื่องมากขึ้นนั่นเอง



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## ปัญหาค่าขอบของไดอิเล็กทริกทรงกลมแบบไม่เชิงเส้นในตัวกลางแบบเชิงเส้น

สำหรับบทนี้ได้ศึกษาปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น จากปัญหาในบทความของ P. Brito , C.Grosse และ C. Halloy [5] ซึ่งได้ศึกษาปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางแบบเชิงเส้น และทั้งหมดอยู่ในสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอที่ให้ภายนอกทรงกลม ด้วยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน ( perturbation methods , ดูภาคผนวก ข เพิ่มเติม ) ทั้งนี้เพื่อเป็นการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณระหว่างวิธีแปรผัน พลังงาน และวิธีเพอร์เทอร์เบชัน โดยเปรียบเทียบความต่อเนื่องของปริมาณต่าง ๆ จากเงื่อนไขขอบ ของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในกรณีที่พิจารณานั้นเอง

### 5.1 ลักษณะโดยทั่วไปของปัญหา

จากบทความของ Brioto และคณะ [5] ได้กล่าวถึงผลการทดลองซึ่งชี้ให้เห็นว่าตัวกลางไดอิเล็กทริกทุกชนิด เมื่ออยู่ในสนามไฟฟ้าภายนอกที่ค่อนข้างเข้มอย่างเต็มที่ ( มีความเข้มสนามไฟฟ้าประมาณ  $10^5 V/m$  ) จะแสดงสมบัติไม่เชิงเส้น ( nonlinear effects ) จึงทำให้ปัญหาความไม่เป็นเชิงเส้นของไดอิเล็กทริกเป็นที่สนใจอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน

ในบทความนี้ได้นิยามบางปริมาณไว้แตกต่างจากบทความของ Yu [8] บ้างเล็กน้อย ทั้งนี้โปรแกรมนำมาประยุกต์ใช้มีพื้นฐานจากบทความของ Yu จึงต้องนิยามปริมาณต่าง ๆ ก่อน เพื่อเชื่อมโยงและนำโปรแกรมมาประยุกต์ช่วยในการคำนวณได้ เพื่อให้การคำนวณรวดเร็วและสะดวกยิ่งขึ้น

เริ่มต้นจากค่าการกระจายทางไฟฟ้าในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น จากบทความของ Brioto และคณะ [5] นิยามไว้ว่า

$$\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E} \quad \dots (5.1)$$

เมื่อ  $\epsilon_0$  คือ ค่าสภาพยอม ( permittivity ) ณ สุญญากาศ

$K$  คือ ค่าคงที่ไดอิเล็กทริกในตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น

โดยที่

$$K = K_0 (1 - \lambda |\vec{E}|^2) \quad \dots (5.2)$$

เมื่อ  $K_0$  คือ ค่าคงที่ไดอิเล็กทริกในตัวกลางพจน์ที่เป็นเชิงเส้น (linear term)  
 $\lambda$  คือ พารามิเตอร์ที่บอกความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวกลาง  
 แทนค่า  $K$  จากสมการ (5.2) ลงไปในสมการ (5.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \epsilon_0 K_0 (1 - \lambda |\bar{E}|^2) \bar{E} \\ \bar{D} &= \epsilon_0 K_0 \bar{E} - \lambda \epsilon_0 K_0 |\bar{E}|^2 \bar{E}\end{aligned}\quad \dots (5.3)$$

Brito และคณะ คำนวณค่าศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงกลมไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น เป็น inclusion อยู่ในตัวกลาง host ซึ่งเป็นไดอิเล็กทริกเชิงเส้น โดยวิธีเพอร์เทอร์เบชัน ลำดับที่ 1 โดยที่ค่า  $\lambda$  มีค่าน้อย ๆ

จากบทความของ Yu [8] ซึ่งได้ศึกษารายละเอียดในบทที่ 3 และ 4 ได้นิยามความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดทางไฟฟ้าและสนามไฟฟ้า เป็นรูปแบบดังนี้

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E} + \chi |\bar{E}|^2 \bar{E}\quad \dots (5.4)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (5.3) และ (5.4) จึงได้ความสัมพันธ์ของค่าคงที่ที่ใช้ในบทความของ Yu [8] และ Brito [5] ดังนี้ คือ

$$\epsilon \sim \epsilon_0 K_0 \quad \text{และ} \quad \chi \sim -\epsilon_0 K_0 \lambda$$

หรือ  $\chi \sim -\epsilon \lambda \quad \dots (5.5)$

จากสมการ (5.5) แสดงให้เห็นว่าในกรณีที่พิจารณาจากบทความของ Brito [5] ค่าสภาพรับได้ทางไฟฟ้า (electric susceptibility ;  $\chi$ ) มีความสัมพันธ์กับค่าคงที่ไดอิเล็กทริก (dielectric constant ;  $\epsilon$ ) โดยอัตราส่วนระหว่าง  $\chi$  และ  $\epsilon$  คือ ค่า  $-\lambda$  นั่นเอง

ในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางที่เป็นเชิงเส้น นั้นหมายความว่าพารามิเตอร์ที่แสดงความไม่เป็นเชิงเส้น  $\lambda$  มีค่าเป็นศูนย์นั่นเอง เมื่อพิจารณารูปแบบของการกระจัดทางไฟฟ้าจากสมการ (5.3) จึงได้ว่า

$$\bar{D} = \epsilon_0 K_0 \bar{E}$$

และเมื่อพิจารณาจากบทความของ Yu [8] จากสมการ (5.4) ในกรณีทีพิจารณาในตัวกลางที่เป็นเชิงเส้น จะได้ว่า

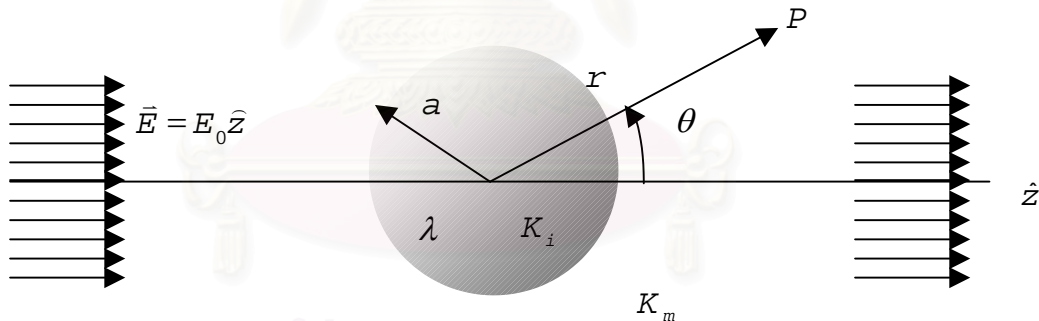
$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

จากความสัมพันธ์ข้างต้น ระหว่างปริมาณจาก 2 บทความ จะนำไปสู่การเปรียบเทียบผลของการคำนวณในปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในหัวข้อต่อไป

### 5.2 ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตวิธีการแปรผันพลังงาน

พิจารณาปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นที่ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นด้วยวิธีการแปรผันพลังงาน

ในที่นี้ ให้ทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยวเป็น inclusion มีค่าคงที่ไดอิเล็กทริกเชิงเส้นเป็น  $K_i$  พารามิเตอร์ที่แสดงความไม่เป็นเชิงเส้น  $\lambda$  รัศมี  $a$  ปริมาตร  $\Omega_i$  วางอยู่ในตัวกลาง host อีกชนิดหนึ่งซึ่งมีค่าคงที่ไดอิเล็กทริกเชิงเส้นเป็น  $K_m$  รัศมี  $R$  ปริมาตร  $V$  ซึ่งมีขนาดใหญ่กว่า  $\Omega_i$  มาก ทั้งระบบอยู่ภายในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$  ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 5.1 แสดงแบบจำลองของปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกเดี่ยว ที่อยู่ในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$

กำหนดให้  $\vec{E} = \nabla \Phi$  จึงได้เลือกฟังก์ชันศักย์ทดลองเบื้องต้นในรูปแบบดังนี้คือ

$$\Phi_i(r, \theta) = c E_0 r \cos \theta \quad \dots (5.6)$$

$$\Phi_m(r, \theta) = E_0 r \cos \theta + b E_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad \dots (5.7)$$



โดย  $\Phi_i$  เป็นค่าศักย์ทดลองภายในทรงกลมไดอิเล็กทริก ( $r < a$ )

$\Phi_m$  เป็นค่าศักย์ทดลองภายนอกทรงกลมไดอิเล็กทริก ( $r > a$ )

และเช่นเดียวกับกรณีที่พิจารณามาแล้ว คือ จากเงื่อนไขขอบที่ผิวรอยต่อของทรงกลมกับตัวกลางภายนอกจะได้ว่า

$$\Phi_i(r = a) = \Phi_m(r = a)$$

ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $c$  และ  $b$  คือ  $c = 1 + b$

ฟังก์ชันนำพลังงานที่นำมาใช้ตามวิธีการการแปรผัน บริเวณภายในและภายนอกของทรงกลมไดอิเล็กทริกมีรูปแบบที่แตกต่างกัน ที่เป็นเช่นนั้นเพราะว่าในกรณีนี้ที่พิจารณานี้ ทรงกลมไดอิเล็กทริกและตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่เป็นตัวกลางคนละแบบกัน กล่าวคือ ทรงกลมไดอิเล็กทริกเป็นตัวกลางแบบไม่เชิงเส้น ส่วนตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่เป็นตัวกลางแบบเชิงเส้น ทำให้การพิจารณาแตกต่างจาก 2 บทที่แล้ว ซึ่งทรงกลมไดอิเล็กทริกและตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่ภายนอกเป็นตัวกลางแบบเดียวกัน

สำหรับฟังก์ชันนำพลังงานกรณีนี้ที่พิจารณาในทรงกลมไดอิเล็กทริก ซึ่งเป็นตัวกลางแบบไม่เชิงเส้น จะเป็นไปตามสมการ ( 2.30 ) ดังนี้คือ

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} (\epsilon E^2) dV + \frac{1}{4} \int_{\Omega_i} (\chi E^4) dV$$

หรือในที่นี้ใช้เป็น

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} (\epsilon_0 K_i E^2) dV - \frac{1}{4} \int_{\Omega_i} (\lambda \epsilon_0 K_i E^4) dV \quad \dots (5.8)$$

เมื่อ  $K_i$  คือค่าคงที่ไดอิเล็กทริกเชิงเส้นของทรงกลมไดอิเล็กทริก

$\lambda$  คือ พารามิเตอร์ที่บอกความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวกลาง

$\Omega_i$  คือ ปริมาตรของทรงกลมไดอิเล็กทริก หรือ inclusion

สำหรับฟังก์ชันนำพลังงานกรณีนี้ที่พิจารณาภายนอกทรงกลมไดอิเล็กทริก ซึ่งเป็นตัวกลางแบบเชิงเส้น จะเป็นไปตามสมการ ( 2.2 ) คือ

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} (\epsilon E^2) dV$$

หรือในที่นี้ใช้เป็น

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} (\epsilon_0 K_m E^2) dV \quad \dots (5.9)$$

เมื่อ  $\Omega_m$  คือ ปริมาตรของตัวกลางไดอิเล็กทริกที่ล้อมรอบทรงกลมไดอิเล็กทริกอยู่  
ดังนั้น พลังงานที่สะสมในระบบ ( $W$ ) คือ

$$W = W_i + W_m + W_s$$

เมื่อทราบลักษณะของฟังก์ชันพลังงานแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือ แทนค่าฟังก์ชันศักย์เริ่มต้นลงไป  
ในฟังก์ชันพลังงาน แล้วจึงค่อยนำไปคำนวณการแปรผันต่อไปได้ โปรแกรมที่ใช้มีลักษณะ  
คล้ายคลึงกับโปรแกรมที่ใช้ในบทที่แล้ว โดยแตกต่างกันเล็กน้อยที่ฟังก์ชันพลังงาน ส่วนขั้นตอน  
การคำนวณนั้นยังคงคล้ายคลึงกัน จากนั้นจึงคำนวณเปรียบเทียบค่าของฟังก์ชันพลังงาน  
แล้วจึงพิจารณาความต่อเนื่องที่ผิวรอยต่อ ( $r = a$ ) ของค่าศักย์ไฟฟ้าและส่วนประกอบแนวฉาก  
ของการกระจัดทางไฟฟ้าของวิธีแปรผันพลังงาน และวิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความของ Brioto  
และคณะ [5] เปรียบเทียบกัน

## 5.2 ผลการคำนวณของโปรแกรม

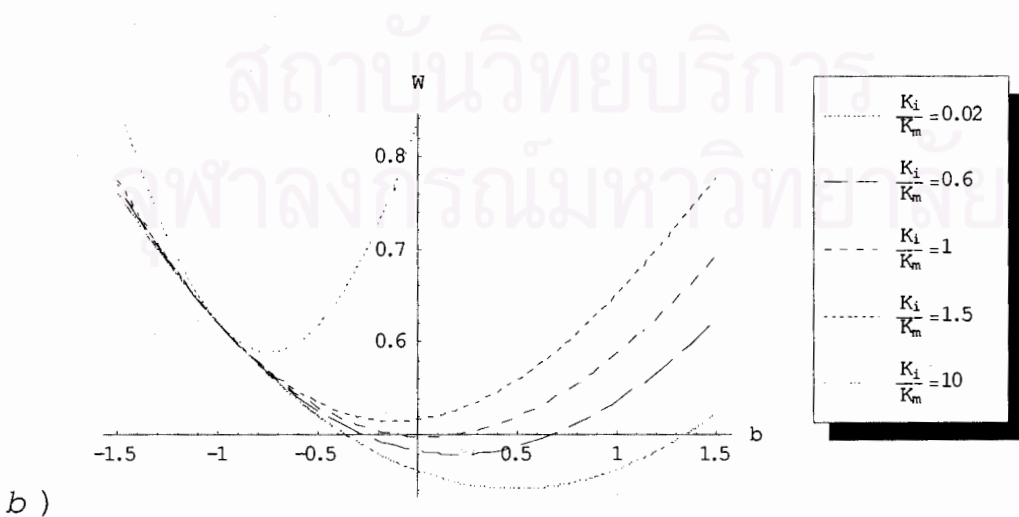
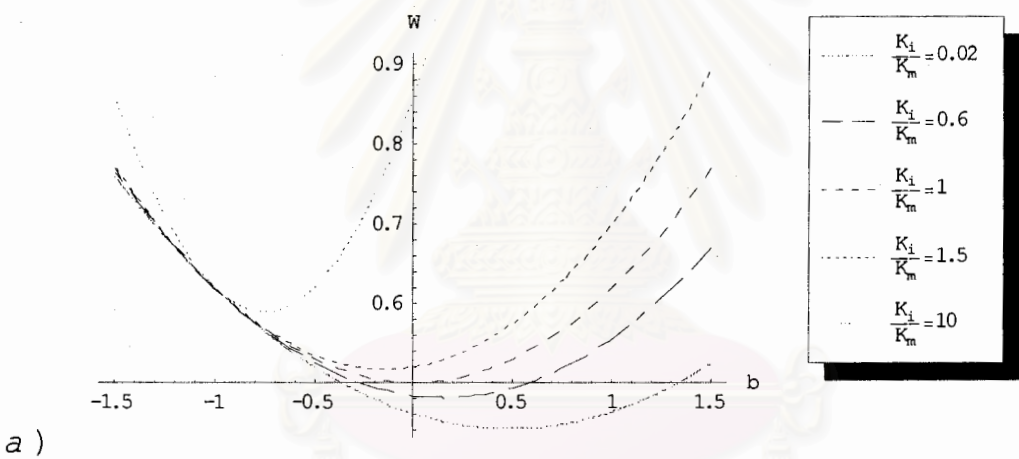
โปรแกรมที่เขียนขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหานี้คือ NL\_L.nb (ดูภาคผนวก ข) ซึ่งได้ดัดแปลงค่า  
คงที่ไดอิเล็กทริกจากโปรแกรมที่ใช้ในบทก่อนเล็กน้อยและได้ใช้ศักย์ทดลองเบื้องต้น ตามสมการที่  
(5.6) และ (5.7) เพื่อใช้คำนวณค่าฟังก์ชันพลังงานสำหรับการแปรผัน

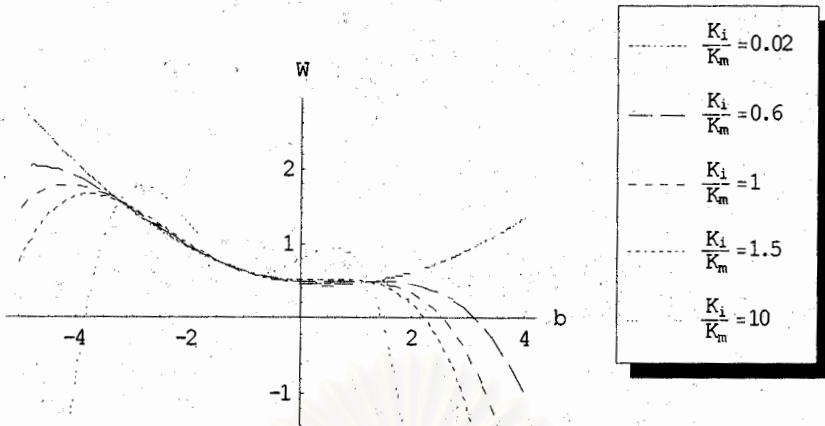
จากการทดสอบความแม่นยำตรงของโปรแกรมด้วยการกำหนดให้ ค่า  $\lambda = 0$  หรือกำหนดให้  
พิจารณาในกรณีตัวกลางแบบเชิงเส้นนั่นเอง พบว่า ค่า  $b$  ที่เป็นผลเฉลยของโปรแกรมจากการ  
คำนวณการแปรผัน มีรูปแบบเช่นเดียวกับการคำนวณในตัวกลางแบบเชิงเส้นโดยตรงตามวิธีการ  
แปรผัน (ตามสมการที่ (3.18)) คือ

$$b \circledast - \frac{K_i - K_m}{K_i + 2K_m}$$

เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 0$  และให้  $K_i = K_m$  พบว่าผลที่ได้จากโปรแกรมเหมือนกับผลที่ได้จากการพิจารณาในกรณีตัวกลางทั้งสองมีสมบัติเสมือนเป็นตัวกลางเนื้อเดียว (homogeneous) โดยที่พารามิเตอร์  $b$  ที่ได้จากการคำนวณ มีค่าเป็นศูนย์

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างค่าฟังก์ชันนำพลังงานที่ได้จากโปรแกรม และค่า  $\lambda$  ที่ใช้จากวิธีแปรผันพลังงาน โดยนำมาเขียนกราฟระหว่างฟังก์ชันนำพลังงานและพารามิเตอร์  $b$  ที่ค่า  $\lambda$  ต่าง ๆ กัน เพื่อดูลักษณะของเส้นกราฟ หากเส้นกราฟมีลักษณะเป็นโค้งหงาย แสดงว่าฟังก์ชันนำพลังงานในกรณีที่ใช้ค่า  $\lambda$  นั้นสามารถหาดำแหน่ง (ค่า  $b$ ) ที่มีฟังก์ชันนำพลังงานต่ำที่สุดตามหลักของการแปรผันได้ โดยในที่นี้ได้ใช้ค่า  $\lambda$  ในหน่วยของ  $\frac{1}{E_0^2}$  พิจารณากราฟต่อไปนี้





c)

รูปที่ 5.2 แสดงกราฟระหว่างฟังก์ชันนัลพลังงานและพารามิเตอร์  $b$

โดย a)  $\lambda = 10^{-10}$       b)  $\lambda = 0.1$       c)  $\lambda = 0.4$

จากกราฟในรูปที่ 5.2 แสดงให้เห็นได้ชัดเจนว่า เมื่อค่า  $\lambda$  ที่ใช้ในการพิจารณามีค่ามากขึ้น (อย่างเช่น  $\lambda > 0.4$ ) ทำให้กราฟฟังก์ชันนัลพลังงานกับพารามิเตอร์  $b$  ไม่ได้เป็นกราฟโค้งหงาย จึงไม่สามารถคำนวณหาค่าพารามิเตอร์  $b$  ที่ทำให้ฟังก์ชันนัลพลังงานต่ำสุด ตามหลักการแปรผันจากโปรแกรมได้ จึงต้องพิจารณาในกรณีที่  $\lambda$  มีค่าไม่มากนัก ค่าที่น่าจะเหมาะสมกับการคำนวณ คือ ที่  $\lambda < 10^{-3}$

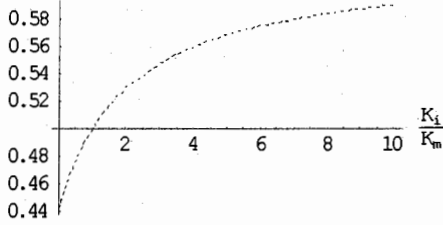
เปรียบเทียบฟังก์ชันนัลพลังงาน ณ ตำแหน่งที่มีค่าต่ำที่สุด จากวิธีการแปรผันและวิธีตามบทความของ Brito และคณะ โดยเลือกพิจารณาที่  $\lambda = 10^{-10}$  และ  $\lambda = 0.4$  กับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  ต่าง ๆ ใน รูปแบบของกราฟ มีลักษณะดังต่อไปนี้

## วิธีการแปรผันพลังงาน

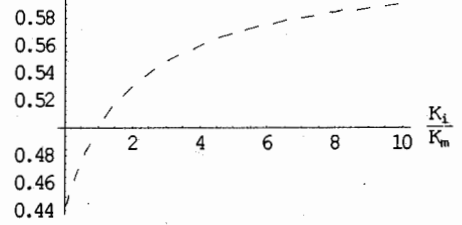
## วิธีเพอร์เทอร์เบชันของ Brito

a)

Energy functional

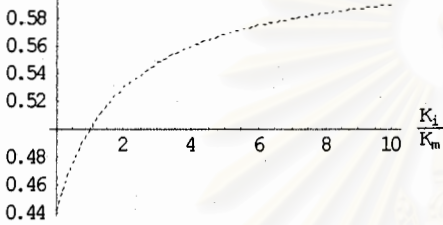


Energy functional

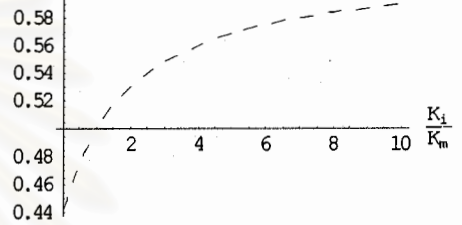


b)

Energy functional



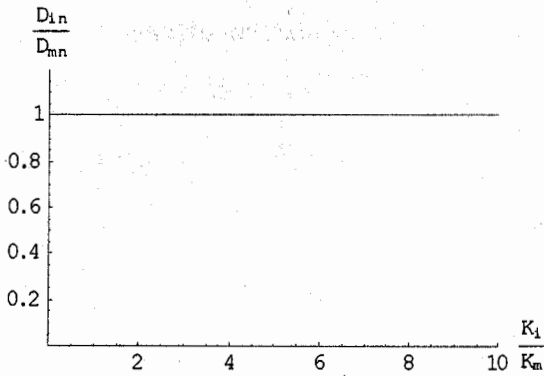
Energy functional



รูปที่ 5.3 แสดงกราฟระหว่างฟังก์ชันพลังงาน ณ ตำแหน่งที่มีค่าต่ำสุด ที่ค่าอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  ตั้งแต่ 0.02 ถึง 10 โดย a) ใช้ค่า  $\lambda = 10^{-10}$  b) ใช้ค่า  $\lambda = 0.4$

จากกราฟในรูปที่ 5.3 กราฟทางด้านซ้ายได้จากวิธีการแปรผันพลังงาน ด้านขวามาจากบทความของ Brito และคณะ ซึ่งจะเห็นได้ว่าค่าฟังก์ชันพลังงานที่ได้จากการคำนวณทั้งวิธีแปรผันพลังงานและกรณีที่พิจารณาตามบทความของ Brito และคณะ ไม่ได้แตกต่างกันมากนัก หรือแทบจะกล่าวได้ว่าเกือบจะมีค่าเท่ากันเลยทีเดียว

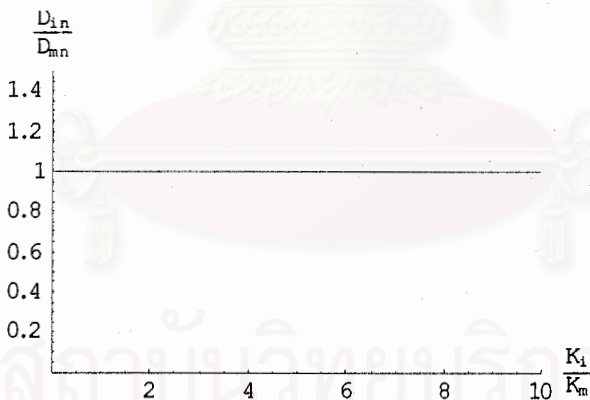
เมื่อพิจารณาอิทธิพลของค่า  $K_i$  และ  $K_m$  ที่มีต่อความต่อเนื่องของส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าจากวิธีแปรผันพลังงาน โดยเขียนกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 10^{-10}$  จะเป็นดังกราฟต่อไปนี้



รูปที่ 5.4 แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  เมื่อ  $\lambda = 10^{-10}$

จากรูปที่ 5.4 แสดงให้เห็นว่า เมื่อ  $\lambda$  มีค่าน้อย ๆ ค่าส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้ามีค่าใกล้เคียงกันมากไม่ว่า ค่าอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  จะมีค่าเท่าไรก็ตาม ( ในช่วง 0.02 – 10 ) หรืออาจจะกล่าวได้ว่า ส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้ามีค่าต่อเนื่องกันนั่นเอง

เมื่อพิจารณาที่ค่า  $\lambda$  มาก เช่น  $\lambda = 0.4$  จะได้ความสัมพันธ์ดังกราฟต่อไปนี้



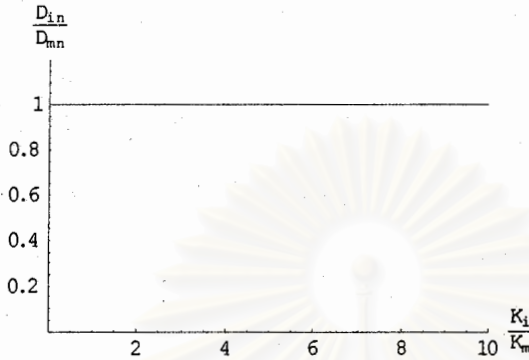
รูปที่ 5.5 แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$

เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 0.4$

จากรูปที่ 5.5 แสดงให้เห็นว่าเมื่อพิจารณาที่ค่า  $\lambda$  มากขึ้น หรือเรียกว่ามีความไม่เป็นเชิงเส้นเพิ่มขึ้น จากวิธีแปรผันพลังงานค่าอัตราส่วนระหว่าง  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  จะมีค่าเกือบคงที่ คือประมาณ 1 ในทุก ๆ ค่า  $\frac{K_i}{K_m}$  นั้นแสดงว่า ค่าส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดที่ผิวยอดต่อมีค่าต่อเนื่องกัน



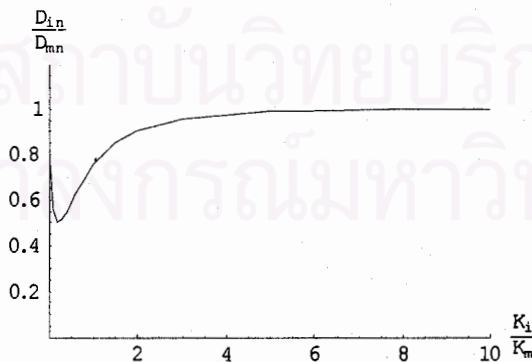
ในการทำงานเดียวกัน พิจารณาผลเฉลยจากบทความของ Brito โดยดูที่ความต่อเนื่องของค่า ส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อของทรงกลมกับตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่ โดยเขียนกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 10^{-10}$  เป็นดังนี้



รูปที่ 5.6 แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 10^{-10}$  โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความ ของ Brito

พิจารณากราฟจากรูปที่ 5.6 เห็นได้ว่าอัตราส่วนระหว่าง  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  มีค่าใกล้เคียงกับ 1 หรือค่าส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าตามบทความของ Brito และขณะที่  $\lambda = 10^{-10}$  ก็มีค่าต่อเนื่องเช่นเดียวกับวิธีการแปรผันพลังงาน

พิจารณาอีกกรณีหนึ่ง คือเมื่อใช้ค่า  $\lambda$  มีค่ามากขึ้น คือ  $\lambda = 0.4$  จะได้ผลดังนี้

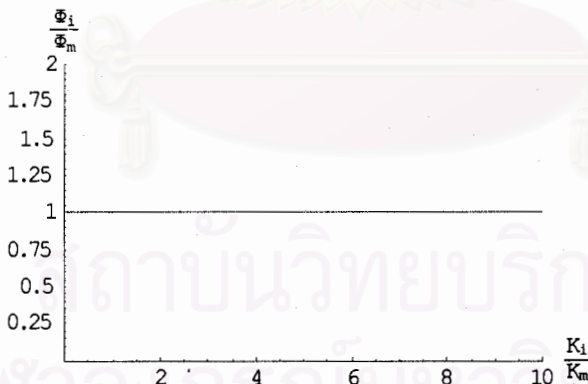


รูปที่ 5.7 แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 0.4$  โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความ ของ Brito

จากกราฟในรูปที่ 5.7 แสดงให้เห็นว่า ค่าส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อมีค่าแตกต่างกันค่อนข้างมาก ที่ค่าอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m} < 2$  แต่ที่ค่าอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m} > 2$  ค่าอัตราส่วน  $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$  ก็กลับมาใกล้เคียงกับ 1 อีกครั้งหนึ่ง แสดงให้เห็นว่า ค่าส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้าที่ผิวรอยต่อจากวิธีเพอร์เทอร์เบชันของ Brito และคณะ ในกรณีที่  $\lambda$  มีค่ามาก จะเริ่มมีค่าไม่ต่อเนื่องนั่นเอง และเมื่อเปรียบเทียบผลที่ได้จากวิธีแปรผันพลังงานและตามบทความของ Brito ประกอบแนวฉาก วิธีแปรผันพลังงานจะมีค่าที่ใกล้เคียง 1 มากกว่า หรือมีค่าเกือบจะต่อเนื่องกัน

อีกปริมาณหนึ่งจากเงื่อนไขขอบคือ ค่าศักย์ต่อเนื่องที่ผิวรอยต่อระหว่างทรงกลมกับตัวกลางที่ล้อมรอบอยู่ เมื่อพิจารณาจากการการคำนวณของโปรแกรมจากวิธีการแปรผันพลังงาน พบว่าค่าศักย์ ที่ผิวทั้งสองบริเวณต่อเนื่องกันในทุก ๆ ค่าอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  และทุกค่า  $\lambda$  (ดูที่โปรแกรม NL\_L.nb ที่ภาคผนวก บรรทัด IN[84] – IN[87] )

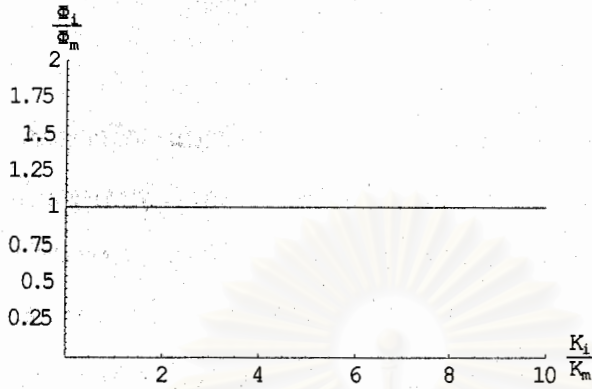
พิจารณาผลการคำนวณ ค่าศักย์ที่ผิวรอยต่อ ของบทความของ Brito และคณะ โดยนำมาเขียนเป็นกราฟ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 5.8 แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{\Phi_i}{\Phi_m}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 10^{-10}$  โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความของ Brito และคณะ

จากกราฟในรูปที่ 5.8 แสดงให้เห็นว่าค่าศักย์จากวิธีนี้มีค่าต่อเนื่องในทุกค่าอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  ที่พิจารณา เช่นเดียวกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีการแปรผันพลังงาน

เมื่อพิจารณากรณีที่ใช้ค่า  $\lambda$  มีค่ามากขึ้น ( ในที่นี้ใช้  $\lambda = 0.4$  ) จะได้ผลดังกราฟต่อไปนี้



**รูปที่ 5.9** แสดงกราฟระหว่างอัตราส่วน  $\frac{\Phi_i}{\Phi_m}$  เทียบกับอัตราส่วน  $\frac{K_i}{K_m}$  เมื่อกำหนดให้  $\lambda = 0.4$  โดยใช้วิธีเพอร์เทอร์เบชันตามบทความของ Brito และคณะ

จากกราฟ 5.9 แสดงให้เห็นว่า ค่าศักยภาพที่ผิวก็ยังต่อเนื่องที่ค่า  $\lambda = 0.4$  ในช่วงค่าอัตราส่วน

$\frac{K_i}{K_m}$  ในช่วงที่พิจารณา ( $\frac{K_i}{K_m} = 0.02 - 10$ )

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## บทที่ 6

### สรุปและวิเคราะห์ผลการวิจัย

จากการศึกษาวิธีการแปรผันพลังงาน สำหรับปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในตัวกลาง ไดโอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นทำให้ทราบถึงความสัมพันธ์ของหลักการแปรผัน และปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต ซึ่งเป็นที่มาของการนำฟังก์ชันพลังงานมาพิจารณาตามหลักการแปรผันเพื่อแก้ปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตในกรณีนี้ เนื่องจากการแก้ปัญหาค่าขอบโดยตรงตามวิธีปกติทั่วไปไม่สามารถทำได้เพราะความซับซ้อนของปัญหานั้นเอง

หลักการสำคัญของวิธีการแปรผันพลังงานอยู่ที่การเลือกฟังก์ชันศักย์ทดลองเริ่มต้นสำหรับการแปรผัน การเพิ่มพารามิเตอร์ลงไป ค่าฟังก์ชันศักย์ทดลอง จะทำให้การแปรผันพลังงานมีผลเฉลยที่ดีขึ้น แต่จะทำให้การคำนวณซับซ้อนขึ้นมาก ซึ่งในการศึกษาได้แก้ปัญหานี้ด้วยการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยในขั้นตอนของการคำนวณ ทำให้การคำนวณสะดวกรวดเร็วยิ่งขึ้น

ในปัญหาทรงกลมไดโอิเล็กทริกแบบเชิงเส้น วิธีการแปรผันพลังงานทำให้ได้ผลเฉลยที่ตรงกับ การคำนวณเชิงวิเคราะห์จากการแก้สมการลาปลาซโดยตรง และมีปริมาณที่ต่อเนื่องที่ผิวรอยต่อ ตามเงื่อนไขความต่อเนื่องตามทฤษฎีของปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิต ได้แก่ ค่าศักย์ไฟฟ้า ซึ่งต่อเนื่องจากการที่กำหนดในขั้นตอนเริ่มต้นของการคำนวณ และอีกปริมาณหนึ่งคือ ส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า ( $D_n$ ) จากการคำนวณด้วยวิธีนี้ แสดงให้เห็นว่าส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้ามีค่าต่อเนื่องที่ผิวรอยต่อเช่นเดียวกัน จึงกล่าวได้ว่าการใช้วิธีการแปรผันพลังงานในตัวกลางแบบเชิงเส้น จะได้ผลเฉลยที่แม่นยำ

เมื่อพิจารณาในทรงกลมไดโอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นแบบเข้ม พบว่าผลการคำนวณที่ได้มีความแม่นยำในระดับหนึ่ง กล่าวคือ เมื่ออัตราส่วนระหว่างค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงกลม ( $\chi_i, \chi_m$ ) หรือ  $\frac{\chi_i}{\chi_m}$  มีค่าใกล้เคียง 1 หรือกรณีที่เกือบเสมือนเป็นตัวกลางเนื้อเดียวกัน ผลเฉลยที่ได้จะค่อนข้างแม่นยำ โดยสังเกตจาก  $D_n$  ที่ผิวรอยต่อเกือบจะมีค่าเท่ากันทั้งในและนอกทรงกลม และมีค่าต่อเนื่องกันที่  $\frac{\chi_i}{\chi_m} = 1$  โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อเพิ่มพารามิเตอร์ลงไป ในฟังก์ชันศักย์ทดลองเพื่อเริ่มต้นการแปรผัน แม้จะทำให้การคำนวณซับซ้อนมากยิ่งขึ้น แต่ผลที่ได้ค่อนข้างน่าพอใจเพราะทำให้ค่า  $D_n$  ที่ผิวรอยต่อมีค่าใกล้เคียงกันมากยิ่งขึ้น หรือทำให้  $D_n$  ที่ผิวรอยต่อใกล้เคียงกับทฤษฎีของความต่อเนื่องจากปัญหาค่าขอบทางไฟฟ้าสถิตนั่นเอง

เมื่อนำวิธีการแปรผันพลังงานไปประยุกต์ใช้ในปัญหาทรงกลมไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้น ล้อมรอบด้วยตัวกลางแบบเชิงเส้นในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ ซึ่งได้ศึกษาในบทที่ 5 โดยนำมาจากบทความของ P. Brito [5] จะเห็นได้ว่าผลเฉลยที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขความต่อเนื่องของค่าศักย์ไฟฟ้าและค่า  $D_n$  ที่ผิวรอยต่อ ซึ่งแตกต่างจากผลเฉลยจากในบทความของ P. Brito ที่  $\lambda$  มีค่ามากซึ่งไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของความต่อเนื่องของค่า  $D_n$  ที่ผิวรอยต่อ เนื่องจากวิธีเพอร์เทอร์เบชันต้องพิจารณากรณีที่  $\lambda$  มีค่าน้อย นั่นเอง

นอกจากจะได้ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบแล้ว ยังสามารถนำค่าที่ได้ไปคำนวณสมบัติอื่น ๆ ของวัสดุเชิงประกอบแบบไม่เชิงเส้นต่อไปได้และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในปัญหาที่ใกล้เคียงกันได้ อีกด้วย

**ตัวอย่างเช่น** ปัญหาจากความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นกระแส ( current density ;  $\vec{J}$  ) และค่าสนามไฟฟ้า ( electric field ;  $\vec{E}$  ) ในรูปแบบไม่เชิงเส้น [3] ดังนี้

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \sigma' |\vec{E}|^2 \vec{E}$$

โดย  $\sigma$  เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าแบบเชิงเส้น และ  $\sigma'$  เป็นค่าสภาพนำไฟฟ้าแบบไม่เชิงเส้น ต่อสนามไฟฟ้ายกกำลังสอง ตามลำดับ

สมบัติที่สามารถคำนวณได้จากปัญหาค่าขอบสำหรับกรณีนี้เช่น ค่าสภาพนำไฟฟ้าเชิงเส้น ยิงผล ( effective linear conductivity ;  $\sigma_e$  ) ซึ่งนิยามจาก

$$\sigma_e = \frac{1}{V |\vec{E}_0|^2} \int_V \sigma |\nabla \Phi|^2 dV$$

ประยุกต์เข้ากับวิธีแปรผันพลังงานด้วยฟังก์ชันนำพลังงาน [4,10] ดังนี้

$$W = \int_V \sigma |\nabla \Phi|^2 dV = \sigma_e |\vec{E}_0|^2 V$$

ซึ่งค่า  $\Phi$  จะติดอยู่ในรูปพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า โดยสามารถหาค่าได้จากหลักการแปรผันฟังก์ชันนำพลังงานเช่นเดียวกับการคำนวณหาค่า  $\epsilon_e$  เมื่อได้ค่า  $\Phi$  ที่แทนพารามิเตอร์จากหลักการแปรผันแล้ว จึงไปแทนค่าจากสมการข้างต้นเพื่อหาค่า  $\sigma_e$  ได้

ปัญหาที่น่าจะวิจัยต่อไปได้ ก็คือพิจารณาทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้นในตัวกลางแบบไม่เชิงเส้น , ทรงกลมไดอิเล็กทริกไม่เชิงเส้นแบบเข้มในตัวกลางแบบเชิงเส้น , อิเล็กทริกไดโพลในทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบเชิงเส้นล้อมรอบด้วยตัวกลางแบบไม่เชิงเส้น ฯลฯ ซึ่งทำได้โดยการปรับปรุงแอมพลิจูดเพิ่มเติม ซึ่งน่าจะทำการศึกษาในโอกาสต่อไป

## รายการอ้างอิง

- [1] G.A. Niklasson. Physica A 157 , 482 ( 1989 ).
- [2] R. Blumenfeld and D.J. Bergman. Phys. Rev. B 44 , 7378 ( 1991 ).
- [3] K.W. Yu. , and G.Q. Gu. Phys. Lett. A 193 , 311 ( 1994 ).
- [4] K.W. Yu. , and G.Q. Gu. Phys. Lett. A 205 , 295 ( 1995 ).
- [5] Pedro Brito , Constantino Grosse, and Christian Halloy. Am.J.Phys. 54 (11),1014 (1986)
- [6] R.V. Kamat. Action Principle in Physics. New Delhi : Wiley , 1995
- [7] George B. Arfken and Hans J. Weber. Mathematical Methods for Physicist. 4th ed. Academic Press , 1995.
- [8] K.W. Yu. Computer in Physics V10 , 284 ( 1996 ).
- [9] K.W. Yu., and G.Q. Gu. Phys. Rev. B 47 , 7568 ( 1993 ).
- [10] Tat – Sang Choy. , K.W. Yu. Phys. Lett. A 202 , 129 ( 1995 ).



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย





ภาคผนวก

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ก เงื่อนไขขอบ ( boundary conditions )

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## เงื่อนไขขอบ ( boundary conditions )

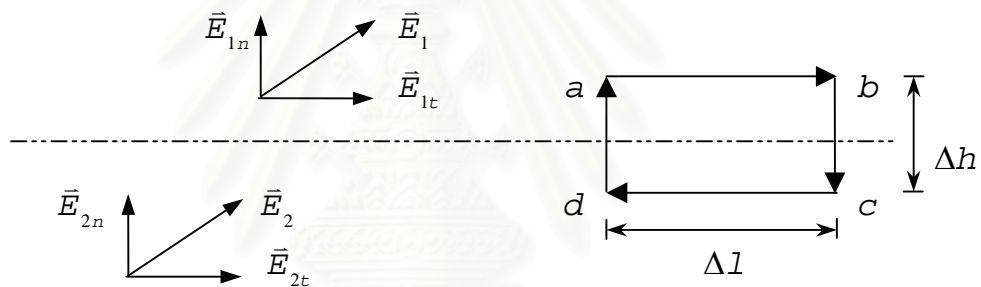
พิจารณา ค่า  $\vec{E}$  ที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางไดอิเล็กทริก 2 ชนิด มีค่าเป็น  $\vec{E}_1$  และ  $\vec{E}_2$  ตามลำดับ ซึ่งแยกเป็นองค์ประกอบย่อย 2 แนวดังนี้ คือ

$$\vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_t$$

เมื่อ  $\vec{E}_n$  และ  $\vec{E}_t$  คือ ส่วนประกอบแนวฉากและแนวสัมผัส ของค่า  $\vec{E}$

จากสมการ 
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

สร้างเส้นทางเล็ก ๆ  $abcd$  ที่ผิวรอยต่อระหว่างไดอิเล็กทริกทั้งสอง ดังรูป



เมื่อ  $\Delta h \rightarrow 0$  จะได้ว่า

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_{1t} \Delta l - \vec{E}_{2t} \Delta l = 0$$

หรือ

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

พิจารณา ค่า  $\vec{D}$  ที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลางไดอิเล็กทริก 2 ชนิด มีค่าเป็น  $\vec{D}_1$  และ  $\vec{D}_2$  ตามลำดับ ซึ่งแยกเป็นองค์ประกอบย่อย 2 แนว เช่นเดียวกับกรณีที่พิจารณาค่า  $\vec{E}$  คือ

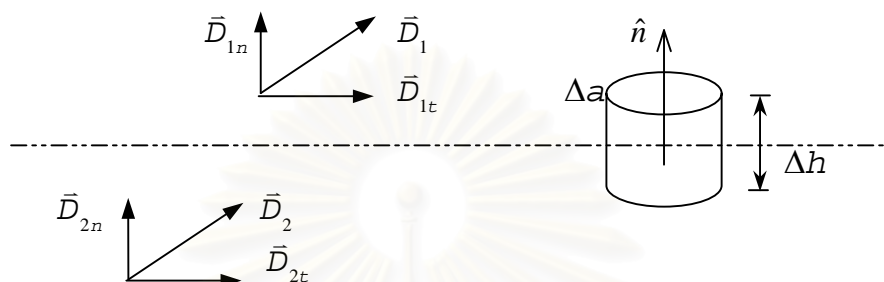
$$\vec{D} = \vec{D}_n + \vec{D}_t$$

เมื่อ  $\vec{D}_n$  และ  $\vec{D}_t$  คือ ส่วนประกอบแนวฉากและแนวสัมผัส ของค่า  $\vec{D}$

จากสมการ 
$$\oint \vec{D} \cdot \hat{n} da = Q_a$$

เมื่อ  $Q_a$  เป็นประจุที่อยู่ภายในพื้นที่ผิวปิดที่พิจารณา

สร้างพื้นที่เล็ก ๆ คล้ายกล่อง  $S$  เป็นพื้นที่ผิวปิด โดยมี  $\hat{n}$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับผิวปิดพื้นที่  $\Delta a$  โดยพุ่งออกจากปริมาตรปิดล้อมที่สนใจ



เมื่อ  $\Delta h \rightarrow 0$  จะได้ว่า 
$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da &= \vec{D}_1 \cdot (\hat{n})(\Delta a) + \vec{D}_2 \cdot (-\hat{n})(\Delta a) \\ &= (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \hat{n} \Delta a = (\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n}) \cdot \Delta a \end{aligned}$$

กำหนดให้  $\sigma$  เป็น ความหนาแน่นประจุบนผิวปิดนั้น จะได้ว่า

$$\oint_S \vec{D} \cdot \hat{n} da = 4\pi \int_V \rho d^3x$$


ซึ่ง 
$$4\pi \int_V \rho d^3x = 4\pi \sigma \Delta a$$

หรือ 
$$\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = 4\pi \sigma$$

ถ้าบนภายในผิวปิดนั้นไม่มีประจุอิสระ ( $\sigma = 0$ ) จะได้ว่า

$$\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = 0$$

หรือ 
$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n}$$



๗ วิธีเพอร์เทอร์เบชัน ของ Brito และคณะ

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

### วิธีเพอร์เทอร์เบชันของ Brito และคณะ

นิยามความสัมพัทธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างค่าสภาพยอมไฟฟ้า ( electric permittivity ;  $K$  ) และความเข้มของสนามไฟฟ้า ( electric field ;  $\vec{E}$  ) เป็นดังนี้

$$K = K_0 (1 - \lambda E^2) \quad \dots (1)$$

เมื่อ  $K_0$  เป็นค่าคงที่ไดอิเล็กทริกกรณีที่พิจารณาในสนามอ่อน ( weak field )

$\lambda$  เรียกว่า “ Piekara factor ” ซึ่งอธิบายลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวกลาง

โดยในที่นี้พจน์ลำดับสูง ( higher order expansion ) จะละไว้ไม่พิจารณา เนื่องจากสมบัติไดอิเล็กทริกจะถูกทำลายเมื่อพิจารณาในบริเวณที่มีสนามเข้มมาก ๆ

เครื่องหมายลบในสมการที่ (1) แสดงความสัมพัทธ์ระหว่างสภาพยอมทางไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าว่า ค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าจะลดลงเมื่อเพิ่มความเข้มของสนามไฟฟ้าให้มากขึ้น

ค่าศักย์ไฟฟ้าทางไฟฟ้าสถิต (  $U$  ) ในกรณีที่พิจารณาในตัวกลางไดอิเล็กทริกบริเวณที่ไม่มีประจุอิสระ ได้นิยามไว้จากสมการต่อไปนี้

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad \dots (2)$$

และ 
$$\vec{D} = \epsilon_0 K \vec{E} \quad \dots (3)$$

เมื่อให้ 
$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U \quad \dots (4)$$

จากสมการ (1) ถึง (3) จะได้ว่า

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \epsilon_0 (K_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \lambda K_0 \vec{\nabla} \cdot E^2 \vec{E}) \quad \dots (5)$$

และเมื่อแทนค่าสมการ (4) ลงในสมการที่ (5) จะได้ว่า

$$-(1 - \lambda |\vec{\nabla} U|^2) \nabla^2 U + \lambda \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} |\vec{\nabla} U|^2 = 0 \quad \dots (6)$$



จากสมการที่ (6) แสดงให้เห็นว่า สำหรับไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น ค่าศักย์ไฟฟ้าจะไม่เป็นไปตามสมการลาปลาซ ซึ่งไม่สามารถหาผลเฉลยที่แน่นอนตรงได้ และเมื่อพิจารณาปริมาณในระบบจริงสำหรับของเหลวเชิงโมเลกุล (molecular liquids) ค่า  $\lambda$  อยู่ในลำดับที่  $10^{-19} (m/V)^2$  และจากวิธีเพอร์เทอร์เบชัน กำหนดให้

$$U = U^0 + \lambda U^1 \quad \dots(7)$$

เมื่อ  $U^0$  เป็นส่วนของฟังก์ชันศักย์ไฟฟ้าซึ่งเป็นไปตามสมการของลาปลาซในกรณีเชิงเส้น คือ

$$\nabla^2 U^0 = 0 \quad \dots(8)$$

และ  $\lambda U^1$  เป็นพจน์ที่แสดงความไม่เป็นเชิงเส้น ในลำดับแรกของ  $\lambda$  เมื่อพิจารณาจากสมการ (6) – (8) จะได้ว่า

$$\nabla^2 \lambda U^1 = \lambda \nabla U^0 \cdot \nabla |\nabla U^0|^2 \quad \dots(9)$$

ซึ่งจะเป็นสมการพื้นฐานสำหรับการพิจารณาค่าฟังก์ชันศักย์พจน์ที่ไม่เป็นเชิงเส้น  $\lambda U^1$  พิจารณาในปัญหาที่ประกอบด้วยทรงกลมไดอิเล็กทริกแบบไม่เชิงเส้น รัศมี  $R$  มีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าในสนามอ่อน (weak field permittivity) เป็น  $K_a$  และมีค่า Piekara factor เป็น  $\lambda$  ถูกล้อมรอบด้วยตัวกลางแบบเชิงเส้น มีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าเป็น  $K_b$  ซึ่งทั้งหมดอยู่ภายในสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ

ค่าศักย์ไฟฟ้าที่เป็นผลเฉลยที่รู้จักกันดีในกรณีที่พิจารณาปัญหาแบบเชิงเส้น จากสมการที่ (8) คือ

$$U_0^a = -\eta K_b E r P_1 \quad \dots(10)$$

$$U_0^b = -E r P_1 + \gamma E R^3 P_1 / r^2 \quad \dots(11)$$

เมื่อ

$$\eta = 3 / (2K_b + K_a) \quad \dots(12)$$

$$\gamma = (K_a - K_b) / (2K_b + K_a) \quad \dots(13)$$

และ  $P_n = P_n(\cos\theta)$  เป็นพหุนามของเลขจาง ลำดับที่  $n$

เริ่มต้นการคำนวณส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นของค่าศักย์ไฟฟ้าทางด้านขวามือของสมการที่ (9) เมื่อพิจารณาผลจากสมการที่ (10) จะเป็นศูนย์หากปัญหานี้สนามไฟฟ้าภายในทรงกลมสม่ำเสมอ พิจารณาส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นของค่าศักย์ไฟฟ้า เทียบกับสมการลาปลาซ ซึ่งจะได้ว่า

$$\lambda U_a^1 = \lambda A r P_1 \quad \dots (14)$$

$$\lambda U_b^1 = \lambda B P_1 / r^2 \quad \dots (15)$$

ค่าคงตัว  $A$  และ  $B$  สามารถหาได้จากเงื่อนไขขอบทางไฟฟ้าสถิตที่ผิวรอยต่อโดยทั่วไป คือ ความต่อเนื่องของค่าศักย์ไฟฟ้า :

$$\lambda U_a^1|_R = \lambda U_b^1|_R \quad \dots (16)$$

ความต่อเนื่องของส่วนประกอบแนวฉากของการกระจัดทางไฟฟ้า :

$$K_a \left( \frac{\partial}{\partial r} \lambda U_a^1 - \lambda |\nabla U_a^1|^2 \frac{\partial}{\partial r} U_a^1 \right) \Big|_R = K_b \frac{\partial}{\partial r} \lambda U_b^1 \Big|_R \quad \dots (17)$$

ท้ายที่สุดจะได้รูปแบบฟังก์ชันศักย์ข้างในและข้างนอกทรงกลม ดังนี้

$$U_a = -\eta K_b E \left( 1 + K_a K_b^2 \eta^3 \lambda E^2 / 3 \right) r P_1 \quad \dots (18)$$

$$U_b = -E r P_1 + \gamma E \left( 1 - K_a K_b^3 \eta^3 \lambda E^2 / (K_a - K_b) \right) R^3 P_1 / r^2 \quad \dots (19)$$

จากผลเฉลยข้างต้น แสดงให้เห็นว่าจากสมบัติความไม่เป็นเชิงเส้นของทรงกลม สนามข้างในทรงกลมจะมีขนาดมากกว่าในกรณีที่ไม่พิจารณาในทำนองเดียวกันแต่ทรงกลมเป็นแบบเชิงเส้น

แต่ในกรณีตรงข้ามค่าสนามไดโพลภายนอกทรงกลมจะลดลงถ้า  $K_a > K_b$  และจะเพิ่มขึ้นเมื่อ  $K_a < K_b$  ซึ่งผลเหล่านี้เกี่ยวข้องกับทฤษฎีการลดลงของค่าสภาพยอมภายใน ( internal permittivity ) เนื่องมาจากสนามภายในทรงกลม



ค โปรแกรม trial linear.nb

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```

In[1]:= << Calculus`VectorAnalysis`
In[2]:= SetCoordinates[Spherical[r, θ, φ]];
In[3]:= << Graphics`Legend`
In[4]:= << Graphics`Graphics`
In[5]:=

In[6]:=  $\Phi_1 = (c + r) * E_0 * LegendreP[1, Cos[\theta]]$ 
Out[6]=  $c r \text{Cos}[\theta] e_0$ 

In[7]:=  $\Phi_m = r * E_0 * LegendreP[1, Cos[\theta]] + (b * a^3 * r^{-2}) * E_0 * LegendreP[1, Cos[\theta]]$ 
Out[7]=  $\frac{a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^2} + r \text{Cos}[\theta] e_0$ 

In[8]:=

In[9]:=  $E_1 = \text{Grad}[\Phi_1]$ 
Out[9]=  $\{c \text{Cos}[\theta] e_0, -c \text{Sin}[\theta] e_0, 0\}$ 

In[10]:=  $E_m = \text{Grad}[\Phi_m]$ 
Out[10]=  $\left\{ \text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3}, \frac{-\frac{a^3 b \text{Sin}[\theta] e_0}{r^2} - r \text{Sin}[\theta] e_0}{r}, 0 \right\}$ 

In[11]:=  $E_{n1} = \partial_r \Phi_1$ 
Out[11]=  $c \text{Cos}[\theta] e_0$ 

In[12]:=  $E_{nm} = \partial_r \Phi_m$ 
Out[12]=  $\text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3}$ 

In[13]:=  $G_1 = \epsilon_1 * (E_1 \cdot E_1)$ 
Out[13]=  $(c^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 + c^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2) \epsilon_1$ 

In[14]:=  $G_1 = \text{Expand}[G_1, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$ 
Out[14]=  $c^2 e_0^2 \epsilon_1$ 

In[15]:=  $G_m = \epsilon_m * (E_m \cdot E_m)$ 
Out[15]=  $\left( \left( \text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \text{Cos}[\theta] e_0}{r^3} \right)^2 + \frac{\left( -\frac{a^3 b \text{Sin}[\theta] e_0}{r^2} - r \text{Sin}[\theta] e_0 \right)^2}{r^2} \right) \epsilon_m$ 

In[16]:= Expand[%]
Out[16]=  $\text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m + \frac{4 a^6 b^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^6} - \frac{4 a^3 b \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^3} +$   

 $\text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m + \frac{a^6 b^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^6} + \frac{2 a^3 b \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^3}$ 

```

In[17]:=  $G_m = \text{Expand}[G_m, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$$\text{Out}[17] = e_0^2 \epsilon_m + \frac{5 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m}{2 r^6} - \frac{a^3 b e_0^2 \epsilon_m}{r^3} + \frac{3 a^6 b^2 \cos[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{2 r^6} - \frac{3 a^3 b \cos[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^3} - \frac{3 a^6 b^2 \sin[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{2 r^6} + \frac{3 a^3 b \sin[\theta]^2 e_0^2 \epsilon_m}{r^3}$$

In[18]:=

In[19]:=  $P = \int_0^a \int_0^\pi G_1 * 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] \, d\theta \, dr$

$$\text{Out}[19] = \frac{4}{3} a^3 c^2 \pi e_0^2 \epsilon_i$$

In[20]:=  $P_0 = P / \left( \frac{4}{3} \pi \right)$

$$\text{Out}[20] = a^3 c^2 e_0^2 \epsilon_i$$

In[21]:=  $P_0 = \text{Expand}[\%]$

$$\text{Out}[21] = a^3 c^2 e_0^2 \epsilon_i$$

In[22]:=  $P_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[P_0, a^3], a^3]] * \Omega_i$

$$\text{Out}[22] = c^2 e_0^2 \epsilon_i \Omega_i$$

In[23]:=  $Q = \int_a^R \int_0^\pi G_m * 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] \, d\theta \, dr$

$$\text{Out}[23] = 2 \pi \left( \frac{2 (-a^6 e_0^2 \epsilon_m + 2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m)}{3 a^3} - \frac{2 (2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m - R^6 e_0^2 \epsilon_m)}{3 R^3} \right)$$

In[24]:=  $\text{Expand}[\%]$

$$\text{Out}[24] = -\frac{4}{3} a^3 \pi e_0^2 \epsilon_m + \frac{8}{3} a^3 b^2 \pi e_0^2 \epsilon_m - \frac{8 a^6 b^2 \pi e_0^2 \epsilon_m}{3 R^3} + \frac{4}{3} \pi R^3 e_0^2 \epsilon_m$$

In[25]:=  $Q_0 = Q / \left( \frac{4}{3} \pi \right)$

$$\text{Out}[25] = \frac{3}{2} \left( \frac{2 (-a^6 e_0^2 \epsilon_m + 2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m)}{3 a^3} - \frac{2 (2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m - R^6 e_0^2 \epsilon_m)}{3 R^3} \right)$$

In[26]:=  $Q_0 = \text{Expand}[\%]$

$$\text{Out}[26] = -a^3 e_0^2 \epsilon_m + 2 a^3 b^2 e_0^2 \epsilon_m - \frac{2 a^6 b^2 e_0^2 \epsilon_m}{R^3} + R^3 e_0^2 \epsilon_m$$

In[27]:=  $Q_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[Q_0, a^3], a^3]] * \Omega_i$

$$\text{Out}[27] = (-1 + 2 b^2) e_0^2 \epsilon_m \Omega_i$$

In[28]:=  $Q_2 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[Q_0, R^3], R^3]] * V$

$$\text{Out}[28] = V e_0^2 \epsilon_m$$

In[29]:=

In[30]:=  $\mathbf{E}_{mR} = \mathbf{E}_m / . \{r \rightarrow R\}$

Out[30]=  $\frac{a^3 b \cos[\theta] \mathbf{e}_0}{R^2} + R \cos[\theta] \mathbf{e}_0$

In[31]:=  $\mathbf{E}_r = (\partial_r \mathbf{E}_m)$

Out[31]=  $\cos[\theta] \mathbf{e}_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] \mathbf{e}_0}{r^3}$

In[32]:=  $\mathbf{D}_r = \mathbf{e}_m * \mathbf{E}_r$

Out[32]=  $\left( \cos[\theta] \mathbf{e}_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] \mathbf{e}_0}{r^3} \right) \mathbf{e}_m$

In[33]:=  $\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_r / . \{r \rightarrow R\}$

Out[33]=  $\left( \cos[\theta] \mathbf{e}_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] \mathbf{e}_0}{R^3} \right) \mathbf{e}_m$

In[34]:=  $\mathbf{W}_s = \int_0^\pi (\mathbf{E}_{mR} * \mathbf{D}_R * 2 * \pi * R^2 * \sin[\theta]) d\theta$

Out[34]=  $\frac{4 \pi (-2 a^6 b^2 \mathbf{e}_0^2 - a^3 b R^3 \mathbf{e}_0^2 + R^6 \mathbf{e}_0^2) \mathbf{e}_m}{3 R^3}$

In[35]:=  $\mathbf{W}_s = \text{Expand}[\%]$

Out[35]=  $-\frac{4}{3} a^3 b \pi \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m - \frac{8 a^6 b^2 \pi \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m}{3 R^3} + \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m$

In[36]:=  $\mathbf{s}_0 = \text{Expand}[\mathbf{W}_s / \left( \frac{4}{3} \pi \right)]$

Out[36]=  $-a^3 b \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m - \frac{2 a^6 b^2 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m}{R^3} + R^3 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m$

In[37]:=  $\text{surface} = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[\mathbf{s}_0, a^3], a^3]] * \Omega_1$

Out[37]=  $-b \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m \Omega_1$

In[38]:=

In[39]:=  $\mathbf{W} = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) + 2 * \text{surface}$

Out[39]=  $V \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m + c^2 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1 \Omega_1 - 2 b \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m \Omega_1 + (-1 + 2 b^2) \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m \Omega_1$

In[40]:=

In[41]:=  $\mathbf{W}_e = \mathbf{W} / . \{c \rightarrow (1 + b)\}$

Out[41]=  $V \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m + (1 + b)^2 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1 \Omega_1 - 2 b \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m \Omega_1 + (-1 + 2 b^2) \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m \Omega_1$

In[42]:=  $\text{trial} = \partial_b \mathbf{W}_e$

Out[42]=  $2 (1 + b) \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_1 \Omega_1 - 2 \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m \Omega_1 + 4 b \mathbf{e}_0^2 \mathbf{e}_m \Omega_1$



In[43]:= Solve[trial == 0, b]

Out[43]=  $\left\{ \left\{ b \rightarrow -\frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right\} \right\}$

In[44]:=

In[45]:= er = Simplify[W]

Out[45]=  $\epsilon_0^2 (c^2 \epsilon_i \Omega_i + \epsilon_m (V + (-1 - 2b + 2b^2) \Omega_i))$

In[46]:= er = er /. {V → 1,  $\Omega_i$  → p,  $\epsilon_0$  → 1}

Out[46]=  $c^2 p \epsilon_i + (1 + (-1 - 2b + 2b^2) p) \epsilon_m$

In[47]:= er = er /. {c → (1 + b)}

Out[47]=  $(1 + b)^2 p \epsilon_i + (1 + (-1 - 2b + 2b^2) p) \epsilon_m$

In[48]:=  $\epsilon_e = er /. \left\{ b \rightarrow -\frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right\}$

Out[48]=  $p \epsilon_i \left( 1 - \frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right)^2 + \epsilon_m \left( 1 + p \left( -1 + \frac{2(\epsilon_i - \epsilon_m)^2}{(\epsilon_i + 2\epsilon_m)^2} + \frac{2(\epsilon_i - \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m} \right) \right)$

In[49]:=  $\epsilon_e = Simplify[\%]$

Out[49]=  $\frac{\epsilon_m ((1 + 3p) \epsilon_i + (2 - 3p) \epsilon_m)}{\epsilon_i + 2\epsilon_m}$

In[50]:=

In[51]:= Wer = We /. {V → 1,  $\Omega_i$  → p,  $\epsilon_0$  → 1,  $\epsilon_i$  → y,  $\epsilon_m$  → 1}

Out[51]=  $1 - 2bp + (-1 + 2b^2) p + (1 + b)^2 py$

In[52]:= Wer = Wer /. {p → 0.08}

Out[52]=  $1 - 0.16b + 0.08(-1 + 2b^2) + 0.08(1 + b)^2 y$

In[53]:= r[0] = 0; r[1] = 0.02; r[2] = 0.1; r[3] = 0.2; r[4] = 0.3;  
 r[5] = 0.4; r[6] = 0.6; r[7] = 0.8; r[8] = 1; r[9] = 1.2;  
 r[10] = 1.5; r[11] = 2; r[12] = 3; r[13] = 4; r[14] = 5;  
 r[15] = 6; r[16] = 8; r[17] = 10;

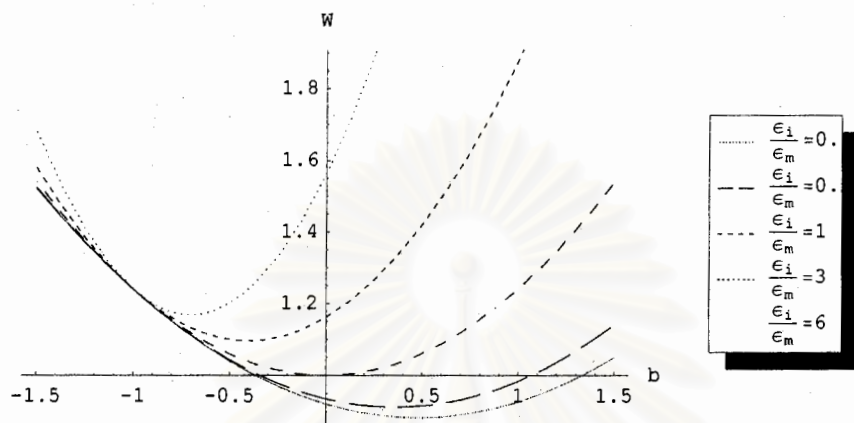
In[57]:= Do[h = Wer /. {y → r[i]};  
 t[i] = h;  
 , {i, 0, 17}]

In[58]:=

```

In[59]:= Plot[{t[1], t[3], t[8], t[12], t[16]}, {b, -1.5, 1.5},
  PlotLegend -> {" $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.02$ ", " $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.2$ ", " $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 1$ ", " $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 3$ ", " $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 6$ "},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.001, 0.001}], Dashing[{0.06, 0.02}], Dashing[
    {0.02, 0.02}], Dashing[{0.0095, 0.01}], Dashing[{0.002, 0.009}]},
  LegendPosition -> {1.1, -.4}, LegendSize -> 0.7, AxesLabel -> {"b", "W"}]

```



Out[59]= - Graphics -

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
In[60]:= Do[z = r[j];
  sol1[j] = FindMinimum[Ver /. {y -> z}, {b, 0}];
  Print[" $\frac{e_i}{e_m}$ [" , j, "] = " , z, " " , sol1[j]];
  , {j, 1, 17}]
```

$$\frac{e_i}{e_m}[1] = 0.02 \quad (0.883564, \{b \rightarrow 0.485149\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[2] = 0.1 \quad (0.897143, \{b \rightarrow 0.428571\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[3] = 0.2 \quad (0.912727, \{b \rightarrow 0.363636\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[4] = 0.3 \quad (0.926957, \{b \rightarrow 0.304348\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[5] = 0.4 \quad (0.94, \{b \rightarrow 0.25\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[6] = 0.6 \quad (0.963077, \{b \rightarrow 0.153846\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[7] = 0.8 \quad (0.982857, \{b \rightarrow 0.0714285\})$$

FindMinimum::fmgz :

Encountered a vanishing gradient. The result returned may not be a minimum; it may be a maximum or a saddle point.

$$\frac{e_i}{e_m}[8] = 1 \quad (1., \{b \rightarrow 0.\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[9] = 1.2 \quad (1.015, \{b \rightarrow -0.0625\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[10] = 1.5 \quad (1.03429, \{b \rightarrow -0.142857\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[11] = 2 \quad (1.06, \{b \rightarrow -0.25\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[12] = 3 \quad (1.096, \{b \rightarrow -0.4\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[13] = 4 \quad (1.12, \{b \rightarrow -0.5\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[14] = 5 \quad (1.13714, \{b \rightarrow -0.571429\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[15] = 6 \quad (1.15, \{b \rightarrow -0.625\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[16] = 8 \quad (1.168, \{b \rightarrow -0.7\})$$

$$\frac{e_i}{e_m}[17] = 10 \quad (1.18, \{b \rightarrow -0.75\})$$

```
In[61]:= ko[0] = 0.5000000000000279;
```

```
In[62]:= ko[1] = 0.48514851485145294;
```

```
In[63]:= ko[2] = 0.42857142857142916;
```

```
In[64]:= ko[3] = 0.3636363636363715;
```

```
In[65]:= ko[4] = 0.3043478260869554;
```

```
In[66]:= ko[5] = 0.2499999999999953;
```

```
In[67]:= ko[6] = 0.15384615384604475;
```

```

In[68]:= ko[7] = 0.0714285714285669;
In[69]:= ko[8] = 0.;
In[70]:= ko[9] = -0.062499978991859544;
In[71]:= ko[10] = -0.1428571428570535;
In[72]:= ko[11] = -0.2500000191824921;
In[73]:= ko[12] = -0.39999998256282;
In[74]:= ko[13] = -0.499999983912505;
In[75]:= ko[14] = -0.5714285714285705;
In[76]:= ko[15] = -0.6249999999999999;
In[77]:= ko[16] = -0.70000000000000741;
In[78]:= ko[17] = -0.7499999999999998;
In[79]:=

In[80]:= (*consider continuity of normal component
          of  $\varphi$  and D on surface of inclusion ( $r=a$ *)

In[81]:=  $\epsilon_i[0] = 0;$            $\epsilon_m[0] = 1;$ 
In[82]:=  $\epsilon_i[1] = 0.02;$       $\epsilon_m[1] = 1;$ 
In[83]:=  $\epsilon_i[2] = 0.1;$        $\epsilon_m[2] = 1;$ 
In[84]:=  $\epsilon_i[3] = 0.2;$       $\epsilon_m[3] = 1;$ 
In[85]:=  $\epsilon_i[4] = 0.3;$       $\epsilon_m[4] = 1;$ 
In[86]:=  $\epsilon_i[5] = 0.4;$       $\epsilon_m[5] = 1;$ 
In[87]:=  $\epsilon_i[6] = 0.6;$       $\epsilon_m[6] = 1;$ 
In[88]:=  $\epsilon_i[7] = 0.8;$       $\epsilon_m[7] = 1;$ 
In[89]:=  $\epsilon_i[8] = 1;$          $\epsilon_m[8] = 1;$ 
In[90]:=  $\epsilon_i[9] = 1.2;$       $\epsilon_m[9] = 1;$ 
In[91]:=  $\epsilon_i[10] = 1.5;$       $\epsilon_m[10] = 1;$ 
In[92]:=  $\epsilon_i[11] = 2;$         $\epsilon_m[11] = 1;$ 
In[93]:=  $\epsilon_i[12] = 3;$         $\epsilon_m[12] = 1;$ 
In[94]:=  $\epsilon_i[13] = 4;$         $\epsilon_m[13] = 1;$ 
In[95]:=  $\epsilon_i[14] = 5;$         $\epsilon_m[14] = 1;$ 
In[96]:=  $\epsilon_i[15] = 6;$         $\epsilon_m[15] = 1;$ 
In[97]:=  $\epsilon_i[16] = 8;$         $\epsilon_m[16] = 1;$ 
In[98]:=  $\epsilon_i[17] = 10;$        $\epsilon_m[17] = 1;$ 

```

In[99]:=  $G_{ri} = e_i * E_{ni}$

Out[99]=  $c \cos[\theta] e_0 e_i$

In[100]:=  $G_{rm} = e_m * E_{nm}$

Out[100]=  $\left( \cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3} \right) e_m$

In[101]:=  $G_{ai} = G_{ri} /. \{c \rightarrow 1 + b, E_0 \rightarrow 1, r \rightarrow a\}$

Out[101]=  $(1 + b) \cos[\theta] e_i$

In[102]:=  $G_{ai} = \text{Expand}[G_{ai}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

Out[102]=  $\cos[\theta] e_i + b \cos[\theta] e_i$

In[103]:=  $\text{Simplify}[G_{ai}]$

Out[103]=  $(1 + b) \cos[\theta] e_i$

In[104]:=  $G_{am} = G_{rm} /. \{c \rightarrow 1 + b, E_0 \rightarrow 1, r \rightarrow a\}$

Out[104]=  $(\cos[\theta] - 2 b \cos[\theta]) e_m$

In[105]:=  $G_{am} = \text{Expand}[G_{am}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

Out[105]=  $\cos[\theta] e_m - 2 b \cos[\theta] e_m$

In[106]:=  $\text{Simplify}[G_{am}]$

Out[106]=  $(1 - 2 b) \cos[\theta] e_m$

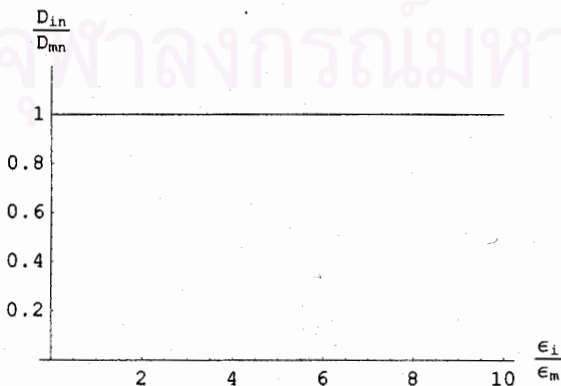
In[107]:=  $eq = \text{Simplify}[G_{ai} / G_{am}]$

Out[107]=  $\frac{(1 + b) e_i}{(1 - 2 b) e_m}$

In[108]:=  $\text{Do}[qe[k] = eq /. \{b \rightarrow ko[k], e_i \rightarrow r[k], e_m \rightarrow 1\}, \{k, 1, 17\}]$

In[109]:=  $GTO = \text{Table}[\{r[i], qe[i]\}, \{i, 1, 17\}];$

In[110]:=  $\text{ListPlot}[GTO, \text{AxesLabel} \rightarrow \left\{ \frac{e_i}{e_m}, \frac{D_{in}}{D_{mn}} \right\},$   
 $\text{PlotRange} \rightarrow \{0, 1.2\}, \text{PlotJoined} \rightarrow \text{True}]$



Out[110]= - Graphics -

In[111]:=

```
In[112]:= xm =  $\frac{1-r}{r+2}$ ; Gt, AppendLabel -> {" $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$ "}
```

```
Out[112]=  $\frac{1-r}{2+r}$ 
```

```
In[113]:= tr = 1 - 3*p*xm
```

```
Out[113]=  $1 - \frac{3p(1-r)}{2+r}$ 
```

```
In[114]:= u = tr /. (p -> 0.08)
```

```
Out[114]=  $1 - \frac{0.24(1-r)}{2+r}$ 
```

```
In[115]:= Do[tu[i] = u /. {r -> r[i]};
```

```
Print[" $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m}$  = ", r[i], "     $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m}$  = ", tu[i]];
, {i, 1, 17}]
```

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.02$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 0.883564$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.1$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 0.897143$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.2$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 0.912727$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.3$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 0.926957$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.4$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 0.94$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.6$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 0.963077$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 0.8$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 0.982857$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 1$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 1.2$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.015$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 1.5$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.03429$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 2$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.06$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 3$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.096$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 4$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.12$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 5$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.13714$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 6$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.15$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 8$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.168$

$\frac{\epsilon_i}{\epsilon_m} = 10$      $\frac{\epsilon_e}{\epsilon_m} = 1.18$

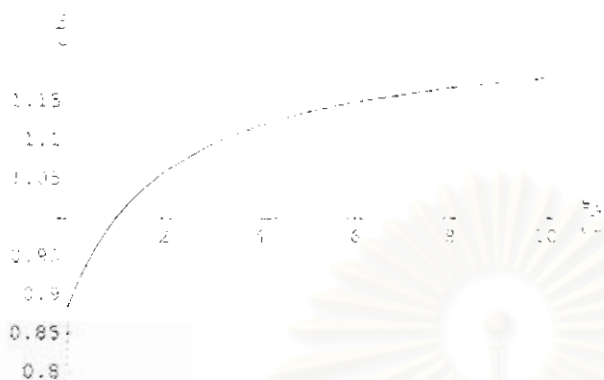
```
In[116]:= Gt = Table[{r[i], tu[i]}, {i, 1, 17}];
```



```

In[117]:= ListPlot[Gt, AxesLabel -> {" $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_m}$ ", " $\frac{\epsilon_r}{\epsilon_m}$ "},
  PlotRange -> {0.8, 1.2}, PlotJoined -> True]

```



```
Out[117]= - Graphics -
```



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ง โปรแกรม trial strongly nonlinear.nb

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```

In[1]:= << Calculus`VectorAnalysis`
In[2]:= SetCoordinates[Spherical[r,  $\theta$ ,  $\phi$ ]];
In[3]:= << Graphics`Legend`
In[4]:= << Graphics`Graphics`
In[5]:=

In[6]:=  $\Phi_i = (c+r) * E_0 * LegendreP[1, Cos[\theta]]$ 
Out[6]=  $c r \cos[\theta] e_0$ 

In[7]:=  $\Phi_m = r * E_0 * LegendreP[1, Cos[\theta]] + (b * a^3 * r^{-2}) * E_0 * LegendreP[1, Cos[\theta]]$ 
Out[7]=  $\frac{a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^2} + r \cos[\theta] e_0$ 

In[8]:=

In[9]:=  $E_i = Grad[\Phi_i]$ 
Out[9]=  $\{c \cos[\theta] e_0, -c \sin[\theta] e_0, 0\}$ 

In[10]:=  $E_m = Grad[\Phi_m]$ 
Out[10]=  $\left\{ \cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3}, \frac{-a^3 b \sin[\theta] e_0}{r^2} - r \sin[\theta] e_0, 0 \right\}$ 

In[11]:=  $E_{ni} = \partial_r \Phi_i$ 
Out[11]=  $c \cos[\theta] e_0$ 

In[12]:=  $E_{nm} = \partial_r \Phi_m$ 
Out[12]=  $\cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3}$ 

In[13]:=  $G_{i0} = E_i . E_i$ 
Out[13]=  $c^2 \cos^2[\theta] e_0^2 + c^2 \sin^2[\theta] e_0^2$ 

In[14]:=  $G_i = Expand[G_{i0}, Trig \rightarrow True]$ 
Out[14]=  $c^2 e_0^2$ 

In[15]:=  $G_i = \chi_i * G_i^2$ 
Out[15]=  $c^4 e_0^4 \chi_i$ 

In[16]:=  $G_{ri} = \chi_i * G_{i0} * E_{ni}$ 
Out[16]=  $c \cos[\theta] e_0 (c^2 \cos^2[\theta] e_0^2 + c^2 \sin^2[\theta] e_0^2) \chi_i$ 

In[17]:=  $G_{m0} = E_m . E_m$ 
Out[17]=  $\left( \cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3} \right)^2 + \frac{\left( -\frac{a^3 b \sin[\theta] e_0}{r^2} - r \sin[\theta] e_0 \right)^2}{r^2}$ 

In[18]:=  $G_m = Expand[G_{m0}, Trig \rightarrow True];$ 

```

$$\text{In[19]} := \mathbf{G}_m = \chi_m * \mathbf{G}_m^2$$

$$\text{Out[19]} = \left( e_0^2 + \frac{5 a^6 b^2 e_0^2}{2 r^6} - \frac{a^3 b e_0^2}{r^3} + \frac{3 a^6 b^2 \cos[\theta]^2 e_0^2}{2 r^6} - \frac{3 a^3 b \cos[\theta]^2 e_0^2}{r^3} - \frac{3 a^6 b^2 \sin[\theta]^2 e_0^2}{2 r^6} + \frac{3 a^3 b \sin[\theta]^2 e_0^2}{r^3} \right) \wedge 2 \chi_m$$

$$\text{In[20]} := \mathbf{G}_{rm} = \chi_m * \mathbf{G}_{m0} * \mathbb{E}_{nm}$$

$$\text{Out[20]} = \left( \cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3} \right) \left( \left( \cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3} \right)^2 + \frac{\left( -\frac{a^3 b \sin[\theta] e_0}{r^2} - r \sin[\theta] e_0 \right)^2}{r^2} \right) \chi_m$$

$$\text{In[21]} :=$$

$$P = \int_0^a \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] * G_i d\theta dr$$

$$\text{Out[21]} = \frac{4}{3} a^3 c^4 \pi e_0^4 \chi_i$$

$$\text{In[22]} := P_0 = P / \left( \frac{4}{3} \pi \right)$$

$$\text{Out[22]} = a^3 c^4 e_0^4 \chi_i$$

$$\text{In[23]} := P_0 = \text{Expand}[\%]$$

$$\text{Out[23]} = a^3 c^4 e_0^4 \chi_i$$

$$\text{In[24]} := P_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[P_0, a^3], a^3]] * \Omega_i$$

$$\text{Out[24]} = c^4 e_0^4 \chi_i \Omega_i$$

$$\text{In[25]} := Q = \int_a^R \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] * G_m d\theta dr$$

$$\text{Out[25]} = 2 \pi \left( \frac{2 (-5 a^{12} e_0^4 + 36 a^{12} b^2 e_0^4 - 8 a^{12} b^3 e_0^4 + 8 a^{12} b^4 e_0^4)}{15 a^9} - \frac{2 (8 a^{12} b^4 e_0^4 - 8 a^9 b^3 R^3 e_0^4 + 36 a^6 b^2 R^6 e_0^4 - 5 R^{12} e_0^4)}{15 R^9} \right) \chi_m$$

$$\text{In[26]} := \text{Expand}[\%]$$

$$\text{Out[26]} = -\frac{4}{3} a^3 \pi e_0^4 \chi_m + \frac{48}{5} a^3 b^2 \pi e_0^4 \chi_m - \frac{32}{15} a^3 b^3 \pi e_0^4 \chi_m + \frac{32}{15} a^3 b^4 \pi e_0^4 \chi_m - \frac{32 a^{12} b^4 \pi e_0^4 \chi_m}{15 R^9} + \frac{32 a^9 b^3 \pi e_0^4 \chi_m}{15 R^6} - \frac{48 a^6 b^2 \pi e_0^4 \chi_m}{5 R^3} + \frac{4}{3} \pi R^3 e_0^4 \chi_m$$

$$\text{In[27]} := Q_0 = Q / \left( \frac{4}{3} \pi \right)$$

$$\text{Out[27]} = \frac{3}{2} \left( \frac{2 (-5 a^{12} e_0^4 + 36 a^{12} b^2 e_0^4 - 8 a^{12} b^3 e_0^4 + 8 a^{12} b^4 e_0^4)}{15 a^9} - \frac{2 (8 a^{12} b^4 e_0^4 - 8 a^9 b^3 R^3 e_0^4 + 36 a^6 b^2 R^6 e_0^4 - 5 R^{12} e_0^4)}{15 R^9} \right) \chi_m$$

In[28]:=  $Q_0 = \text{Expand}[\%]$

$$\text{Out}[28] = -a^3 e_0^4 \chi_m + \frac{36}{5} a^3 b^2 e_0^4 \chi_m - \frac{8}{5} a^3 b^3 e_0^4 \chi_m + \frac{8}{5} a^3 b^4 e_0^4 \chi_m - \frac{8 a^{12} b^4 e_0^4 \chi_m}{5 R^9} + \frac{8 a^9 b^3 e_0^4 \chi_m}{5 R^6} - \frac{36 a^6 b^2 e_0^4 \chi_m}{5 R^3} + R^3 e_0^4 \chi_m$$

In[29]:=  $Q_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[Q_0, a^3], a^3]] * \Omega_1$

$$\text{Out}[29] = \frac{1}{5} (-5 + 36 b^2 - 8 b^3 + 8 b^4) e_0^4 \chi_m \Omega_1$$

In[30]:=  $Q_2 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[Q_0, R^3], R^3]] * V$

$$\text{Out}[30] = V e_0^4 \chi_m$$

In[31]:=  $\text{surface} = -b E_0^4 \chi_m \Omega_1$

$$\text{Out}[31] = -b e_0^4 \chi_m \Omega_1$$

In[32]:=

In[33]:=  $W = (P_1 + Q_1 + Q_2) + 4 * \text{surface}$

$$\text{Out}[33] = V e_0^4 \chi_m + c^4 e_0^4 \chi_i \Omega_1 - 4 b e_0^4 \chi_m \Omega_1 + \frac{1}{5} (-5 + 36 b^2 - 8 b^3 + 8 b^4) e_0^4 \chi_m \Omega_1$$

In[34]:=

In[35]:=  $We = W /. \{c \rightarrow (1 + b)\}$

$$\text{Out}[35] = V e_0^4 \chi_m + (1 + b)^4 e_0^4 \chi_i \Omega_1 - 4 b e_0^4 \chi_m \Omega_1 + \frac{1}{5} (-5 + 36 b^2 - 8 b^3 + 8 b^4) e_0^4 \chi_m \Omega_1$$

In[36]:=  $Wer = We /. \{V \rightarrow 1, \Omega_1 \rightarrow p, E_0 \rightarrow 1, \chi_i \rightarrow y, \chi_m \rightarrow 1\}$

$$\text{Out}[36] = 1 - 4 b p + \frac{1}{5} (-5 + 36 b^2 - 8 b^3 + 8 b^4) p + (1 + b)^4 p y$$

In[37]:=  $\text{trial} = \partial_b Wer$

$$\text{Out}[37] = -4 p + \frac{1}{5} (72 b - 24 b^2 + 32 b^3) p + 4 (1 + b)^3 p y$$

In[38]:=  $\text{Factor}[\%]$

$$\text{Out}[38] = \frac{4}{5} p (-5 + 18 b - 6 b^2 + 8 b^3 + 5 y + 15 b y + 15 b^2 y + 5 b^3 y)$$

In[39]:=

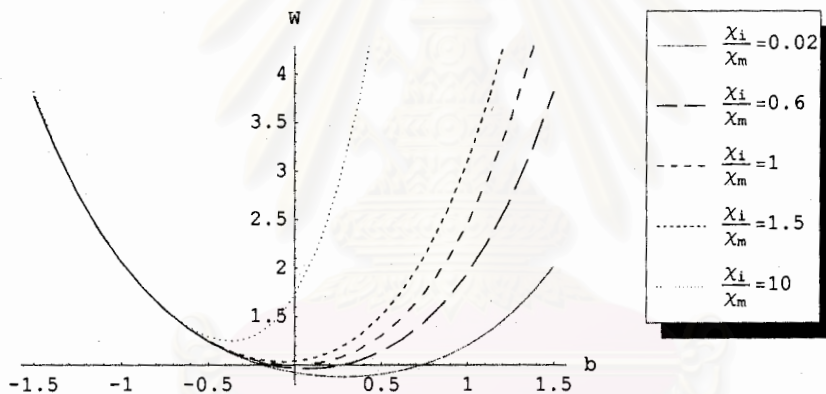
```
In[40]:= Wer = Wer /. {p -> 0.08}
```

```
Out[40]= 1 - 0.32 b + 0.016 (-5 + 36 b2 - 8 b3 + 8 b4) + 0.08 (1 + b)4 y
```

```
In[41]:= r[0] = 0; r[1] = 0.02; r[2] = 0.1; r[3] = 0.2; r[4] = 0.3;
r[5] = 0.4; r[6] = 0.6; r[7] = 0.8; r[8] = 1; r[9] = 1.2;
r[10] = 1.5; r[11] = 2; r[12] = 3; r[13] = 4; r[14] = 5;
r[15] = 6; r[16] = 8; r[17] = 10;
```

```
In[45]:= Do[h = Wer /. {y -> r[i]};
t[i] = h;
, {i, 0, 17}]
```

```
In[46]:= Plot[{t[1], t[6], t[8], t[10], t[17]},
{b, -1.5, 1.5}, PlotStyle -> {Dashing[{0.001, 0.001}],
Dashing[{0.06, 0.02}], Dashing[{0.02, 0.02}],
Dashing[{0.0095, 0.01}], Dashing[{0.002, 0.009}]}, PlotLegend ->
{" $\frac{X_i}{X_m}=0.02$ ", " $\frac{X_i}{X_m}=0.6$ ", " $\frac{X_i}{X_m}=1$ ", " $\frac{X_i}{X_m}=1.5$ ", " $\frac{X_i}{X_m}=10$ "},
LegendPosition -> {1.1, -.4}, LegendSize -> 1, AxesLabel -> {"b", "W"}]
```



```
Out[46]= - Graphics -
```

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



```
In[47]:= Do[z = r[j];
      sol[j] = FindMinimum[Ver /. {y -> z}, {b, 0}];
      Print[" $\frac{X_i}{X_m}$ [" , j, "] = " , z, " " , sol[j]];
      , {j, 1, 17}]
```

$$\frac{X_i}{X_m} [1] = 0.02 \quad (0.877826, \{b \rightarrow 0.282649\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [2] = 0.1 \quad (0.893944, \{b \rightarrow 0.237963\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [3] = 0.2 \quad (0.911363, \{b \rightarrow 0.192714\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [4] = 0.3 \quad (0.926546, \{b \rightarrow 0.155579\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [5] = 0.4 \quad (0.940039, \{b \rightarrow 0.124202\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [6] = 0.6 \quad (0.96329, \{b \rightarrow 0.0733163\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [7] = 0.8 \quad (0.982938, \{b \rightarrow 0.0330997\})$$

FindMinimum::fmgz :

Encountered a vanishing gradient. The result returned may not be a minimum; it may be a maximum or a saddle point.

$$\frac{X_i}{X_m} [8] = 1 \quad (1., \{b \rightarrow 0.\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [9] = 1.2 \quad (1.01511, \{b \rightarrow -0.0280311\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [10] = 1.5 \quad (1.03498, \{b \rightarrow -0.063262\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [11] = 2 \quad (1.06275, \{b \rightarrow -0.109687\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [12] = 3 \quad (1.10562, \{b \rightarrow -0.175896\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [13] = 4 \quad (1.13838, \{b \rightarrow -0.222671\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [14] = 5 \quad (1.16491, \{b \rightarrow -0.258503\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [15] = 6 \quad (1.18723, \{b \rightarrow -0.287357\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [16] = 8 \quad (1.2234, \{b \rightarrow -0.331911\})$$

$$\frac{X_i}{X_m} [17] = 10 \quad (1.25211, \{b \rightarrow -0.365512\})$$

In[48]:= **b[1] = 0.28264859737222364;**

In[49]:= **b[2] = 0.23796315550648908;**

In[50]:= **b[3] = 0.19271437201207217;**

In[51]:= **b[4] = 0.15557921973305727;**

In[52]:= **b[5] = 0.12420169049204997;**

In[53]:= **b[6] = 0.07331626409965138;**

In[54]:= **b[7] = 0.033099700453945;**

```

In[55]:= b[8] = 0.;
In[56]:= b[9] = -0.028031127081525473;
In[57]:= b[10] = -0.06326197529513779;
In[58]:= b[11] = -0.10968745278730464;
In[59]:= b[12] = -0.1758963890774182;
In[60]:= b[13] = -0.2226705649816825;
In[61]:= b[14] = -0.2585032590067835;
In[62]:= b[15] = -0.28735687095996537;
In[63]:= b[16] = -0.3319105465712223;
In[64]:= b[17] = -0.3655118201199229;
In[65]:= (*consider continuity of normal
           component of D on surface of inclusion (r=a)*)
In[66]:= Xi[1] = 0.02;      Xm[1] = 1;
In[67]:= Xi[2] = 0.1;      Xm[2] = 1;
In[68]:= Xi[3] = 0.2;      Xm[3] = 1;
In[69]:= Xi[4] = 0.3;      Xm[4] = 1;
In[70]:= Xi[5] = 0.4;      Xm[5] = 1;
In[71]:= Xi[6] = 0.6;      Xm[6] = 1;
In[72]:= Xi[7] = 0.8;      Xm[7] = 1;
In[73]:= Xi[8] = 1;        Xm[8] = 1;
In[74]:= Xi[9] = 1.2;      Xm[9] = 1;
In[75]:= Xi[10] = 1.5;     Xm[10] = 1;
In[76]:= Xi[11] = 2;       Xm[11] = 1;
In[77]:= Xi[12] = 3;       Xm[12] = 1;
In[78]:= Xi[13] = 4;       Xm[13] = 1;
In[79]:= Xi[14] = 5;       Xm[14] = 1;
In[80]:= Xi[15] = 6;       Xm[15] = 1;
In[81]:= Xi[16] = 8;       Xm[16] = 1;
In[82]:= Xi[17] = 10;      Xm[17] = 1;
In[83]:= Gai = Gri /. {c → 1 + b, E0 → 1, r → a, Xi → Xi[k]}
Out[83]= (1 + b) Cos[θ] ((1 + b)2 Cos[θ]2 + (1 + b)2 Sin[θ]2) Xi[k]

```

In[84]:=  $G_{a1} = \text{Expand}[G_{a1}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

Out[84]=  $\text{Cos}[\theta] \chi_i[k] + 3 b \text{Cos}[\theta] \chi_i[k] + 3 b^2 \text{Cos}[\theta] \chi_i[k] + b^3 \text{Cos}[\theta] \chi_i[k]$

In[85]:=  $\text{Simplify}[G_{a1}]$

Out[85]=  $(1 + b)^3 \text{Cos}[\theta] \chi_i[k]$

In[86]:=  $G_{am} = G_{rm} /. \{c \rightarrow 1 + b, E_0 \rightarrow 1, r \rightarrow a, \chi_m \rightarrow \chi_m[k]\}$

Out[86]=  $(\text{Cos}[\theta] - 2 b \text{Cos}[\theta]) \left( (\text{Cos}[\theta] - 2 b \text{Cos}[\theta])^2 + \frac{(-a \text{Sin}[\theta] - a b \text{Sin}[\theta])^2}{a^2} \right) \chi_m[k]$

In[87]:=  $G_{am} = \text{Expand}[G_{am}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

Out[87]=  $\text{Cos}[\theta] \chi_m[k] - 3 b \text{Cos}[\theta] \chi_m[k] + \frac{9}{2} b^2 \text{Cos}[\theta] \chi_m[k] - 5 b^3 \text{Cos}[\theta] \chi_m[k] - 3 b \text{Cos}[\theta]^3 \chi_m[k] + \frac{15}{2} b^2 \text{Cos}[\theta]^3 \chi_m[k] - 3 b^3 \text{Cos}[\theta]^3 \chi_m[k] + 3 b \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta]^2 \chi_m[k] - \frac{15}{2} b^2 \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta]^2 \chi_m[k] + 3 b^3 \text{Cos}[\theta] \text{Sin}[\theta]^2 \chi_m[k]$

In[88]:=  $\text{Simplify}[G_{am}]$

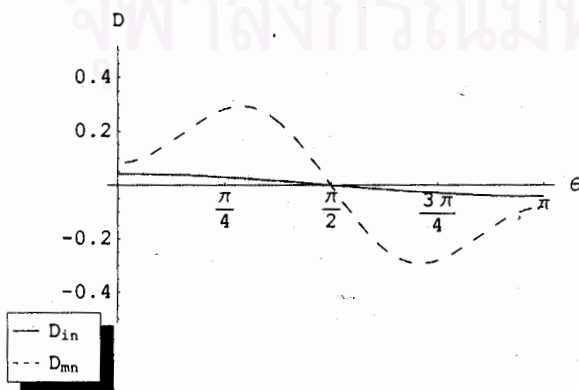
Out[88]=  $-\frac{1}{2} (-1 + 2 b) \text{Cos}[\theta] (2 - 2 b + 5 b^2 + 3 (-2 + b) b \text{Cos}[2 \theta]) \chi_m[k]$

In[89]:=  $\text{Do}[D_i[k] = G_{a1} /. \{b \rightarrow b[k]\}, \{k, 1, 17\}]$

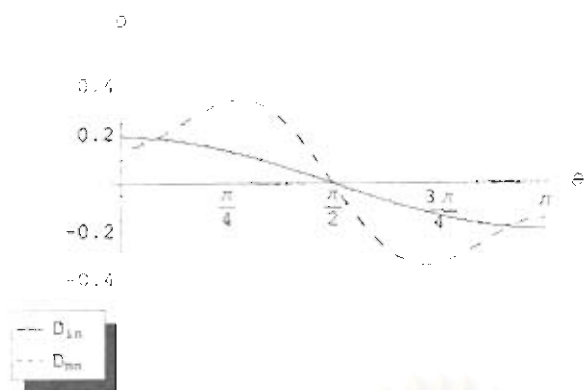
In[90]:=  $\text{Do}[D_m[k] = G_{am} /. \{b \rightarrow b[k]\}, \{k, 1, 17\}]$

In[91]:=  $\text{Do}[\text{Print}[\frac{\chi_i}{\chi_m} = ", r[k]]; \text{Plot}[\{D_i[k], D_m[k]\}, \{\theta, 0, \pi\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{GrayLevel}[0], \text{Dashing}[\{.03\}]\}, \text{PlotLegend} \rightarrow \{ "D_{in}", "D_{mn}" \}, \text{LegendSize} \rightarrow 0.35, \text{AxesLabel} \rightarrow \{ " \theta", "D" \}, \text{Ticks} \rightarrow \{ \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}, \text{Automatic} \}, \text{PlotRange} \rightarrow \{ -\left(0.5 + 1.7 * \frac{k^2}{100}\right), 0.5 + 1.7 * \frac{k^2}{100} \}, \{k, 1, 17\}]$

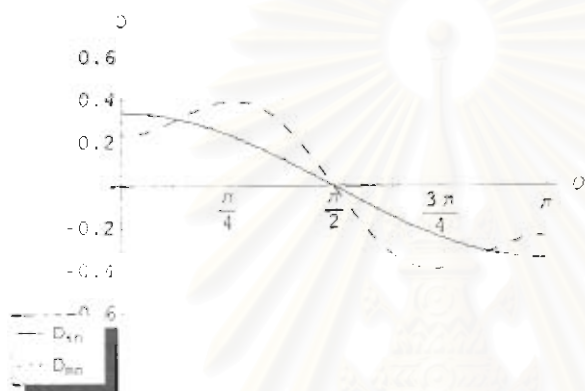
$\frac{\chi_i}{\chi_m} = 0.02$



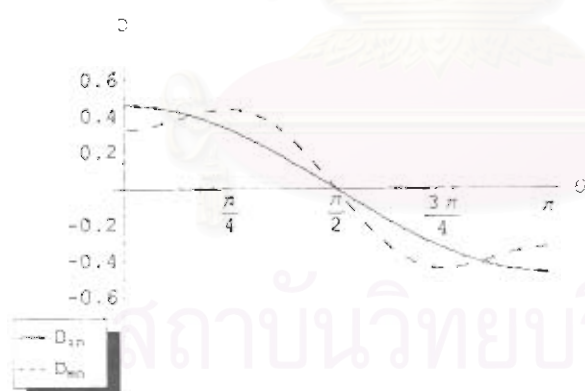
$\frac{\chi_i}{\chi_m} = 0.1$



$\frac{X_i}{X_m} = 0.2$

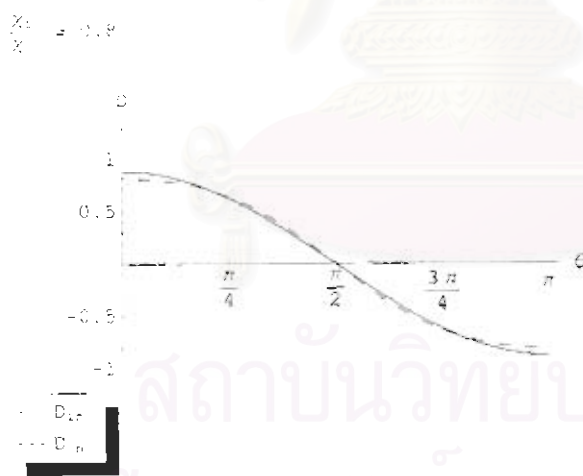
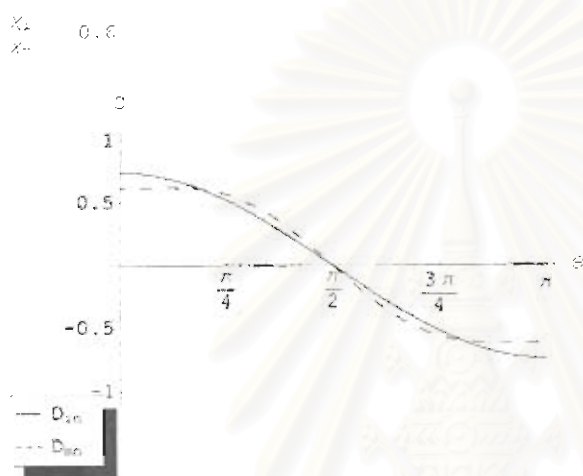
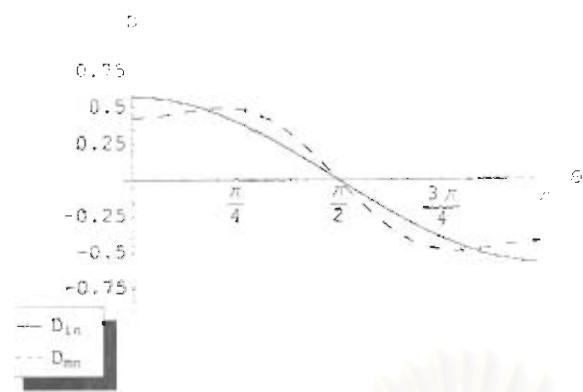


$\frac{X_i}{X_m} = 0.3$

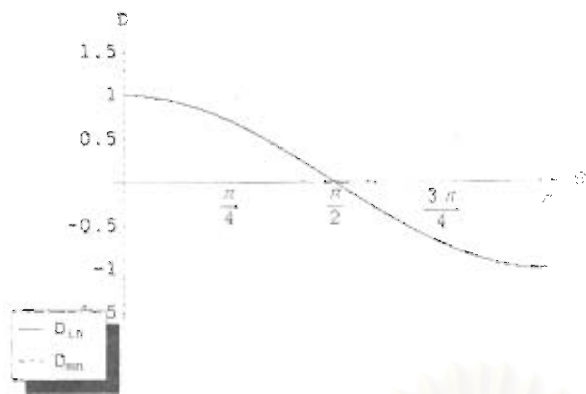


$\frac{X_i}{X_m} = 0.4$

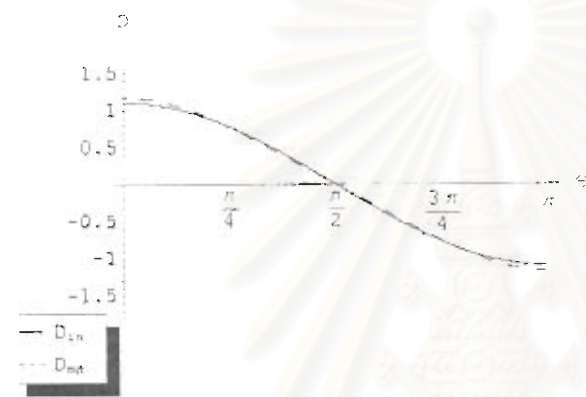
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



$$\frac{X_1}{X_2} = 1.2$$



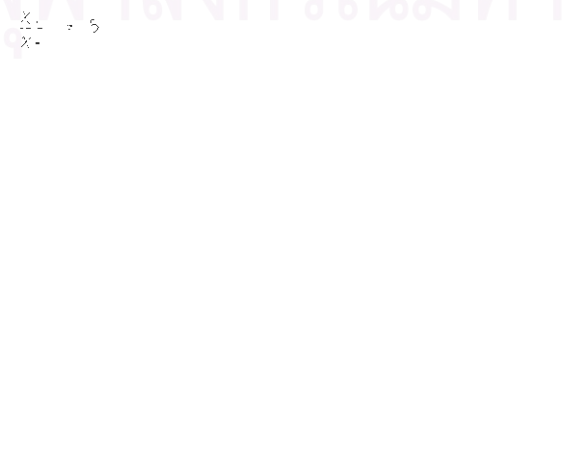
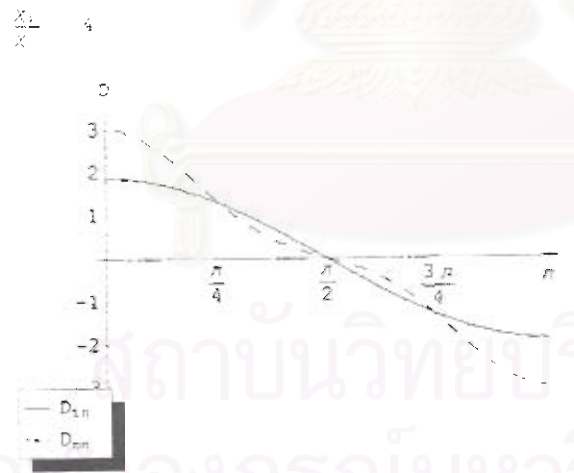
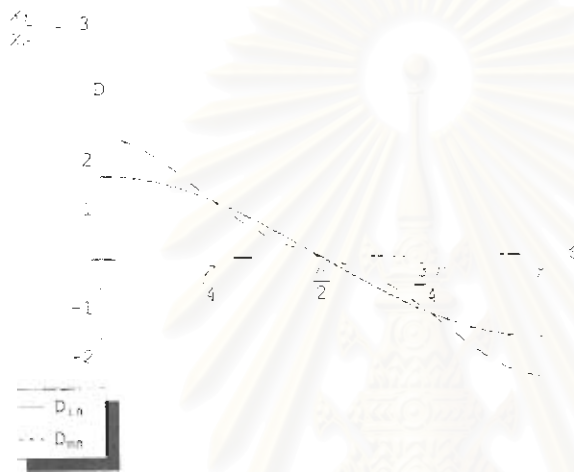
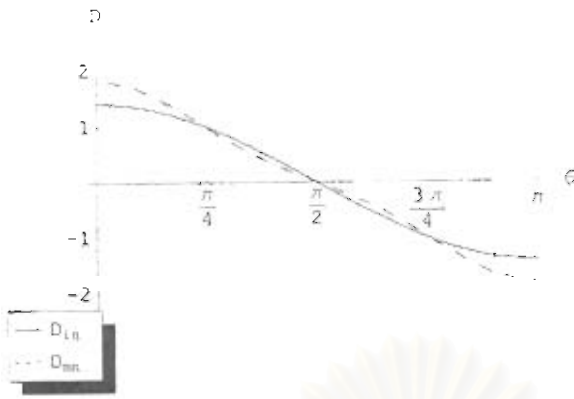
$$\frac{X_1}{X_2} = 1.5$$



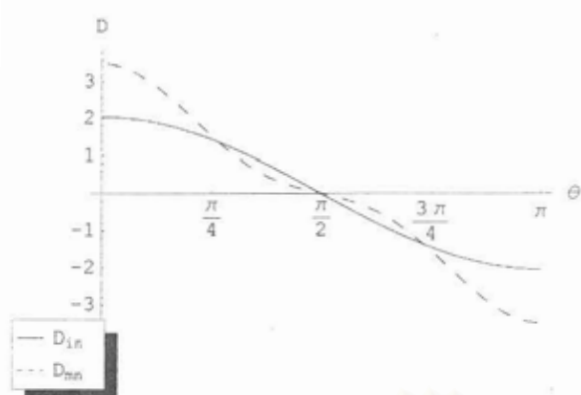
$$\frac{X_1}{X_2} = 2$$

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

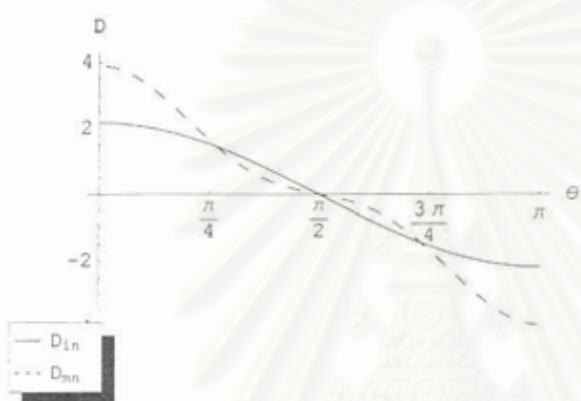




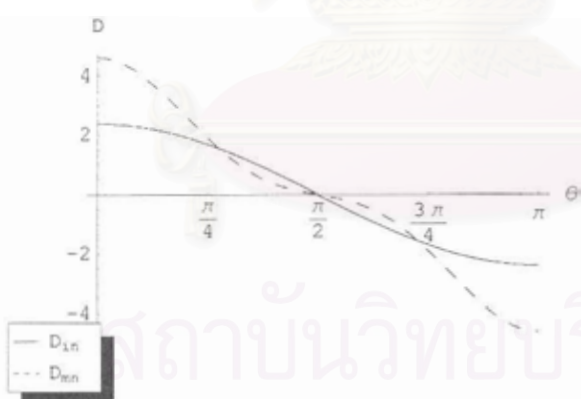
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



$$\frac{X_i}{X_m} = 6$$

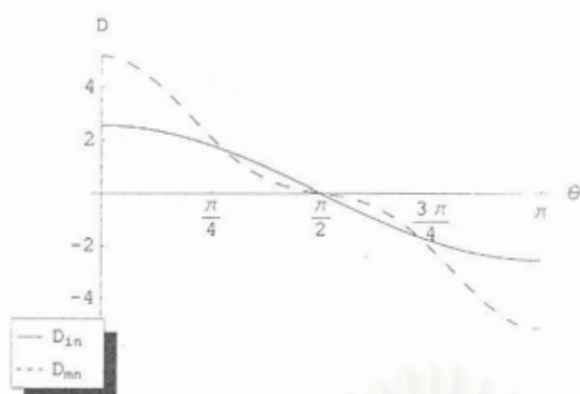


$$\frac{X_i}{X_m} = 8$$



$$\frac{X_i}{X_m} = 10$$

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



In[92]:=

In[93]:= fm = Wer

Out[93]=  $1 - 0.32b + 0.016(-5 + 36b^2 - 8b^3 + 8b^4) + 0.08(1+b)^4 y$

In[94]:= Do[em[i] = fm /. {b -> b[i], y -> r[i]};  
 , {i, 1, 17}]

In[95]:= Gt = Table[{r[i], em[i]}, {i, 1, 17}]

Out[95]= {{0.02, 0.877826}, {0.1, 0.893944}, {0.2, 0.911363}, {0.3, 0.926546},  
 {0.4, 0.940039}, {0.6, 0.963229}, {0.8, 0.982938}, {1, 1.},  
 {1.2, 1.01511}, {1.5, 1.03498}, {2, 1.06275}, {3, 1.10562},  
 {4, 1.13838}, {5, 1.16491}, {6, 1.18723}, {8, 1.2234}, {10, 1.25211}}

In[96]:= ListPlot[Gt, AxesLabel -> {" $\frac{X_i}{X_m}$ ", " $\frac{X_e}{X_m}$ "}, PlotJoined -> True]



Out[96]= - Graphics -

In[97]:=

VectorArt

18461

logos

100%



๑ โปรแกรม c11b12b32b34.nb

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```

In[1]:= << Calculus`VectorAnalysis`
In[2]:= SetCoordinates[Spherical[r,  $\theta$ ,  $\phi$ ]];
In[3]:= << Graphics`Legend`
In[4]:= << Graphics`Graphics`
In[5]:=

In[6]:=  $\Phi_1 = c11 * r * \text{LegendreP}[1, \text{Cos}[\theta]]$ ;
In[7]:=  $\Phi_m = r * \text{LegendreP}[1, \text{Cos}[\theta]] + (b12 * a^3 * r^{-2}) * \text{LegendreP}[1, \text{Cos}[\theta]] +$ 
 $(b34 * a^5 * r^{-4} + b32 * a^3 * r^{-2}) * \text{LegendreP}[3, \text{Cos}[\theta]]$ ;
In[8]:=

In[9]:=  $E_i = \text{Grad}[\Phi_1]$ ;
In[10]:=  $E_m = \text{Grad}[\Phi_m]$ ;
In[11]:=  $E_{ni} = \partial_r \Phi_i$ ;
In[12]:=  $E_{nm} = \partial_r \Phi_m$ ;
In[13]:=  $G_{i0} = E_i \cdot E_i$ ;
In[14]:=  $G_i = \text{Expand}[G_{i0}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$ ;
In[15]:=  $G_i = \text{Simplify}[\%]$ ;
In[16]:=  $G_i = X_i * G_i^2$ ;
In[17]:=  $G_i = \text{Simplify}[\%]$ ;
In[18]:=  $G_{ri} = X_i * G_{i0} * E_{ni}$ ;
In[19]:=  $G_{m0} = E_m \cdot E_m$ ;
In[20]:=  $G_m = \text{Expand}[G_{m0}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$ ;
In[21]:=  $G_m = X_m * G_m^2$ ;
In[22]:=  $G_m = \text{Simplify}[\%]$ ;
In[23]:=  $G_{rm} = X_m * G_{m0} * E_{nm}$ ;
In[24]:=

```

$$\text{In}[25]:= P = \int_0^a \int_0^\pi 2 \pi r^2 \sin[\theta] G_1 d\theta dr$$

$$\text{Out}[25]= \frac{4}{3} a^3 c11^4 \pi \chi_1$$

$$\text{In}[26]:= P_0 = P / \left( \frac{4}{3} \pi \right);$$

$$\text{In}[27]:= P_0 = \text{Expand}[\%];$$

$$\text{In}[28]:= P_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[P_0, a^3], a^3]] * \Omega_1;$$



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



$$\text{In}[29] := Q = \int_a^R \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \sin(\theta) * G_m \, d\theta \, dr$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[29] = & \frac{1}{738017280} \left( \pi \left( \frac{1}{21879 a^{17}} \right. \right. \\ & (65536 (-328513185 a^{20} + 2365294932 a^{20} b12^2 - 525621096 a^{20} b12^3 + \\ & 525621096 a^{20} b12^4 - 901064736 a^{20} b12 b32 - 1576863288 a^{20} b12^2 b32 + \\ & 600709824 a^{20} b12^3 b32 + 2886744432 a^{20} b32^2 - 116804688 a^{20} b12 b32^2 + \\ & 2263786096 a^{20} b12^2 b32^2 - 13652496 a^{20} b32^3 + 782743104 a^{20} b12 b32^3 + \\ & 769790736 a^{20} b32^4 - 2027395656 a^{20} b12^2 b34 + 737234784 a^{20} b12^3 b34 + \\ & 4255027920 a^{20} b32 b34 - 1551833712 a^{20} b12 b32 b34 + \\ & 5169745152 a^{20} b12^2 b32 b34 - 491489856 a^{20} b32^2 b34 + \\ & 2770215552 a^{20} b12 b32^2 b34 + 3071525184 a^{20} b32^3 b34 + \\ & 2127513960 a^{20} b34^2 - 1752070320 a^{20} b12 b34^2 + \\ & 3380918112 a^{20} b12^2 b34^2 - 1023937200 a^{20} b32 b34^2 + \\ & 3541247424 a^{20} b12 b32 b34^2 + 5066610912 a^{20} b32^2 b34^2 - \\ & 614362320 a^{20} b34^3 + 1638299520 a^{20} b12 b34^3 + \\ & 4074744960 a^{20} b32 b34^3 + 1345481280 a^{20} b34^4) - \frac{1}{21879 R^{17}} \\ & (65536 (1345481280 a^{20} b34^4 + 1638299520 a^{18} b12 b34^3 R^2 + \\ & 4074744960 a^{18} b32 b34^3 R^2 + 3380918112 a^{16} b12^2 b34^2 R^4 + \\ & 3541247424 a^{16} b12 b32 b34^2 R^4 + 5066610912 a^{16} b32^2 b34^2 R^4 - \\ & 614362320 a^{15} b34^3 R^5 + 737234784 a^{14} b12^3 b34 R^6 + \\ & 5169745152 a^{14} b12^2 b32 b34 R^6 + 2770215552 a^{14} b12 b32^2 b34 R^6 + \\ & 3071525184 a^{14} b32^3 b34 R^6 - 1752070320 a^{13} b12 b34^2 R^7 - \\ & 1023937200 a^{13} b32 b34^2 R^7 + 525621096 a^{12} b12^4 R^8 + \\ & 600709824 a^{12} b12^3 b32 R^8 + 2263786096 a^{12} b12^2 b32^2 R^8 + \\ & 782743104 a^{12} b12 b32^3 R^8 + 769790736 a^{12} b32^4 R^8 - \\ & 2027395656 a^{11} b12^2 b34 R^9 - 1551833712 a^{11} b12 b32 b34 R^9 - \\ & 491489856 a^{11} b32^2 b34 R^9 + 2127513960 a^{10} b34^2 R^{10} - \\ & 525621096 a^9 b12^3 R^{11} - 1576863288 a^9 b12^2 b32 R^{11} - \\ & 116804688 a^9 b12 b32^2 R^{11} - 13652496 a^9 b32^3 R^{11} + \\ & 4255027920 a^8 b32 b34 R^{12} + 2365294932 a^6 b12^2 R^{14} - 901064736 \\ & \left. a^6 b12 b32 R^{14} + 2886744432 a^6 b32^2 R^{14} - 328513185 R^{20}) \right) \chi_m \end{aligned}$$

$$\text{In}[30] := Q = \text{Expand}[\%];$$

$$\text{In}[31] := Q_0 = Q / \left( \frac{4}{3} \pi \right);$$

$$\text{In}[32] := Q_0 = \text{Expand}[\%];$$

$$\text{In}[33] := Q_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[Q_0, a^3], a^3]] * \Omega_1;$$

$$\text{In}[34] := Q_2 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[Q_0, R^3], R^3]] * V;$$

$$\text{In}[35] := \text{surface} = -b12 * E_0^4 * \chi_m * \Omega_1;$$

$$\text{In}[36] :=$$

In[37]:=  $W = (P_1 + Q_1 + Q_2) + 4 * \text{surface}$

Out[37]=  $V \chi_m + c11^4 \chi_1 \Omega_1 +$

$$\left( -1 + \frac{8 b12^4}{5} + \frac{11728 b32^4}{5005} + \frac{136 b34^2}{21} - \frac{144 b34^3}{77} + \frac{6336 b34^4}{1547} + \frac{8}{385} b12^3 (-77 + 88 b32 + 108 b34) + \frac{16 b32^3 (-143 + 32172 b34)}{55055} + \frac{16 b32 b34 (2431 - 585 b34 + 2328 b34^2)}{3003} + \frac{16 b32^2 (321607 - 54756 b34 + 564462 b34^2)}{585585} + b12^2 \left( \frac{6512 b32^2}{945} + b32 \left( -\frac{24}{5} + \frac{18176 b34}{1155} \right) + \frac{4 (2457 - 2106 b34 + 3512 b34^2)}{1365} \right) + \frac{1}{495495} (16 b12 (73788 b32^3 + 2145 b34^2 (-77 + 72 b34) + 13 b32^2 (-847 + 20088 b34) + 33 b32 (-2574 - 4433 b34 + 10116 b34^2))) \right) \chi_m \Omega_1 - 4 b12 e_0^4 \chi_m \Omega_1$$

In[38]:=

In[39]:=  $We = W /. \{c11 \rightarrow (1 + b12)\};$

In[40]:=  $Wer = We /. \{V \rightarrow 1, \Omega_1 \rightarrow p, E_0 \rightarrow 1, \chi_1 \rightarrow y, \chi_m \rightarrow 1\};$

In[41]:=

In[42]:=  $Wer = Wer /. \{p \rightarrow 0.08\};$

In[43]:=  $r[0] = 0; r[1] = 0.02; r[2] = 0.1; r[3] = 0.2; r[4] = 0.3;$   
 $r[5] = 0.4; r[6] = 0.6; r[7] = 0.8; r[8] = 1; r[9] = 1.2;$   
 $r[10] = 1.5; r[11] = 2; r[12] = 3; r[13] = 4; r[14] = 5;$   
 $r[15] = 6; r[16] = 8; r[17] = 10;$

สถาบันวิทยบริการ  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
In[47]:= Do[z = r[j];
  sol[j] = FindMinimum[Ver /. (y -> z), {b12, 0}, {b32, 0}, {b34, 0}];
  Print[" $\frac{X_i}{X_m}$ [" , j, "] = " , z, " " , sol[j]];
  , {j, 1, 17}]
```

```
 $\frac{X_i}{X_m}$  [1] = 0.02 {0.873, {b12 -> 0.311648, b32 -> 0.162277, b34 -> -0.135961}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [2] = 0.1 {0.890467, {b12 -> 0.260505, b32 -> 0.140393, b34 -> -0.122358}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [3] = 0.2 {0.909038, {b12 -> 0.209638, b32 -> 0.116302, b34 -> -0.104909}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [4] = 0.3 {0.925003, {b12 -> 0.168456, b32 -> 0.0952984, b34 -> -0.088106}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [5] = 0.4 {0.939039, {b12 -> 0.134102, b32 -> 0.076918, b34 -> -0.0724855}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [6] = 0.6 {0.962932, {b12 -> 0.0787061, b32 -> 0.0459472, b34 -> -0.0444701}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [7] = 0.8 {0.982864, {b12 -> 0.0353937, b32 -> 0.0208929, b34 -> -0.0205609}}
```

```
FindMinimum::fmgz :
```

```
Encountered a vanishing gradient. The
result returned may not be a minimum;
it may be a maximum or a saddle point.
```

```
 $\frac{X_i}{X_m}$  [8] = 1 {1., {b12 -> 0., b32 -> 0., b34 -> 0.}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [9] = 1.2 {1.01505, {b12 -> -0.0297931, b32 -> -0.0177388, b34 -> 0.017951}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [10] = 1.5 {1.03469, {b12 -> -0.0670233, b32 -> -0.0400178, b34 -> 0.0410338}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [11] = 2 {1.06186, {b12 -> -0.115744, b32 -> -0.0692185, b34 -> 0.0719949}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [12] = 3 {1.10326, {b12 -> -0.184556, b32 -> -0.109826, b34 -> 0.116491}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [13] = 4 {1.1345, {b12 -> -0.232713, b32 -> -0.137258, b34 -> 0.147449}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [14] = 5 {1.1596, {b12 -> -0.269444, b32 -> -0.158451, b34 -> 0.17168}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [15] = 6 {1.18058, {b12 -> -0.298823, b32 -> -0.174321, b34 -> 0.190253}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [16] = 8 {1.21435, {b12 -> -0.34392, b32 -> -0.1974, b34 -> 0.217773}}
 $\frac{X_i}{X_m}$  [17] = 10 {1.24096, {b12 -> -0.377754, b32 -> -0.214106, b34 -> 0.238069}}
```

```
In[48]:= b12[1] = 0.31164803278778797;
  b32[1] = 0.16227720719979002; b34[1] = -0.13596106162426827;
```

```
In[50]:= b12[2] = 0.2605053399364512;
  b32[2] = 0.14039282398708325; b34[2] = -0.12235804259539955;
```

```
In[52]:= b12[3] = 0.20963765475274876;
  b32[3] = 0.11630212312143592; b34[3] = -0.10490884706797456;
```

```
In[54]:= b12[4] = 0.1684561270816758;
  b32[4] = 0.0952984361013666;
  b34[4] = -0.08810597875814094;
```

```

In[57]:= b12[5] = 0.13410179906212613;
          b32[5] = 0.07691798305111373; b34[5] = -0.07248547929437252;

In[59]:= b12[6] = 0.07870614716103642;
          b32[6] = 0.04594719074466536; b34[6] = -0.04447013453885581;

In[61]:= b12[7] = 0.03539367426987891;
          b32[7] = 0.02089292390380493; b34[7] = -0.020560864811218996;

In[63]:= b12[8] = 0.;
          b32[8] = 0.; b34[8] = 0.;

In[65]:= b12[9] = -0.029793091961983945;
          b32[9] = -0.01773881187768101; b34[9] = 0.017951042715654807;

In[67]:= b12[10] = -0.06702333146901066;
          b32[10] = -0.04001783856519804; b34[10] = 0.0410337607802725;

In[69]:= b12[11] = -0.11574368835292205;
          b32[11] = -0.06921852053762168; b34[11] = 0.07199486656310672;

In[71]:= b12[12] = -0.18455561968344086;
          b32[12] = -0.10982569718332913; b34[12] = 0.11649083684635093;

In[73]:= b12[13] = -0.2327127177235197;
          b32[13] = -0.13725764211774968; b34[13] = 0.14744903638591467;

In[75]:= b12[14] = -0.2694438172243459;
          b32[14] = -0.15845111024351766; b34[14] = 0.171680125219386;

In[77]:= b12[15] = -0.2988228477328687;
          b32[15] = -0.17432117388615517; b34[15] = 0.19025295782851348;

In[79]:= b12[16] = -0.34392022747016376;
          b32[16] = -0.19739964165196755; b34[16] = 0.21777297635645254;

In[81]:= b12[17] = -0.3777536763665629;
          b32[17] = -0.21410619553598143; b34[17] = 0.23806921177351043;

In[83]:=

In[84]:= (*consider continuity of normal
          component of D on surface of inclusion (r=a)*)

In[85]:= Xi[1] = 0.02;      Xm[1] = 1;
In[86]:= Xi[2] = 0.1;       Xm[2] = 1;
In[87]:= Xi[3] = 0.2;       Xm[3] = 1;
In[88]:= Xi[4] = 0.3;       Xm[4] = 1;
In[89]:= Xi[5] = 0.4;       Xm[5] = 1;
In[90]:= Xi[6] = 0.6;       Xm[6] = 1;
In[91]:= Xi[7] = 0.8;       Xm[7] = 1;
In[92]:= Xi[8] = 1;         Xm[8] = 1;

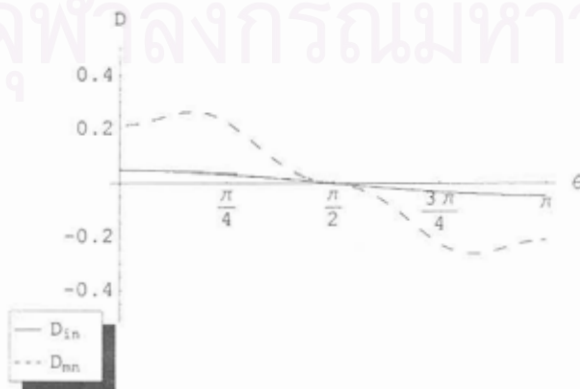
```

```

In[93]:= Xi[9] = 1.2;      Xm[9] = 1;
In[94]:= Xi[10] = 1.5;    Xm[10] = 1;
In[95]:= Xi[11] = 2;      Xm[11] = 1;
In[96]:= Xi[12] = 3;      Xm[12] = 1;
In[97]:= Xi[13] = 4;      Xm[13] = 1;
In[98]:= Xi[14] = 5;      Xm[14] = 1;
In[99]:= Xi[15] = 6;      Xm[15] = 1;
In[100]:= Xi[16] = 8;      Xm[16] = 1;
In[101]:= Xi[17] = 10;     Xm[17] = 1;
In[102]:= Gai = Gri /. {c11 → 1 + b12, E0 → 1, r → a, Xi → Xi[k]};
In[103]:= Gai = Expand[Gai, Trig → True];
In[104]:= Simplify[Gai];
In[105]:= Gam = Grm /. {c11 → 1 + b12, E0 → 1, r → a, Xm → Xm[k]};
In[106]:= Gam = Expand[Gam, Trig → True];
In[107]:= Simplify[Gam];
In[108]:= Do[Di[k] = Gai /. {b12 → b12[k], b32 → b32[k], b34 → b34[k]}, {k, 1, 17}];
In[109]:= Do[Dm[k] = Gam /. {b12 → b12[k], b32 → b32[k], b34 → b34[k]}, {k, 1, 17}];
In[110]:= Do[Print["Xi/  
Xm = ", r[k]];
Plot[{Di[k], Dm[k]}, {θ, 0, π},
PlotStyle → {GrayLevel[0], Dashing[ {.03} ]},
PlotLegend → {"Din", "Dmn"}, LegendSize → 0.35,
AxesLabel → {"θ", "D"}, Ticks → {{0, π/4, π/2, 3π/4, π}, Automatic},
PlotRange → {- (0.5 + 1.7 * (k^2/100)), 0.5 + 1.7 * (k^2/100)}, {k, 1, 17}]

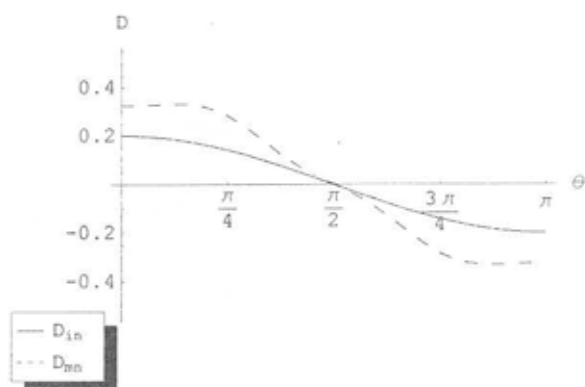
```

$$\frac{X_i}{X_m} = 0.02$$

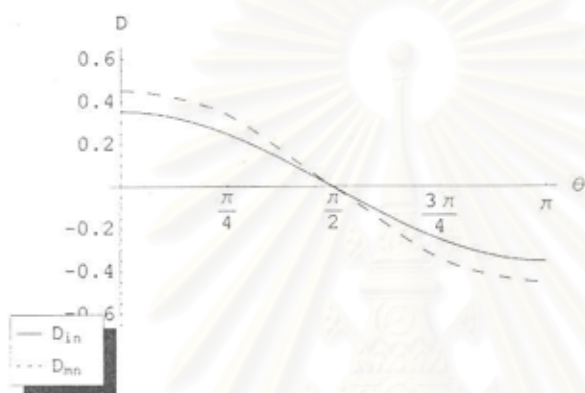


$$\frac{X_i}{X_m} = 0.1$$

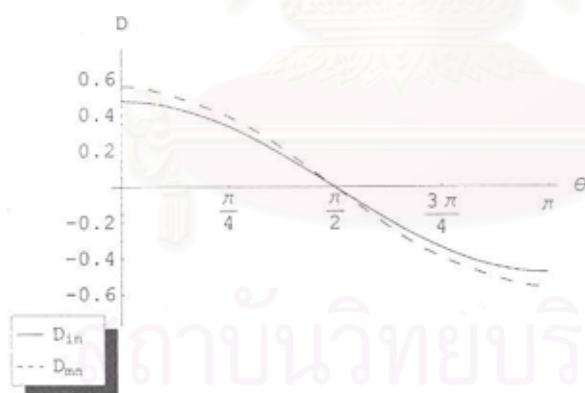




$$\frac{X_i}{X_m} = 0.2$$

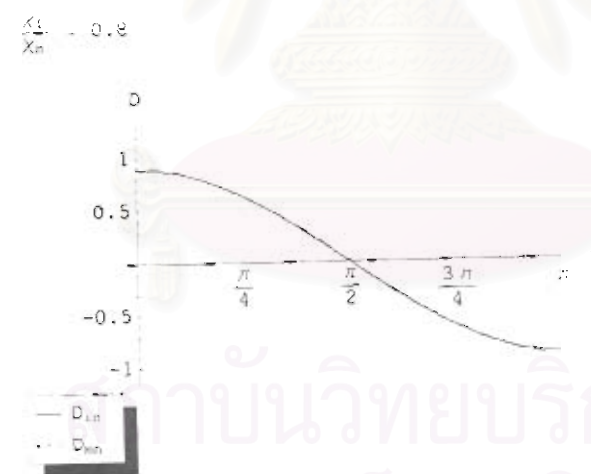
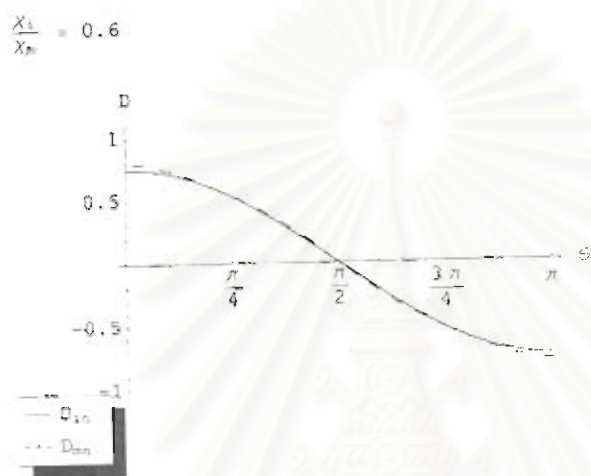
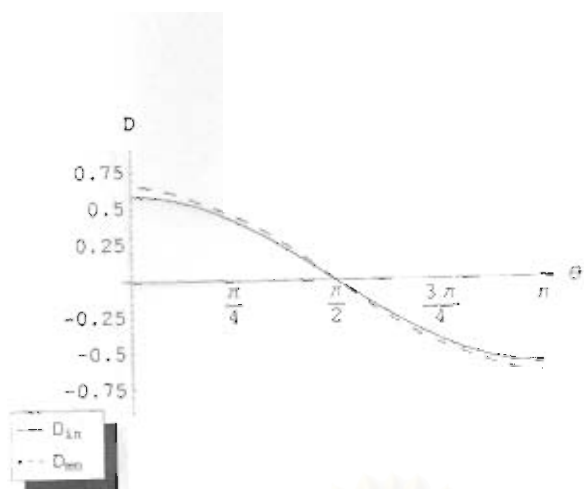


$$\frac{X_i}{X_m} = 0.3$$



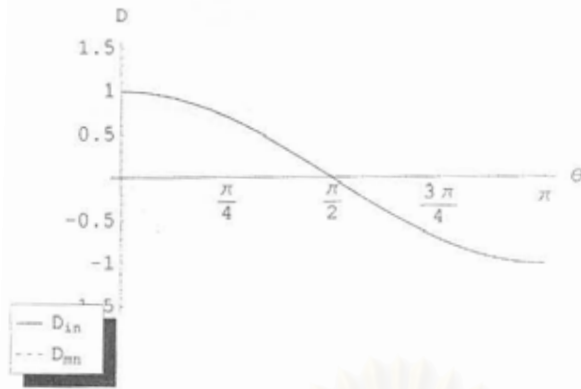
$$\frac{X_i}{X_m} = 0.4$$

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

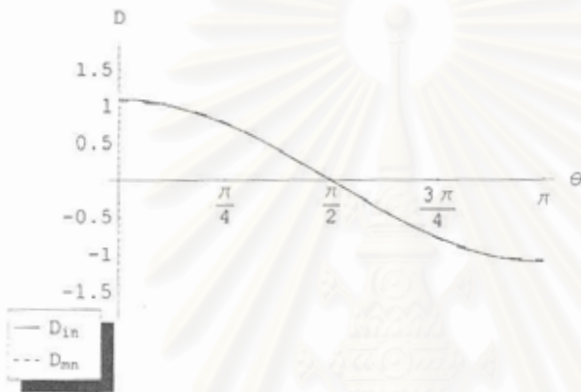


ศูนย์บริการ  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

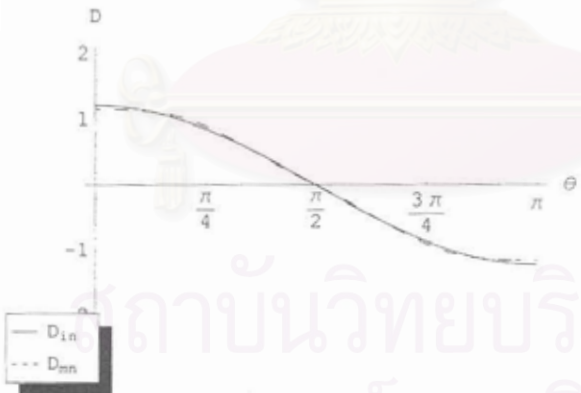




$$\frac{X_i}{X_m} = 1.2$$

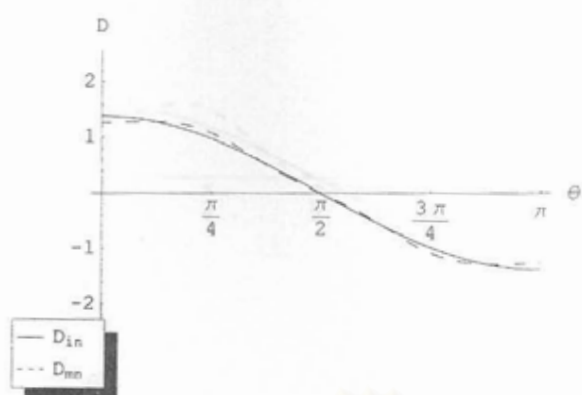


$$\frac{X_i}{X_m} = 1.5$$

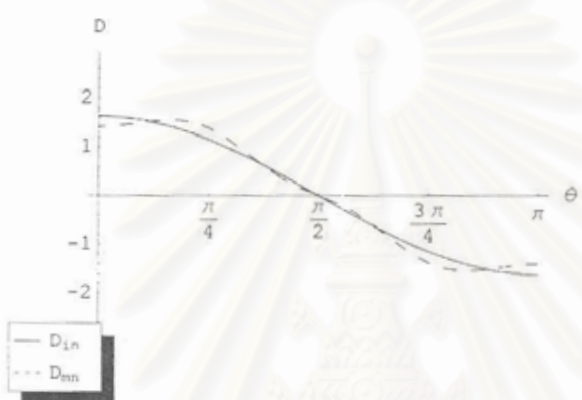


$$\frac{X_i}{X_m} = 2$$

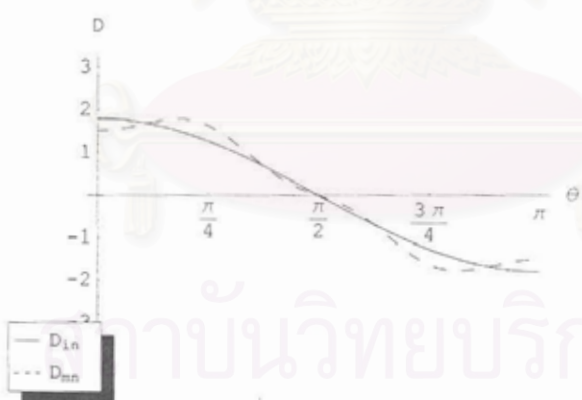
สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



$$\frac{X_i}{X_m} = 3$$

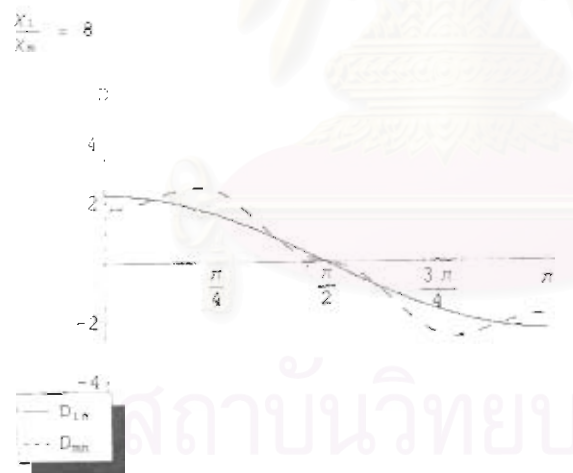
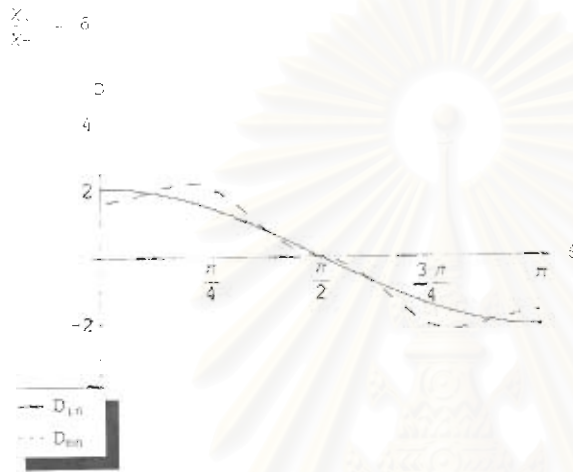
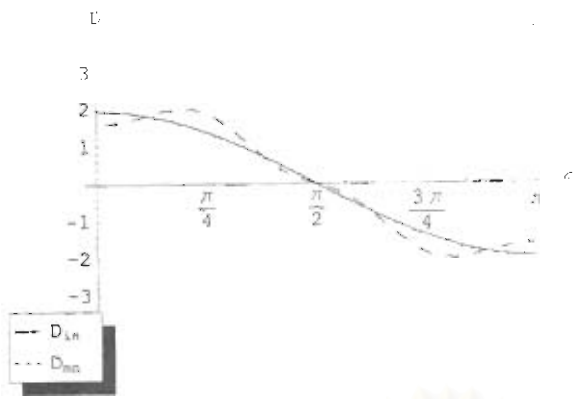


$$\frac{X_i}{X_m} = 4$$

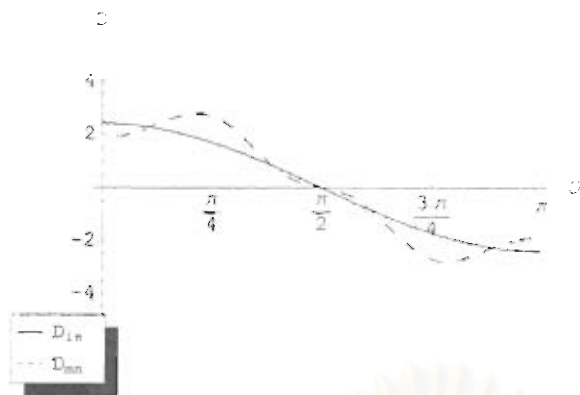


$$\frac{X_i}{X_m} = 5$$

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



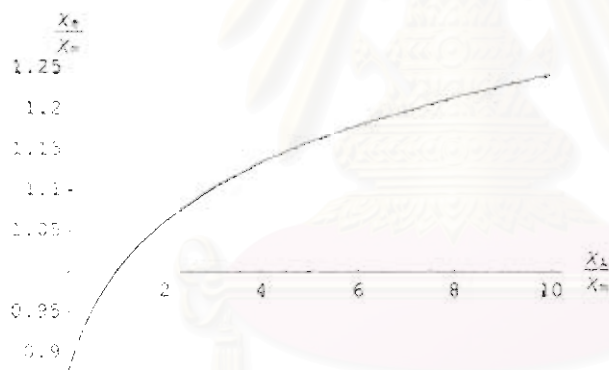
```
In[111]:=
```

```
In[112]:= fm = Wer;
```

```
In[113]:= Do[em[i] = fm /. {b12 -> b12[i], b32 -> b32[i], b34 -> b34[i], y -> r[i]};
, {i, 1, 17}]
```

```
In[114]:= Gt = Table[{r[i], em[i]}, {i, 1, 17}];
```

```
In[115]:= ListPlot[Gt, AxesLabel -> {" $\frac{X_1}{X_n}$ ", " $\frac{X_n}{X_n}$ "}, PlotJoined -> True]
```



```
Out[115] - Graphics -
```

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



ฉ โปรแกรม NL\_L.nb

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```

In[1]:= Simplify[%]
<< Calculus VectorAnalysis`

In[2]:= SetCoordinates[Spherical[r, θ, φ]];

In[3]:= (* (E_i, E_m) *)
<< Graphics` Legend`

In[4]:= << Graphics` Graphics`

In[5]:=

In[6]:= E_i = (c * r) * E_0 * LegendreP[1, Cos[θ]]
Out[6]= c r Cos[θ] e_0

In[7]:= E_m = r * E_0 * LegendreP[1, Cos[θ]] + (b * a^3 * r^-2) * E_0 * LegendreP[1, Cos[θ]]
Out[7]=  $\frac{a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^2} + r \cos[\theta] e_0$ 

In[8]:=

In[9]:= E_i = Grad[E_i]
Out[9]= {c Cos[θ] e_0, -c Sin[θ] e_0, 0}

In[10]:= E_m = Grad[E_m]
Out[10]= {Cos[θ] e_0 -  $\frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3}$ ,  $\frac{-a^3 b \sin[\theta] e_0}{r^2} - r \sin[\theta] e_0$ , 0}

In[11]:= E_ni = ∂_r E_i
Out[11]= c Cos[θ] e_0

In[12]:= E_nm = ∂_r E_m
Out[12]= Cos[θ] e_0 -  $\frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3}$ 

In[13]:= G_i = E_i . E_i
Out[13]= c^2 Cos[θ]^2 e_0^2 + c^2 Sin[θ]^2 e_0^2

In[14]:= G_i1 = K_i * G_i
Out[14]= (c^2 Cos[θ]^2 e_0^2 + c^2 Sin[θ]^2 e_0^2) K_i

In[15]:= G_i2 = λ * K_i * (G_i^2)
Out[15]= λ (c^2 Cos[θ]^2 e_0^2 + c^2 Sin[θ]^2 e_0^2)^2 K_i

In[16]:= G_i1 = Expand[G_i1, Trig → True]
Out[16]= c^2 e_0^2 K_i

In[17]:= G_i1 = Simplify[%]
Out[17]= c^2 e_0^2 K_i

In[18]:= G_i2 = Expand[G_i2, Trig → True]
Out[18]= c^4 λ e_0^4 K_i

```



In[19]:=  $G_{12} = \text{Simplify}[\%]$

Out[19]=  $c^4 \lambda e_0^4 K_1$

In[20]:=  $G_m = K_m \frac{a^3 + 2 a^3 b^2}{(a^3 + 2 a^3 b^2)}$

Out[20]=  $\left( \left( \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3} \right)^2 + \frac{(- a^3 b \sin[\theta] e_0 - r \sin[\theta] e_0)^2}{r^2} \right) K_m$

In[21]:=  $G_m = \text{Expand}[G_m, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

Out[21]=  $e_0^2 K_m + \frac{5 a^6 b^2 e_0^2 K_m}{2 r^6} - \frac{a^3 b e_0^2 K_m}{r^3} + \frac{3 a^6 b^2 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_m}{2 r^6} - \frac{3 a^3 b \cos[\theta]^2 e_0^2 K_m}{r^3} - \frac{3 a^6 b^2 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_m}{2 r^6} + \frac{3 a^3 b \sin[\theta]^2 e_0^2 K_m}{r^3}$

In[22]:=  $G_m = \text{Simplify}[\%]$

Out[22]=  $\frac{(5 a^6 b^2 - 2 a^3 b r^3 + 2 r^6 + 3 a^3 b (a^3 b - 2 r^3) \cos[2 \theta]) e_0^2 K_m}{2 r^6}$

In[23]:=  $P_1 = \int_0^a \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] * G_{11} d\theta dr$

Out[23]=  $\frac{4}{3} a^3 c^2 \pi e_0^2 K_1$

In[24]:=  $P_1 = \text{Expand}[\%]$

Out[24]=  $\frac{4}{3} a^3 c^2 \pi e_0^2 K_1$

In[25]:=  $P_{01} = \text{Simplify}[P_1 / \left( \frac{4}{3} \pi \right)]$

Out[25]=  $a^3 c^2 e_0^2 K_1$

In[26]:=  $P_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[P_{01}, a^3], a^3]] * \Omega_1$

Out[26]=  $c^2 e_0^2 K_1 \Omega_1$

In[27]:=  $P_2 = \int_0^a \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] * G_{12} d\theta dr$

Out[27]=  $\frac{4}{3} a^3 c^4 \pi \lambda e_0^4 K_1$

In[28]:=  $P_2 = \text{Expand}[\%]$

Out[28]=  $\frac{4}{3} a^3 c^4 \pi \lambda e_0^4 K_1$

In[29]:=  $P_{02} = \text{Simplify}[P_2 / \left( \frac{4}{3} \pi \right)]$

Out[29]=  $a^3 c^4 \lambda e_0^4 K_1$

In[30]:=  $P_2 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[P_{02}, a^3], a^3]] * \Omega_1$

Out[30]=  $c^4 \lambda e_0^4 K_1 \Omega_1$

```

In[31]:= Q = Integrate[Integrate[2 * pi * r^2 * Sin[theta] * G_m c theta dr,
Out[31]= pi ( (4 (-a^6 + 2 a^6 b^2) / (3 a^3) - 4 (2 a^6 b^2 - R^6) / (3 R^3) ) e_0^2 K_m

In[32]:= Q = Expand[%]
Out[32]= -4/3 a^3 pi e_0^2 K_m + 8/3 a^3 b^2 pi e_0^2 K_m - 8 a^6 b^2 pi e_0^2 K_m / (3 R^3) + 4/3 pi R^3 e_0^2 K_m

In[33]:= Q_0 = Simplify[Q / (4/3 pi)]
Out[33]= (-a^3 + R^3) (2 a^3 b^2 + R^3) e_0^2 K_m / R^3

In[34]:= Q_1 = Simplify[Coefficient[Collect[Q_0, a^3], a^3]] * Omega_1
Out[34]= (-1 + 2 b^2) e_0^2 K_m Omega_1

In[35]:= Q_2 = Simplify[Coefficient[Collect[Q_0, R^3], R^3]] * V
Out[35]= V e_0^2 K_m

In[36]:= surface = -b E_0^2 K_m Omega_1
Out[36]= -b e_0^2 K_m Omega_1

In[37]:=

In[38]:= W = 1/2 * (P_1 + Q_1 + Q_2) - 1/4 * P_2 + surface
Out[38]= -1/4 c^2 lambda e_0^2 K_1 Omega_1 - b e_0^2 K_m Omega_1 + 1/2 (V e_0^2 K_m + c^2 e_0^2 K_1 Omega_1 + (-1 + 2 b^2) e_0^2 K_m Omega_1)

In[39]:=

In[40]:= W = W /. {c -> (1 + b), V -> 1, Omega_1 -> p}
Out[40]= -1/4 (1 + b)^4 p lambda e_0^2 K_1 - b p e_0^2 K_m + 1/2 ((1 + b)^2 p e_0^2 K_1 + e_0^2 K_m + (-1 + 2 b^2) p e_0^2 K_m)

In[41]:=

In[42]:= (* If lambda -> 0 then "b" look like "Yu" in linear case *)
In[43]:= M = W /. {lambda -> 0}
Out[43]= -b p e_0^2 K_m + 1/2 ((1 + b)^2 p e_0^2 K_1 + e_0^2 K_m + (-1 + 2 b^2) p e_0^2 K_m)

In[44]:= Expand[%]
Out[44]= 1/2 p e_0^2 K_1 + b p e_0^2 K_1 + 1/2 b^2 p e_0^2 K_1 + 1/2 e_0^2 K_m - 1/2 p e_0^2 K_m - b p e_0^2 K_m + b^2 p e_0^2 K_m

In[45]:= Solve[D_b M == 0, b]
Out[45]= {{b -> -K_1 / (K_1 + 2 K_m)}}

In[46]:=

In[47]:= (* If lambda -> 0 and K_1 = K_m then b -> 0 *)

```

In[48]:= **Wer = W /. {p → 0.08}**

Out[48]=  $-0.02 (1+b)^4 \lambda e_0^2 K_1 - 0.08 b e_0^2 K_m +$   
 $\frac{1}{2} (0.08 (1+b)^2) K_p + e_0^2 K_m + 0.08 (-1+2b^2) e_0^2 K_m$

In[49]:= **M = Wer /. {λ → 0, K<sub>1</sub> → 1, K<sub>m</sub> → 1}**

Out[49]=  $-0.08 b e_0^2 + \frac{1}{2} (e_0^2 + 0.08 (1+b)^2 e_0^2 + 0.08 (-1+2b^2) e_0^2)$

In[50]:= **M = Simplify[M/E<sub>0</sub><sup>2</sup>]**

Out[50]=  $0.5 + 0. b + 0.12 b^2$

In[51]:= **sol = FindMinimum[M, {b, 0}];**

**Print[" $\frac{K_1}{K_m} = 1$  ", sol]**

FindMinimum::fmgr: Encountered a vanishing gradient. The result returned may not be a minimum; it may be a maximum or a saddle point.

$\frac{K_1}{K_m} = 1$  (0.5, {b → 0.})

In[53]:=

In[54]:= **We = Wer /. {K<sub>1</sub> → y, K<sub>m</sub> → 1, λ → 10<sup>-10</sup>, E<sub>0</sub> → 1}**

Out[54]=  $-0.08 b - 2. \times 10^{-12} (1+b)^4 y + \frac{1}{2} (1 + 0.08 (-1+2b^2) + 0.08 (1+b)^2 y)$

In[55]:= **r[0] = 0; r[1] = 0.02; r[2] = 0.1; r[3] = 0.2; r[4] = 0.3;**  
**r[5] = 0.4; r[6] = 0.6; r[7] = 0.8; r[8] = 1; r[9] = 1.2;**  
**r[10] = 1.5; r[11] = 2; r[12] = 3; r[13] = 4; r[14] = 5;**  
**r[15] = 6; r[16] = 8; r[17] = 10;**

In[59]:= **Do[h = We /. {y → r[i]};**

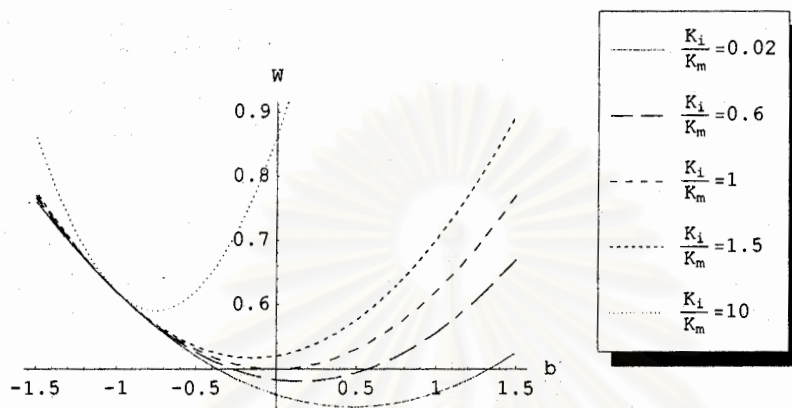
**t[i] = h;**  
**, {i, 0, 17}]**

สถาบันวิทยบริการ  
 จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```

In[60]:= Plot[{t[1], t[6], t[8], t[10], t[17]}, {b, -1.5, 1.5},
  PlotStyle -> {Dashing[{0.001, 0.001}], Dashing[{0.06, 0.02}], Dashing[
    {0.02, 0.02}], Dashing[{0.0095, 0.01}], Dashing[{0.002, 0.009}]},
  PlotLegend -> {" $\frac{K_i}{K_m}=0.02$ ", " $\frac{K_i}{K_m}=0.6$ ", " $\frac{K_i}{K_m}=1$ ", " $\frac{K_i}{K_m}=1.5$ ", " $\frac{K_i}{K_m}=10$ "},
  LegendPosition -> {1.1, -.4}, LegendSize -> 1.2, AxesLabel -> {"b", "W"}]

```



Out[60]= - Graphics -

In[61]:=

สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
In[62]:= Do[z = r[j];
  ww[j] = 1 - (K_i/K_m)^(z-1); {y -> z}, {b, 0};
  Print["z = ", z, " ", ww[j]];
  {j, 0.1, 1.0}];
```

$$\frac{K_i}{K_m} [1] = 0.02 \quad (0.00441782, \{b \rightarrow 0.485149\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [2] = 0.1 \quad (0.448571, \{b \rightarrow 0.428571\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [3] = 0.2 \quad (0.456364, \{b \rightarrow 0.363636\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [4] = 0.3 \quad (0.463478, \{b \rightarrow 0.304348\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [5] = 0.4 \quad (0.47, \{b \rightarrow 0.25\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [6] = 0.6 \quad (0.481538, \{b \rightarrow 0.153846\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [7] = 0.8 \quad (0.491429, \{b \rightarrow 0.0714286\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [8] = 1 \quad (0.5, \{b \rightarrow 0.\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [9] = 1.2 \quad (0.5075, \{b \rightarrow -0.0625\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [10] = 1.5 \quad (0.517143, \{b \rightarrow -0.142857\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [11] = 2 \quad (0.53, \{b \rightarrow -0.25\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [12] = 3 \quad (0.548, \{b \rightarrow -0.4\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [13] = 4 \quad (0.56, \{b \rightarrow -0.5\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [14] = 5 \quad (0.568571, \{b \rightarrow -0.571429\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [15] = 6 \quad (0.575, \{b \rightarrow -0.625\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [16] = 8 \quad (0.584, \{b \rightarrow -0.7\})$$

$$\frac{K_i}{K_m} [17] = 10 \quad (0.59, \{b \rightarrow -0.75\})$$

```
In[63]:= b[1] = 0.4851485395019879;
```

```
In[64]:= b[2] = 0.4285714529400185;
```

```
In[65]:= b[3] = 0.3636363876564689;
```

```
In[66]:= b[4] = 0.30434782611393635;
```

```
In[67]:= b[5] = 0.25000000003257217;
```

```
In[68]:= b[6] = 0.15384617654411098;
```

```
In[69]:= b[7] = 0.0714285714637015;
```

```
In[70]:= b[8] = 0.;
```

```
In[71]:= b[9] = -0.0624999999690961;
```

```

In[72]: b[10] = -0.14285714283162046;
In[73]: b[11] = -0.24999999997887734;
In[74]: b[12] = -0.39999998256353464;
In[75]: b[13] = -0.5000000000174797;
In[76]: b[14] = -0.5714285564540025;
In[77]: b[15] = -0.6250000000429166;
In[78]: b[16] = -0.7000000000608301;
In[79]: b[17] = -0.7500000000736562;
In[80]:
In[81]: A1 =  $\Phi_1 / (c + 1 + b[i], r \rightarrow a)$ 
Out[81] =  $a (1 + b[i]) \cos[\theta] e_0$ 
In[82]: A2 =  $\Phi_m / (b \rightarrow b[i], r \rightarrow a)$ 
Out[82] =  $a \cos[\theta] e_0 + a b[i] \cos[\theta] e_1$ 
In[83]: result = A1 / A2
Out[83] =  $\frac{a (1 + b[i]) \cos[\theta] e_0}{a \cos[\theta] e_0 + a b[i] \cos[\theta] e_1}$ 
In[84]: Simplify[%]
Out[84] = 1
In[85]:
In[86]: D1r =  $K_1 * E_{n1} - K_1 * \lambda * (E_1 \cdot E_1) * E_{n1}$ 
Out[86] =  $c \cos[\theta] e_0 K_1 - c \lambda \cos[\theta] e_0 (c^2 \cos[\theta]^2 e_0^2 + c^2 \sin[\theta]^2 e_1^2) K_1$ 
In[87]: Dnr =  $K_m * E_{nm}$ 
Out[87] =  $\left( \cos[\theta] e_0 - \frac{2 a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^3} \right) K_m$ 
In[88]: D1n = D1r /. {c → 1 + b, E0 → 1, λ → 10-10, K1 → r[i], Km → 1, r → a}
Out[88] =  $(1 + b) \cos[\theta] r[i] - \frac{(1 + b) \cos[\theta] r[i] \{ (1 + b)^2 \cos[\theta]^2 + (1 + b)^2 \sin[\theta]^2 \}}{10000000000}$ 
In[89]: D1n = Expand[D1n, Trig → True]
Out[89] =  $\frac{9999999999 \cos[\theta] r[i]}{10000000000} + \frac{9999999997 b \cos[\theta] r[i]}{10000000000} - \frac{3 b^2 \cos[\theta] r[i]}{10000000000} - \frac{b^3 \cos[\theta] r[i]}{10000000000}$ 
In[90]: D1n = Simplify[D1n]
Out[90] =  $\frac{(-9999999999 - 9999999997 b + 3 b^2 + b^3) \cos[\theta] r[i]}{10000000000}$ 

```



In[91]:=  $D_{ma} = D_{mr} / \{c \rightarrow 1 + b, \epsilon_0 \rightarrow 1, \lambda \rightarrow 10^{-10}, K_1 \rightarrow r[i], K_m \rightarrow 1, r \rightarrow a\}$

Out[91]=  $\text{Cos}[\theta] - 2 b \text{Cos}[\theta]$

In[92]:=  $D_{ma} = \text{Expand}[D_{ma}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

Out[92]=  $\text{Cos}[\theta] - 2 b \text{Cos}[\theta]$

In[93]:=  $D_{ma} = \text{Simplify}[D_{ma}]$

Out[93]=  $(1 - 2 b) \text{Cos}[\theta]$

In[94]:=  $D_{ia} = D_{ia} / \{b \rightarrow b[i]\}$

Out[94]= 
$$-\frac{(-9999999999 - 9999999997 b[i] + 3 b[i]^2 + b[i]^3) \text{Cos}[\theta] r[i]}{10000000000}$$

In[95]:=  $D_{ma} = D_{ma} / \{b \rightarrow b[i]\}$

Out[95]=  $(1 - 2 b[i]) \text{Cos}[\theta]$

In[96]:=  $f = \frac{D_{ia}}{D_{ma}}$

Out[96]= 
$$-\frac{(-9999999999 - 9999999997 b[i] + 3 b[i]^2 + b[i]^3) r[i]}{10000000000 (1 - 2 b[i])}$$

In[97]:=  $\text{Simplify}[\%]$

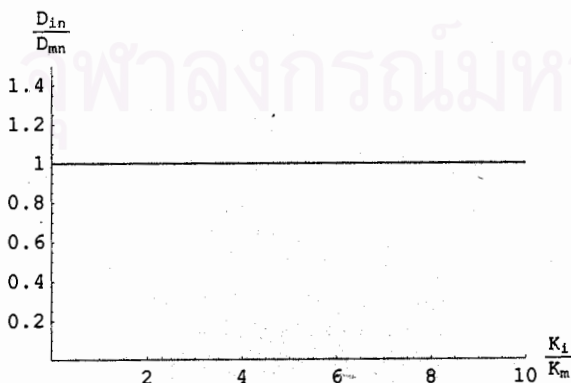
Out[97]= 
$$\frac{(-9999999999 - 9999999997 b[i] + 3 b[i]^2 + b[i]^3) r[i]}{10000000000 (-1 + 2 b[i])}$$

In[98]:=  $\text{Do}[g[i] = f, \{i, 1, 17\}]$

In[99]:=  $\text{Gt} = \text{Table}[\{r[i], g[i]\}, \{i, 1, 17\}]$

Out[99]=  $\{\{0.02, 1.\}, \{0.1, 1.\}, \{0.2, 1.\}, \{0.3, 1.\}, \{0.4, 1.\}, \{0.6, 1.\}, \{0.8, 1.\}, \{1, 1.\}, \{1.2, 1.\}, \{1.5, 1.\}, \{2, 1.\}, \{3, 1.\}, \{4, 1.\}, \{5, 1.\}, \{6, 1.\}, \{8, 1.\}, \{10, 1.\}\}$

In[100]:=  $\text{ListPlot}[\text{Gt}, \text{AxesLabel} \rightarrow \{\frac{K_1}{K_m}, \frac{D_{in}}{D_{mn}}\}, \text{PlotJoined} \rightarrow \text{True}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{0, 10\}, \{0, 1.5\}\}]$



Out[100]= - Graphics -

In[101]:=



In[102]:=  $F = We /. \{b \rightarrow b[i]\}$

Out[102]=  $-0.08 b[i] - 2. \times 10^{-12} y (1+b[i])^4 + \frac{1}{2} (1+0.08 y (1+b[i])^2 + 0.08 (-1+2 b[i])^2)$

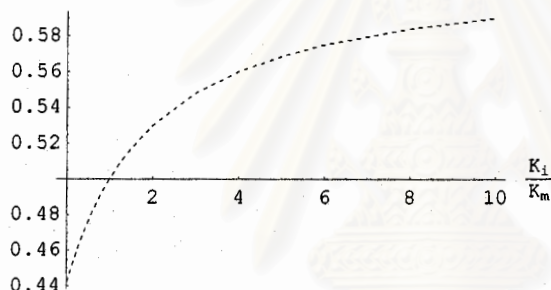
In[103]:=  $Do[Fv[i], \{i, 1, 17\}]$

In[104]:=  $dt1 = Table[\{r[i], Fv[i]\}, \{i, 1, 17\}]$

Out[104]=  $\{\{0.02, 0.441782\}, \{0.1, 0.448571\}, \{0.2, 0.456364\}, \{0.3, 0.463478\}, \{0.4, 0.47\}, \{0.6, 0.481538\}, \{0.8, 0.491429\}, \{1, 0.5\}, \{1.2, 0.5075\}, \{1.5, 0.517143\}, \{2, 0.53\}, \{3, 0.548\}, \{4, 0.56\}, \{5, 0.568571\}, \{6, 0.575\}, \{8, 0.584\}, \{10, 0.59\}\}$

In[105]:=  $Graph1 = ListPlot[dt1, AxesLabel \rightarrow \{\frac{K_i}{K_m}, \text{"Energy functional"}\}, PlotJoined \rightarrow True, PlotStyle \rightarrow \{Dashing[\{0.01, 0.01\}]\}$

Energy functional



Out[105]= - Graphics -

In[106]:=

In[107]:= (\* consider nonlinear partial differential eq. of D \*)

In[108]:=  $sakin = \mathfrak{E}_1 /. \{c \rightarrow 1+b\}$

Out[108]=  $(1+b) r \text{Cos}[\theta] e_0$

In[109]:=  $Grad[sakin]$

Out[109]=  $\{(1+b) \text{Cos}[\theta] e_0, -(1+b) \text{Sin}[\theta] e_0, 0\}$

In[110]:=  $Div[e_0 * K_1 * Grad[sakin] + e_0 * K_1 * \lambda * (Grad[sakin] . Grad[sakin]) * Grad[sakin]]$

Out[110]=  $\frac{1}{r^2} (\text{Csc}[\theta] (r \text{Sin}[\theta] (-(1+b) \text{Cos}[\theta] e_0 K_1 e_0 - (1+b) \lambda \text{Cos}[\theta] e_0 ((1+b)^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 + (1+b)^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2) K_1 e_0) + 2 r \text{Sin}[\theta] ((1+b) \text{Cos}[\theta] e_0 K_1 e_0 + (1+b) \lambda \text{Cos}[\theta] e_0 ((1+b)^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 + (1+b)^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2) K_1 e_0) + r \text{Cos}[\theta] (-(1+b) \text{Sin}[\theta] e_0 K_1 e_0 - (1+b) \lambda \text{Sin}[\theta] e_0 ((1+b)^2 \text{Cos}[\theta]^2 e_0^2 + (1+b)^2 \text{Sin}[\theta]^2 e_0^2) K_1 e_0))$

```

In[111]:= Simplify[%]
Out[111]= 0

In[112]:=

In[113]:= (* consider AMJ by using perturbation *)

In[114]:=  $\eta = \frac{3}{(2 * K_m + K_1)}$ 
 $\gamma = \frac{(K_1 - K_m)}{(2 * K_m + K_1)}$ 

Out[114]=  $\frac{3}{K_1 + 2 K_m}$ 

Out[115]=  $\frac{K_1 - K_m}{K_1 + 2 K_m}$ 

In[116]:=  $Amj_1 = -\eta * K_m * E_0 * r * \text{Cos}[\theta] * \left(1 + \frac{K_1 * K_m^2 * \eta^3 * \lambda * E_0^2}{3}\right)$ 

Out[116]=  $-\frac{3 r \text{Cos}[\theta] e_0 K_m \left(1 + \frac{9 \lambda e_0^3 K_1 K_m^2}{(K_1 + 2 K_m)^3}\right)}{K_1 + 2 K_m}$ 

In[117]:=  $Amj_1 = \text{Expand}[\%]$ 

Out[117]=  $-\frac{27 r \lambda \text{Cos}[\theta] e_0^3 K_1 K_m^2}{(K_1 + 2 K_m)^4} - \frac{3 r \text{Cos}[\theta] e_0 K_m}{K_1 + 2 K_m}$ 

In[118]:=  $Amj_1 = \text{Simplify}[\%]$ 

Out[118]=  $\frac{3 r \text{Cos}[\theta] e_0 K_m (-9 \lambda e_0^3 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)}{(K_1 + 2 K_m)^4}$ 

In[119]:=  $Amj_m = -E_0 * r * \text{Cos}[\theta] + \gamma * E_0 * a^3 * r^{-2} * \text{Cos}[\theta] * \left(1 - \frac{K_1 * K_m^3 * \eta^3 * \lambda * E_0^2}{K_1 - K_m}\right)$ 

Out[119]=  $-r \text{Cos}[\theta] e_0 + \frac{a^3 \text{Cos}[\theta] e_0 (K_1 - K_m) \left(1 - \frac{27 \lambda e_0^3 K_1 K_m^3}{(K_1 - K_m) (K_1 + 2 K_m)^3}\right)}{r^2 (K_1 + 2 K_m)}$ 

In[120]:=  $Amj_m = \text{Expand}[\%]$ 

Out[120]=  $-r \text{Cos}[\theta] e_0 - \frac{27 a^3 \lambda \text{Cos}[\theta] e_0^3 K_1^2 K_m^3}{r^2 (K_1 - K_m) (K_1 + 2 K_m)^4} +$ 
 $\frac{27 a^3 \lambda \text{Cos}[\theta] e_0^3 K_1 K_m^4}{r^2 (K_1 - K_m) (K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{a^3 \text{Cos}[\theta] e_0 K_1}{r^2 (K_1 + 2 K_m)} - \frac{a^3 \text{Cos}[\theta] e_0 K_m}{r^2 (K_1 + 2 K_m)}$ 

In[121]:=  $Amj_m = \text{Simplify}[\%]$ 

Out[121]=  $-\frac{1}{r^2 (K_1 + 2 K_m)^4}$ 
 $(\text{Cos}[\theta] e_0 ((-a^3 + r^3) K_1^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_1^3 K_m - 6 (a^3 - 4 r^3) K_1^2 K_m^2 +$ 
 $(32 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^3)) K_1 K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4))$ 

In[122]:=

In[123]:=  $A1 = Amj_1 /. \{r \rightarrow a, e_0 \rightarrow 1, \lambda \rightarrow 10^{-10}, K_1 \rightarrow r[i], K_m \rightarrow 1\}$ 

Out[123]=  $\frac{3 a \text{Cos}[\theta] \left(-\frac{9 r[i]}{10000000000} - (2 + r[i])^3\right)}{(2 + r[i])^4}$ 

```

In[124]:= A2 = Amj<sub>z</sub> /. {r → a, e<sub>0</sub> → 1, λ → 10<sup>-10</sup>, K<sub>1</sub> → r[i], K<sub>m</sub> → 1}

Out[124]= 
$$\frac{\cos[\theta] (24 a^3 + \frac{360000000027 a^2 r[i] + 10 a^3 r[i]^2 + 3 a^3 r[i]^3}{10000000000})}{a^2 (2 + r[i])^4}$$

In[125]:= Simplify[ $\frac{A1}{A2}$ ]

Out[125]= 1

In[126]:= Do[g[i] =  $\frac{A1}{A2}$ ;  
, {i, 1, 17}]

In[127]:= Gto = Table[{r[i], g[i]}, {i, 1, 17}]

Out[127]= {{0.02, 1.}, {0.1, 1.}, {0.2, 1.}, {0.3, 1.}, {0.4, 1.},  
{0.6, 1.}, {0.8, 1.}, {1, 1}, {1.2, 1.}, {1.5, 1.},  
{2, 1}, {3, 1}, {4, 1}, {5, 1}, {6, 1}, {8, 1}, {10, 1}}

In[128]:= ListPlot[Gto, AxesLabel → {" $\frac{K_1}{K_m}$ ", " $\frac{\Phi_1}{\Phi_m}$ "},  
PlotJoined → True, PlotRange → {{0, 10}, {0, 2}}]



Out[128]= - Graphics -

In[129]:-

In[130]:- E<sub>1</sub> = -Grad[Amj<sub>1</sub>]

Out[130]= 
$$\left\{ -\frac{3 \cos[\theta] e_0 K_m (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)}{(K_1 + 2 K_m)^4}, \frac{3 \sin[\theta] e_0 K_m (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)}{(K_1 + 2 K_m)^4}, 0 \right\}$$

In[131]:- E<sub>m</sub> = -Grad[Amj<sub>m</sub>]

Out[131]= 
$$\left\{ \frac{\cos[\theta] e_0 (3 r^2 K_1^4 + 24 r^2 K_1^3 K_m + 72 r^2 K_1^2 K_m^2 + 96 r^2 K_1 K_m^3 + 48 r^2 K_m^4)}{r^2 (K_1 + 2 K_m)^4}, \right.$$
  

$$\frac{1}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} \{ 2 \cos[\theta] e_0 ((-a^3 + r^3) K_1^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_1^3 K_m -$$
  

$$6 (a^3 - 4 r^3) K_1^2 K_m^2 + (32 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_1 K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4),$$
  

$$-\frac{1}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} \{ \sin[\theta] e_0 ((-a^3 + r^3) K_1^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_1^3 K_m -$$
  

$$6 (a^3 - 4 r^3) K_1^2 K_m^2 + (32 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_1 K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4), 0 \}$$

$$\text{In}[132] := \mathbf{E}_{ni} = -\partial_r \mathbf{A} m_j i$$

$$\text{Out}[132] = -\frac{3 \cos[\theta] e_0 K_m (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)}{(K_i + 2 K_m)^4}$$

$$\text{In}[133] := \mathbf{E}_{nm} = -\partial_r \mathbf{A} m_j m$$

$$\text{Out}[133] = \frac{\cos[\theta] e_0 (3 r^2 K_i^4 + 24 r^2 K_i^3 K_m + 72 r^2 K_i^2 K_m^2 + 96 r^2 K_i K_m^3 + 48 r^2 K_m^4)}{r^2 (K_i + 2 K_m)^4} -$$

$$\frac{1}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4}$$

$$(2 \cos[\theta] e_0 ((-a^3 + r^3) K_i^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_i^3 K_m - 6 (a^3 - 4 r^3) K_i^2 K_m^2 +$$

$$(32 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_i K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4))$$

$$\text{In}[134] :=$$

$$\text{In}[135] := \mathbf{D}_{Ai} = K_i * \mathbf{E}_{ni} - \lambda * K_i * (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_i) * \mathbf{E}_{ni}$$

$$\text{Out}[135] = -\frac{3 \cos[\theta] e_0 K_i K_m (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)}{(K_i + 2 K_m)^4} +$$

$$\frac{1}{(K_i + 2 K_m)^4} \left( 3 \lambda \cos[\theta] e_0 K_i K_m (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3) \right.$$

$$\left. \left( \frac{9 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8} + \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{9 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8} \right) \right)$$

$$\text{In}[136] := \mathbf{D}_{Ai} = \text{Expand}[\mathbf{D}_{Ai}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$$

$$\text{Out}[136] = \frac{3 \cos[\theta] e_0 K_i^{12} K_m}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{66 \cos[\theta] e_0 K_i^{11} K_m^2}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{660 \cos[\theta] e_0 K_i^{10} K_m^3}{(K_i + 2 K_m)^{12}} +$$

$$\frac{3960 \cos[\theta] e_0 K_i^9 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{54 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^9 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{15840 \cos[\theta] e_0 K_i^8 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{864 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^8 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{729 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^8 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{44352 \cos[\theta] e_0 K_i^7 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{6048 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^7 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{8748 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^7 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{88704 \cos[\theta] e_0 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{24192 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{43740 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{6561 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{126720 \cos[\theta] e_0 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{60480 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{116640 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{39366 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} +$$

$$\frac{126720 \cos[\theta] e_0 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{96768 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{174960 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{78732 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{19683 \lambda^4 \cos[\theta] e_0^9 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{84480 \cos[\theta] e_0 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{96768 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{139968 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{52488 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} +$$

$$\frac{33792 \cos[\theta] e_0 K_i^2 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{55296 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^2 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} -$$

$$\frac{46656 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^2 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{6144 \cos[\theta] e_0 K_i K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{13824 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{12}}$$

In[137]:=  $D_{Am} = K_m * E_{nm}$

$$\text{Out[137]} = K_m \left( \frac{\cos[\theta] e_0 (3 r^2 K_1^4 + 24 r^2 K_1^3 K_m + 72 r^2 K_1^2 K_m^2 + 96 r^2 K_1 K_m^3 + 48 r^2 K_m^4)}{r^2 (K_1 + 2 K_m)^4} - \frac{1}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} (2 \cos[\theta] e_0 ((-a^3 + r^3) K_1^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_1^3 K_m - 6 (a^3 - 4 r^3) K_1^2 K_m^2 + (32 r^3 + a^2 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_1 K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4) \right)$$

In[138]:=  $D_{in} = \text{Expand}[D_{Am}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$$\text{Out[138]} = \frac{\cos[\theta] e_0 K_1^4 K_m}{(K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{2 a^3 \cos[\theta] e_0 K_1^3 K_m}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{8 \cos[\theta] e_0 K_1^3 K_m^2}{(K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{10 a^3 \cos[\theta] e_0 K_1^2 K_m^2}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{24 \cos[\theta] e_0 K_1^2 K_m^3}{(K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{12 a^3 \cos[\theta] e_0 K_1^2 K_m^3}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{32 \cos[\theta] e_0 K_1 K_m^4}{(K_1 + 2 K_m)^4} - \frac{9 a^3 \cos[\theta] e_0 K_1 K_m^4}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} - \frac{54 a^3 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_1 K_m^4}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4} + \frac{16 \cos[\theta] e_0 K_m^5}{(K_1 + 2 K_m)^4} - \frac{16 a^3 \cos[\theta] e_0 K_m^5}{r^3 (K_1 + 2 K_m)^4}$$



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



$$\text{In}[139] := \frac{D_{\lambda i}}{D_{\lambda m}}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[139] = & \left( \frac{3 \cos[\theta] e_0 K_i^{12} K_m}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{66 \cos[\theta] e_0 K_i^{11} K_m^2}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{660 \cos[\theta] e_0 K_i^{10} K_m^3}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \right. \\ & \frac{3960 \cos[\theta] e_0 K_i^9 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{54 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^9 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{15840 \cos[\theta] e_0 K_i^8 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{864 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^8 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{729 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^8 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{44352 \cos[\theta] e_0 K_i^7 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{6048 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^7 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{8748 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^7 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \\ & \frac{88704 \cos[\theta] e_0 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{24192 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{43740 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{6561 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^6 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \\ & \frac{126720 \cos[\theta] e_0 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{60480 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{116640 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{39366 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^5 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \\ & \frac{126720 \cos[\theta] e_0 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{96768 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{174960 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{78732 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{19683 \lambda^4 \cos[\theta] e_0^9 K_i^4 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{84480 \cos[\theta] e_0 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{96768 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{139968 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{52488 \lambda^3 \cos[\theta] e_0^7 K_i^3 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \frac{33792 \cos[\theta] e_0 K_i^2 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \\ & \frac{55296 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i^2 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{46656 \lambda^2 \cos[\theta] e_0^5 K_i^2 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} + \\ & \left. \frac{6144 \cos[\theta] e_0 K_i K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} - \frac{13824 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{12}} \right) / \\ & \left( \frac{\cos[\theta] e_0 K_i^4 K_m}{(K_i + 2 K_m)^4} + \frac{2 a^3 \cos[\theta] e_0 K_i^4 K_m}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4} + \frac{8 \cos[\theta] e_0 K_i^3 K_m^2}{(K_i + 2 K_m)^4} + \right. \\ & \frac{10 a^3 \cos[\theta] e_0 K_i^3 K_m^2}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4} + \frac{24 \cos[\theta] e_0 K_i^2 K_m^3}{(K_i + 2 K_m)^4} + \\ & \frac{12 a^3 \cos[\theta] e_0 K_i^2 K_m^3}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4} + \frac{32 \cos[\theta] e_0 K_i K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^4} - \frac{8 a^3 \cos[\theta] e_0 K_i K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4} - \\ & \left. \frac{54 a^3 \lambda \cos[\theta] e_0^3 K_i K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4} + \frac{16 \cos[\theta] e_0 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^4} - \frac{16 a^3 \cos[\theta] e_0 K_m^5}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4} \right) \end{aligned}$$

In[140]:= Simplify[%]

$$\begin{aligned} \text{Out}[140] = & (3 r^3 K_i (K_i^{11} + 22 K_i^{10} K_m + 220 K_i^9 K_m^2 - 6 (-220 + 3 \lambda e_0^2) K_i^8 K_m^3 - \\ & 3 (-1760 + 96 \lambda e_0^2 + 81 \lambda^2 e_0^4) K_i^7 K_m^4 - 12 (-1232 + 168 \lambda e_0^2 + 243 \lambda^2 e_0^4) \\ & K_i^6 K_m^5 - 3 (-9856 + 2688 \lambda e_0^2 + 4860 \lambda^2 e_0^4 + 729 \lambda^3 e_0^6) K_i^5 K_m^6 - \\ & 6 (-7040 + 3360 \lambda e_0^2 + 6480 \lambda^2 e_0^4 + 2187 \lambda^3 e_0^6) K_i^4 K_m^7 - \\ & 3 (-14080 + 10752 \lambda e_0^2 + 19440 \lambda^2 e_0^4 + 8748 \lambda^3 e_0^6 + 2187 \lambda^4 e_0^8) K_i^3 K_m^8 - \\ & 8 (-3520 + 4032 \lambda e_0^2 + 5832 \lambda^2 e_0^4 + 2187 \lambda^3 e_0^6) K_i^2 K_m^9 - \\ & 64 (-176 + 288 \lambda e_0^2 + 243 \lambda^2 e_0^4) K_i K_m^{10} + 512 (4 - 9 \lambda e_0^2) K_m^{11}) / \\ & ((K_i + 2 K_m)^8 ((2 a^3 + r^3) K_i^4 + 2 (5 a^3 + 4 r^3) K_i^3 K_m + 12 (a^3 + 2 r^3) K_i^2 K_m^2 - \\ & 2 (-16 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_i K_m^3 + 16 (-a^3 + r^3) K_m^4)) \end{aligned}$$

In[141]:= dt1 = D<sub>At</sub> /. {r → a, e<sub>0</sub> → 1, λ → 10<sup>-10</sup>, K<sub>1</sub> → r[i], K<sub>m</sub> → 1}

Out[141]= 
$$\frac{119999999973 \cos[\theta] r[i]}{19531250 (2+r[i])^{12}} + \frac{52799999991359999999271 \cos[\theta] r[i]^2}{1562500000000000000 (2+r[i])^{12}} +$$

$$\frac{10559999998790399999825039999993439 \cos[\theta] r[i]^3}{1250000000000000000000000000000 (2+r[i])^{12}} +$$

$$\frac{1267199999903231999982503999999212679999980317 \cos[\theta] r[i]^4}{1000 (2+r[i])^{12}} +$$

$$\frac{6335999999697599999941679999980317 \cos[\theta] r[i]^5}{500 (2+r[i])^{12}} +$$

$$\frac{8870399999758079999956259999993439 \cos[\theta] r[i]^6}{100 (2+r[i])^{12}} +$$

$$\frac{1108799999984879999997813 \cos[\theta] r[i]^7}{25000 (2+r[i])^{12}} +$$

$$\frac{15839999999135999999271 \cos[\theta] r[i]^8}{1000 (2+r[i])^{12}} + \frac{1979999999973 \cos[\theta] r[i]^9}{5000000000 (2+r[i])^{12}} +$$

$$\frac{660 \cos[\theta] r[i]^{10}}{(2+r[i])^{12}} + \frac{66 \cos[\theta] r[i]^{11}}{(2+r[i])^{12}} + \frac{3 \cos[\theta] r[i]^{12}}{(2+r[i])^{12}}$$

In[142]:= dt2 = D<sub>Am</sub> /. {r → a, e<sub>0</sub> → 1, λ → 10<sup>-10</sup>, K<sub>1</sub> → r[i], K<sub>m</sub> → 1}

Out[142]= 
$$\frac{119999999973 \cos[\theta] r[i]}{5000000000 (2+r[i])^4} +$$

$$\frac{36 \cos[\theta] r[i]^2}{(2+r[i])^4} + \frac{18 \cos[\theta] r[i]^3}{(2+r[i])^4} + \frac{3 \cos[\theta] r[i]^4}{(2+r[i])^4}$$

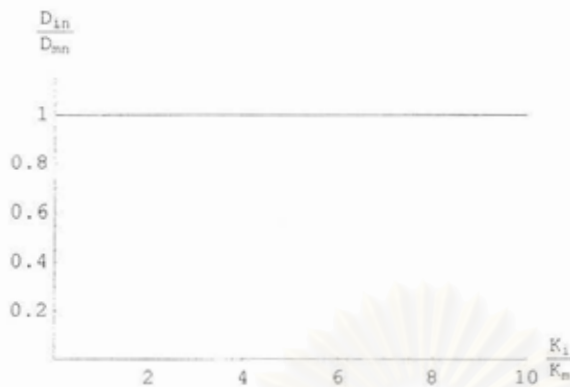
In[143]:= Do[g[i] =  $\frac{dt1}{dt2}$  ;, {i, 1, 17}]

In[144]:= Gto = Table[{r[i], g[i]}, {i, 1, 17}]

Out[144]= {{0.02, 1.}, {0.1, 1.}, {0.2, 1.},  
 {0.3, 1.}, {0.4, 1.}, {0.6, 1.}, {0.8, 1.},  
 {1,  $\frac{2699999999819999999972999999990999999999}{26999999998200000000000000000000000000000000000000}$ }, {1.2, 1.},  
 {1.5, 1.}, {2,  $\frac{748982857121791999996445257142757165714284777}{748982857121792000}$ },  
 {3,  $\frac{488281249992968748998860937499975396249999822853}{48828124999296875000}$ },  
 {4,  $\frac{8639999999927999999891999999981999999981999999999}{8639999999928000}$ },  
 {5,  $\frac{158186139439169868655885645171998499717999993439}{158186139439169868656000}$ },  
 {6,  $\frac{1533916891423178751999317489371421373074285688979}{1533916891423178752000}$ },  
 {8,  $\frac{195312499999648437499962031249999726624999993439}{1953124999996484375000}$ },  
 {10,  $\frac{11324620799988203519998894079999942399999999}{1132462079998820352000}$ }}



In[145]:= ListPlot[Gto, AxesLabel -> {" $\frac{K_i}{K_m}$ ", " $\frac{D_{in}}{D_{mn}}$ "},  
PlotJoined -> True, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 1.2}}]



Out[145]= - Graphics -

In[146]:=  $G_i = E_i \cdot E_i$

$$\text{Out[146]} = \frac{9 \cos^2[\theta] e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{9 \sin^2[\theta] e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8}$$

In[147]:=  $G_{i1} = K_i * G_i$

$$\text{Out[147]} = K_i \left( \frac{9 \cos^2[\theta] e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{9 \sin^2[\theta] e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8} \right)$$

In[148]:=  $G_{i2} = \lambda * K_i * (G_i^2)$

$$\text{Out[148]} = \lambda K_i \left( \frac{9 \cos^2[\theta] e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{9 \sin^2[\theta] e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_i K_m^2 - (K_i + 2 K_m)^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8} \right)^2$$

In[149]:=  $G_{i1} = \text{Expand}[G_{i1}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$$\text{Out[149]} = \frac{9 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{108 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{540 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{162 \lambda e_0^4 K_i^5 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1440 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{972 \lambda e_0^4 K_i^4 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{2160 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1944 \lambda e_0^4 K_i^3 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{729 \lambda^2 e_0^6 K_i^3 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1728 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1296 \lambda e_0^4 K_i^2 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{576 e_0^2 K_i K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^8}$$

In[150]:=  $G_{i1} = \text{Simplify}[\%]$

$$\text{Out[150]} = \frac{9 e_0^2 K_i K_m^2 (K_i^3 + 6 K_i^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8}$$

In[151]:=  $G_{i2} = \text{Expand}[G_{i2}, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$$\begin{aligned} \text{Out}[151] = & \frac{81 \lambda e_0^4 K_i^3 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{1944 \lambda e_0^4 K_i^{12} K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{21384 \lambda e_0^4 K_i^{11} K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{2916 \lambda^2 e_0^6 K_i^{11} K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{142560 \lambda e_0^4 K_i^{10} K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{52488 \lambda^2 e_0^6 K_i^{10} K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{641520 \lambda e_0^4 K_i^9 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{419904 \lambda^2 e_0^6 K_i^9 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{39366 \lambda^3 e_0^8 K_i^9 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{2052864 \lambda e_0^4 K_i^8 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{1959552 \lambda^2 e_0^6 K_i^8 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{472392 \lambda^3 e_0^8 K_i^8 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{4790016 \lambda e_0^4 K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{5878656 \lambda^2 e_0^6 K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{2361960 \lambda^3 e_0^8 K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{236196 \lambda^4 e_0^{10} K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{8211456 \lambda e_0^4 K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{11757312 \lambda^2 e_0^6 K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{6298560 \lambda^3 e_0^8 K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{1417176 \lambda^4 e_0^{10} K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{10264320 \lambda e_0^4 K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{15676416 \lambda^2 e_0^6 K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{9447840 \lambda^3 e_0^8 K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{2834352 \lambda^4 e_0^{10} K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{531441 \lambda^5 e_0^{12} K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{9123840 \lambda e_0^4 K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{13436928 \lambda^2 e_0^6 K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{7558272 \lambda^3 e_0^8 K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{1889568 \lambda^4 e_0^{10} K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{5474304 \lambda e_0^4 K_i^3 K_m^{14}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{6718464 \lambda^2 e_0^6 K_i^3 K_m^{14}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{2519424 \lambda^3 e_0^8 K_i^3 K_m^{14}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{1990656 \lambda e_0^4 K_i^2 K_m^{15}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{1492992 \lambda^2 e_0^6 K_i^2 K_m^{15}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{331776 \lambda e_0^4 K_i K_m^{16}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} \end{aligned}$$

In[152]:=  $G_{i2} = \text{Simplify}[\%]$

$$\text{Out}[152] = \frac{81 \lambda e_0^4 K_i K_m^4 (K_i^3 + 6 K_i^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^4}{(K_i + 2 K_m)^{16}}$$

In[153]:=  $G_m = K_m * (E_m \cdot E_m)$

$$\begin{aligned} \text{Out}[153] = & K_m \left( \frac{1}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} \right. \\ & (\sin[\theta]^2 e_0^2 ((-a^3 + r^3) K_i^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_i^3 K_m - 6 (a^3 - 4 r^3) K_i^2 K_m^2 + \\ & (32 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_i K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4)^2 + \\ & \left. \frac{(\cos[\theta] e_0 (3 r^2 K_i^4 + 24 r^2 K_i^3 K_m + 72 r^2 K_i^2 K_m^2 + 96 r^2 K_i K_m^3 + 48 r^2 K_m^4))}{r^2 (K_i + 2 K_m)^4} \right. \\ & \left. \frac{1}{r^3 (K_i + 2 K_m)^4} \right. \\ & (2 \cos[\theta] e_0 ((-a^3 + r^3) K_i^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_i^3 K_m - 6 (a^3 - 4 r^3) K_i^2 K_m^2 + \\ & (32 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_i K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4))^2 \end{aligned}$$

In[154]:=  $G_m = \text{Expand}[G_m, \text{Trig} \rightarrow \text{True}]$

$$\begin{aligned} \text{Out}[154] = & \frac{e_0^2 K_i^8 K_m}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{5 a^6 e_0^2 K_i^8 K_m}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{a^3 e_0^2 K_i^8 K_m}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{3 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^8 K_m}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\ & \frac{3 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^8 K_m}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{3 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^8 K_m}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{3 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^8 K_m}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \\ & \frac{16 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{25 a^6 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{13 a^3 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{15 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\ & \frac{39 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{15 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{39 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^7 K_m^2}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{112 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{185 a^6 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{70 a^3 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{111 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{210 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{111 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{210 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^6 K_m^3}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{448 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{130 a^6 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{196 a^3 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{78 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{588 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{78 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{588 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{135 a^6 \lambda e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{27 a^3 \lambda e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{81 a^6 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{81 a^3 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{81 a^6 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{81 a^3 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^5 K_m^4}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{1120 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^8} - \frac{50 a^6 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{280 a^3 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{30 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{840 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{30 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{840 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{675 a^6 \lambda e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{216 a^3 \lambda e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{405 a^6 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{648 a^3 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{405 a^6 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{648 a^3 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^4 K_m^5}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1792 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^8} - \frac{320 a^6 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{112 a^3 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{192 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{336 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{192 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{336 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{810 a^6 \lambda e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{648 a^3 \lambda e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{486 a^6 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{1944 a^3 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{486 a^6 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1944 a^3 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^3 K_m^6}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1792 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{200 a^6 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{224 a^3 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{120 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{672 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{120 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{672 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{540 a^6 \lambda e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{864 a^3 \lambda e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{324 a^6 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{2592 a^3 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{324 a^6 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{2592 a^3 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{3645 a^6 \lambda^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{2187 a^6 \lambda^2 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{2187 a^6 \lambda^2 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i^2 K_m^7}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1024 e_0^2 K_i K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{160 a^6 e_0^2 K_i K_m^8}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{320 a^3 e_0^2 K_i K_m^8}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{96 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{960 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{96 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{960 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1080 a^6 \lambda e_0^2 K_i K_m^8}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{432 a^3 \lambda e_0^2 K_i K_m^8}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{648 a^6 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{1296 a^3 \lambda \cos[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& \frac{648 a^6 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1296 a^3 \lambda \sin[\theta]^2 e_0^2 K_i K_m^8}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{256 e_0^2 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^8} + \\
& \frac{160 a^6 e_0^2 K_m^9}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \frac{128 a^3 e_0^2 K_m^9}{r^3 (K_i + 2 K_m)^8} + \frac{96 a^6 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_m^9}{r^6 (K_i + 2 K_m)^8} - \\
& 384 a^3 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_m^9 - 96 a^6 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_m^9 - 384 a^3 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_m^9
\end{aligned}$$

In[155]:=  $G_m = \text{Simplify}[\%]$

$$\begin{aligned} \text{Out}[155] = & \frac{1}{2 r^6 (K_i + 2 K_m)^8} (e_0^2 K_m ((5 a^6 + 2 a^3 r^3 + 2 r^6 + 3 a^3 (a^3 + 2 r^3) \cos[2 \theta]) K_i^6 + \\ & 2 (25 a^6 + 13 a^3 r^3 + 16 r^6 + 3 a^3 (5 a^3 + 13 r^3) \cos[2 \theta]) K_i^7 K_m + \\ & (185 a^6 + 140 a^3 r^3 + 224 r^6 + 3 a^3 (37 a^3 + 140 r^3) \cos[2 \theta]) K_i^8 K_m^2 - \\ & 2 (-448 r^6 + a^3 r^3 (-196 + 27 \lambda e_0^2) + 5 a^6 (-26 + 27 \lambda e_0^2) + \\ & 3 a^3 \cos[2 \theta] (r^3 (-196 + 27 \lambda e_0^2) + a^3 (-26 + 27 \lambda e_0^2))) K_i^5 K_m^3 - \\ & 2 (-1120 r^6 + 8 a^3 r^3 (-35 + 27 \lambda e_0^2) + 25 a^6 (2 + 27 \lambda e_0^2) + \\ & 3 a^3 \cos[2 \theta] (8 r^3 (-35 + 27 \lambda e_0^2) + 5 a^3 (2 + 27 \lambda e_0^2))) K_i^4 K_m^4 - \\ & 4 (-896 r^6 + 4 a^3 r^3 (-14 + 81 \lambda e_0^2) + 5 a^6 (32 + 81 \lambda e_0^2) + \\ & 3 a^3 \cos[2 \theta] (4 r^3 (-14 + 81 \lambda e_0^2) + a^3 (32 + 81 \lambda e_0^2))) K_i^3 K_m^5 + \\ & (3584 r^6 - 64 a^3 r^3 (7 + 27 \lambda e_0^2) + 5 a^6 (-80 + 216 \lambda e_0^2 + 729 \lambda^2 e_0^4) + \\ & 3 a^3 \cos[2 \theta] (-64 r^3 (7 + 27 \lambda e_0^2) + a^3 (-80 + 216 \lambda e_0^2 + 729 \lambda^2 e_0^4))) \\ & K_i^2 K_m^6 + 16 (128 r^6 + 5 a^6 (4 + 27 \lambda e_0^2) - 2 a^3 r^3 (20 + 27 \lambda e_0^2) + \\ & 3 a^3 \cos[2 \theta] (a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2) - 2 r^3 (20 + 27 \lambda e_0^2))) K_i K_m^7 + \\ & 64 (5 a^6 - 4 a^3 r^3 + 8 r^6 + 3 a^3 (a^3 - 4 r^3) \cos[2 \theta]) K_m^8)) \end{aligned}$$

In[156]:=  $P_1 = \int_0^a \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] * G_{i1} d\theta dr$

$$\text{Out}[156] = \frac{12 a^3 \pi e_0^2 K_i K_m^2 (K_i^3 + 6 K_i^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8}$$

In[157]:=  $P_1 = \text{Expand}[\%]$

$$\begin{aligned} \text{Out}[157] = & \frac{12 a^3 \pi e_0^2 K_i^7 K_m^2}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{144 a^3 \pi e_0^2 K_i^6 K_m^3}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{720 a^3 \pi e_0^2 K_i^5 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^8} + \\ & \frac{216 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^4 K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1920 a^3 \pi e_0^2 K_i^4 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1296 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^4 K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^8} + \\ & \frac{2880 a^3 \pi e_0^2 K_i^3 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{2592 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^3 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{972 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^3 K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^8} + \\ & \frac{2304 a^3 \pi e_0^2 K_i^2 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{1728 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^2 K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^8} + \frac{768 a^3 \pi e_0^2 K_i K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^8} \end{aligned}$$

In[158]:=  $P_{01} = \text{Simplify}[P_1 / (\frac{4}{3} \pi)]$

$$\text{Out}[158] = \frac{9 a^3 e_0^2 K_i K_m^2 (K_i^3 + 6 K_i^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^2}{(K_i + 2 K_m)^8}$$

In[159]:=  $P_1 = \text{Simplify}[\text{Coefficient}[\text{Collect}[P_{01}, a^3], a^3]] * \Omega_i$

$$\text{Out}[159] = \frac{9 e_0^2 K_i K_m^2 (K_i^3 + 6 K_i^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^2 \Omega_i}{(K_i + 2 K_m)^8}$$

In[160]:=  $P_2 = \int_0^a \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \sin[\theta] * G_{i2} d\theta dr$

$$\text{Out}[160] = \frac{108 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i K_m^4 (K_i^3 + 6 K_i^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^4}{(K_i + 2 K_m)^{16}}$$



In[161]:= P<sub>2</sub> = Expand[%]

$$\begin{aligned} \text{Out[161]} = & \frac{108 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^{13} K_m^4}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{2592 a^3 \pi \lambda e_0^6 K_i^{12} K_m^5}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{28512 a^3 \pi \lambda e_0^8 K_i^{11} K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{3888 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^{11} K_m^6}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{190080 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^{10} K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{69984 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^{10} K_m^7}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{855360 a^3 \pi \lambda e_0^6 K_i^9 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{559872 a^3 \pi \lambda^2 e_0^8 K_i^9 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{52488 a^3 \pi \lambda^3 e_0^8 K_i^9 K_m^8}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{2737152 a^3 \pi \lambda e_0^8 K_i^8 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{2612736 a^3 \pi \lambda^2 e_0^8 K_i^8 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{629856 a^3 \pi \lambda^3 e_0^8 K_i^8 K_m^9}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{6386688 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{7838208 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{3149280 a^3 \pi \lambda^3 e_0^6 K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{314928 a^3 \pi \lambda^4 e_0^{10} K_i^7 K_m^{10}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{10948608 a^3 \pi \lambda e_0^6 K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{15676416 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{8398080 a^3 \pi \lambda^3 e_0^8 K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{1889568 a^3 \pi \lambda^4 e_0^{10} K_i^6 K_m^{11}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{13685760 a^3 \pi \lambda e_0^6 K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{20901888 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{12597120 a^3 \pi \lambda^3 e_0^8 K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{3779136 a^3 \pi \lambda^4 e_0^{10} K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{708588 a^3 \pi \lambda^5 e_0^{12} K_i^5 K_m^{12}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{12165120 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{17915904 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{10077696 a^3 \pi \lambda^3 e_0^8 K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{2519424 a^3 \pi \lambda^4 e_0^{10} K_i^4 K_m^{13}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{7299072 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^3 K_m^{14}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{8957952 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^3 K_m^{14}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{3359232 a^3 \pi \lambda^3 e_0^8 K_i^3 K_m^{14}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \\ & \frac{2694208 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_i^2 K_m^{15}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{1990656 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_i^2 K_m^{15}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} + \frac{442368 a^3 \pi \lambda e_0^8 K_i K_m^{16}}{(K_i + 2 K_m)^{16}} \end{aligned}$$

In[162]:= P<sub>02</sub> = Simplify[P<sub>2</sub> / ((4/3) π)]

$$\text{Out[162]} = \frac{81 a^3 \lambda e_0^4 K_i K_m^4 (K_i^5 + 6 K_i^2 K_m + 3(4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^4}{(K_i + 2 K_m)^{16}}$$

In[163]:= P<sub>2</sub> = Simplify[Coefficient[Collect[P<sub>02</sub>, a<sup>3</sup>], a<sup>3</sup>]] \* Ω<sub>i</sub>

$$\text{Out[163]} = \frac{81 \lambda e_0^4 K_i K_m^4 (K_i^5 + 6 K_i^2 K_m + 3(4 + 3 \lambda e_0^2) K_i K_m^2 + 8 K_m^3)^4 \Omega_i}{(K_i + 2 K_m)^{16}}$$

$$\text{In}[164] := Q = \int_a^R \int_0^\pi 2 * \pi * r^2 * \text{Sin}[\theta] * G_m \, d\theta \, dr$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[164] = & \frac{1}{(K_1 + 2 K_m)^9} \left( \pi e_0^2 K_m \right. \\ & \left( -\frac{1}{3 a^3} (4 (-a^6 K_1^0 - 4 a^6 K_1^7 K_m + 38 a^6 K_1^6 K_m^2 + 344 a^6 K_1^5 K_m^3 + 108 a^6 \lambda e_0^2 K_1^4 K_m^4 + \right. \\ & 1160 a^6 K_1^4 K_m^4 + 540 a^6 \lambda e_0^2 K_1^4 K_m^4 + 2048 a^6 K_1^3 K_m^5 + 648 a^6 \lambda e_0^2 K_1^3 K_m^5 + \\ & 1952 a^6 K_1^3 K_m^6 - 432 a^6 \lambda e_0^2 K_1^3 K_m^6 - 1458 a^6 \lambda^2 e_0^4 K_1^2 K_m^6 + \\ & 896 a^6 K_1 K_m^7 - 864 a^6 \lambda e_0^2 K_1 K_m^7 + 128 a^6 K_m^8) \Big) + \frac{1}{3 R^3} \\ & \left. (4 (-2 a^6 K_1^8 + R^6 K_1^8 - 20 a^6 K_1^7 K_m + 16 R^6 K_1^7 K_m - 74 a^6 K_1^6 K_m^2 + 112 R^6 K_1^6 K_m^2 - \right. \\ & 104 a^6 K_1^6 K_m^3 + 448 R^6 K_1^6 K_m^3 + 108 a^6 \lambda e_0^2 K_1^5 K_m^3 + 40 a^6 K_1^5 K_m^4 + 1120 R^6 K_1^5 K_m^4 \\ & K_m^4 + 540 a^6 \lambda e_0^2 K_1^4 K_m^4 + 256 a^6 K_1^4 K_m^5 + 1792 R^6 K_1^4 K_m^5 + 648 a^6 \lambda e_0^2 K_1^4 K_m^5 + \\ & 160 a^6 K_1^3 K_m^6 + 1792 R^6 K_1^3 K_m^6 - 432 a^6 \lambda e_0^2 K_1^3 K_m^6 - 1458 a^6 \lambda^2 e_0^4 K_1^3 K_m^6 - \\ & 128 a^6 K_1 K_m^7 + 1024 R^6 K_1 K_m^7 - 864 a^6 \lambda e_0^2 K_1 K_m^7 - 128 a^6 K_m^8 + 256 R^6 K_m^8) \Big) \Big) \end{aligned}$$

$$\text{In}[165] := Q = \text{Expand}[\%]$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[165] = & \frac{4 a^3 \pi e_0^2 K_1^0 K_m}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{8 a^5 \pi e_0^2 K_1^6 K_m}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{4 \pi R^3 e_0^2 K_1^0 K_m}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{16 a^3 \pi e_0^2 K_1^7 K_m^2}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \\ & \frac{80 a^6 \pi e_0^2 K_1^7 K_m^2}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{64 \pi R^3 e_0^2 K_1^7 K_m^2}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{152 a^3 \pi e_0^2 K_1^6 K_m^3}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{296 a^6 \pi e_0^2 K_1^6 K_m^3}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \\ & \frac{448 \pi R^3 e_0^2 K_1^6 K_m^3}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{1376 a^3 \pi e_0^2 K_1^5 K_m^4}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{416 a^6 \pi e_0^2 K_1^5 K_m^4}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \\ & \frac{1792 \pi R^3 e_0^2 K_1^5 K_m^4}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{144 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_1^5 K_m^4}{(K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{144 a^6 \pi \lambda e_0^4 K_1^5 K_m^4}{R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \\ & \frac{4640 a^3 \pi e_0^2 K_1^4 K_m^5}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{160 a^6 \pi e_0^2 K_1^4 K_m^5}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{4480 \pi R^3 e_0^2 K_1^4 K_m^5}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \\ & \frac{720 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_1^4 K_m^5}{(K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{720 a^6 \pi \lambda e_0^4 K_1^4 K_m^5}{R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{8192 a^3 \pi e_0^2 K_1^3 K_m^6}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \\ & \frac{1024 a^6 \pi e_0^2 K_1^3 K_m^6}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{7168 \pi R^3 e_0^2 K_1^3 K_m^6}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{864 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_1^3 K_m^6}{(K_1 + 2 K_m)^9} + \\ & \frac{864 a^6 \pi \lambda e_0^4 K_1^3 K_m^6}{R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{7808 a^3 \pi e_0^2 K_1^2 K_m^7}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{640 a^6 \pi e_0^2 K_1^2 K_m^7}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \\ & \frac{7168 \pi R^3 e_0^2 K_1^2 K_m^7}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{576 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_1^2 K_m^7}{(K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{576 a^6 \pi \lambda e_0^4 K_1^2 K_m^7}{R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \\ & \frac{1944 a^3 \pi \lambda^2 e_0^6 K_1^2 K_m^7}{(K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{1944 a^6 \pi \lambda^2 e_0^6 K_1^2 K_m^7}{R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{3584 a^3 \pi e_0^2 K_1 K_m^8}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \\ & \frac{512 a^6 \pi e_0^2 K_1 K_m^8}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{4096 \pi R^3 e_0^2 K_1 K_m^8}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{1152 a^3 \pi \lambda e_0^4 K_1 K_m^8}{(K_1 + 2 K_m)^9} - \\ & \frac{1152 a^6 \pi \lambda e_0^4 K_1 K_m^8}{R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{512 a^3 \pi e_0^2 K_m^9}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} - \frac{512 a^6 \pi e_0^2 K_m^9}{3 R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{1024 \pi R^3 e_0^2 K_m^9}{3 (K_1 + 2 K_m)^9} \end{aligned}$$

$$\text{In}[166] := Q_0 = \text{Simplify}\left[Q / \left(\frac{4}{3} \pi\right)\right]$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[166] = & \frac{1}{R^3 (K_1 + 2 K_m)^9} \\ & \left( (-a^3 + R^3) e_0^2 K_m ((2 a^3 + R^3) K_m^6 + 4 (5 a^3 + 4 R^3) K_1^7 K_m + 2 (37 a^3 + 56 R^3) K_1^6 K_m^2 + \right. \\ & 4 (112 R^3 + a^3 (26 - 27 \lambda e_0^2)) K_1^5 K_m^3 - 20 (-56 R^3 + a^3 (2 + 27 \lambda e_0^2)) K_1^4 K_m^4 - \\ & 6 (-224 R^3 + a^3 (32 + 81 \lambda e_0^2)) K_1^3 K_m^5 + \\ & 2 (896 R^3 + a^3 (-80 + 216 \lambda e_0^2 + 729 \lambda^2 e_0^4)) K_1^2 K_m^6 + \\ & \left. 32 (32 R^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_1 K_m^7 + 128 (a^3 + 2 R^3) K_m^8 \right) \end{aligned}$$



In[167]:= Q1 = Simplify[Coefficient[Collect[Q0, a^3], a^3]] \* Omega\_1

Out[167]= 
$$\frac{1}{(K_1 + 2 K_m)^9} (e_0^2 K_m (K_1^4 + 4 K_1^2 K_m - 38 K_1^2 K_m^2 - 4 (86 + 27 \lambda e_0^2) K_1^2 K_m^3 - 20 (58 + 27 \lambda e_0^2) K_1^2 K_m^4 - 8 (256 + 81 \lambda e_0^2) K_1^2 K_m^5 + 2 (-976 + 216 \lambda e_0^2 + 729 \lambda^2 e_0^4) K_1^2 K_m^6 + 32 (-28 + 27 \lambda e_0^2) K_1 K_m^7 - 128 K_m^8) \Omega_1)$$

In[168]:= Q2 = Simplify[Coefficient[Collect[Q0, R^3], R^3]] \* V

Out[168]=  $V e_0^2 K_m$

In[169]:= surface = gamma \*  $\left(1 - \frac{K_1 * K_m^3 * \eta^3 * \lambda * E_0^2}{K_1 - K_m}\right) * E_0^2 * K_m * \Omega_1$

Out[169]= 
$$\frac{e_0^2 (K_1 - K_m) K_m \left(1 - \frac{27 \lambda e_0^2 K_1 K_m^3}{(K_1 - K_m) (K_1 + 2 K_m)^3}\right) \Omega_1}{K_1 + 2 K_m}$$

In[170]:=

In[171]:= W =  $\frac{1}{2} * (P_1 + Q_1 + Q_2) - \frac{1}{4} * P_2 + \text{surface}$

Out[171]= 
$$-\frac{81 \lambda e_0^4 K_1 K_m^4 (K_1^2 + 6 K_1^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_1 K_m^2 + 8 K_m^3)^4 \Omega_1}{4 (K_1 + 2 K_m)^{16}} - \frac{e_0^2 (K_1 - K_m) K_m \left(1 - \frac{27 \lambda e_0^2 K_1 K_m^3}{(K_1 - K_m) (K_1 + 2 K_m)^3}\right) \Omega_1}{K_1 + 2 K_m} - \frac{1}{2} \left( V e_0^2 K_m + \frac{9 e_0^2 K_1 K_m^2 (K_1^2 + 6 K_1^2 K_m + 3 (4 + 3 \lambda e_0^2) K_1 K_m^2 + 8 K_m^3)^2 \Omega_1}{(K_1 + 2 K_m)^9} + \frac{1}{(K_1 + 2 K_m)^9} (e_0^2 K_m (K_1^4 + 4 K_1^2 K_m - 38 K_1^2 K_m^2 - 4 (86 + 27 \lambda e_0^2) K_1^2 K_m^3 - 20 (58 + 27 \lambda e_0^2) K_1^2 K_m^4 - 8 (256 + 81 \lambda e_0^2) K_1^2 K_m^5 + 2 (-976 + 216 \lambda e_0^2 + 729 \lambda^2 e_0^4) K_1^2 K_m^6 + 32 (-28 + 27 \lambda e_0^2) K_1 K_m^7 - 128 K_m^8) \Omega_1) \right)$$

In[172]:=

In[173]:= Wre = W /. (V -> 1, Omega\_1 -> p, K\_1 -> y, K\_m -> 1, lambda -> 10^-10, E\_0 -> 1)

Out[173]= 
$$-\frac{81 p y (8 + \frac{120000000009 y}{1000000000} + 6 y^2 + y^3)^4}{40000000000 (2 + y)^{16}} + \frac{p (-1 + y) \left(1 - \frac{27 y}{10000000000 (-1 + y) (2 + y)^3}\right)}{2 + y} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{9 p y (8 + \frac{120000000009 y}{1000000000} + 6 y^2 + y^3)^2}{(2 + y)^9} + \frac{1}{(2 + y)^9} \left( p \left( -128 - \frac{279999999973 y}{312500000} - \frac{97599999997819999999271 y^2}{500000000000000000} - \frac{2560000000081 y^3}{1250000000} - \frac{580000000027 y^4}{500000000} - \frac{860000000027 y^5}{2500000000} - 38 y^6 + 4 y^7 + y^8 \right) \right) \right)$$

In[174]:= Wre = Wre /. {p → 0.08}

$$\text{Out[174]} = -\frac{1.62 \times 10^{-10} y (8 + \frac{120000000009 y}{10000000000} + 6 y^2 + y^3)^4}{(2+y)^{16}} + \frac{0.08 (-1+y) (1 - \frac{27 y}{10000000000 (-1+y) (2+y)^3})}{2+y} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{0.72 y (8 + \frac{120000000009 y}{10000000000} + 6 y^2 + y^3)^2}{(2+y)^8} + \frac{1}{(2+y)^8} \left( 0.08 \left( -128 - \frac{279999999973 y}{312500000} - \frac{9759999999783999999271 y^2}{5000000000000000000} - \frac{2560000000081 y^3}{1250000000} - \frac{580000000027 y^4}{500000000} - \frac{860000000027 y^5}{2500000000} - 38 y^6 + 4 y^3 + y^3 \right) \right) \right)$$

In[175]:= Wre = Simplify[%]

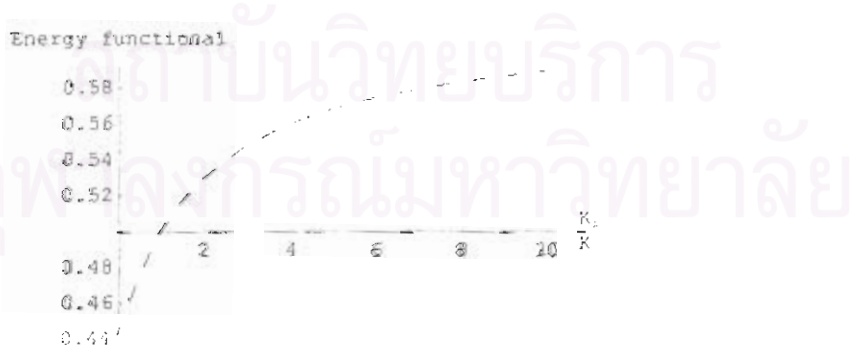
$$\text{Out[175]} = \frac{1}{2 (2+y)^{16}} (57671.7 + 473170. y + 1.81862 \times 10^6 y^2 + 4.34668 \times 10^6 y^3 + 7.23108 \times 10^6 y^4 + 8.87857 \times 10^6 y^5 + 8.32319 \times 10^6 y^6 + 6.07693 \times 10^6 y^7 + 3.4924 \times 10^6 y^8 + 1.58513 \times 10^6 y^9 + 566326. y^{10} + 157597. y^{11} + 33488. y^{12} + 5252.8 y^{13} + 573.6 y^{14} + 38.96 y^{15} + 1.24 y^{16})$$

In[176]:= Do[z = r[j];  
Famj[j] = Wre /. {y → z};  
, {j, 1, 17}]

In[177]:= dt2 = Table[{r[i], Famj[i]}, {i, 1, 17}]

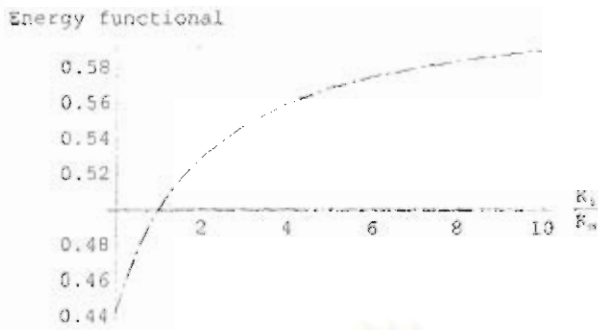
Out[177]= {{0.02, 0.441782}, {0.1, 0.448571}, {0.2, 0.456364},  
{0.3, 0.463478}, {0.4, 0.47}, {0.6, 0.481538}, {0.8, 0.491429},  
{1, 0.5}, {1.2, 0.5075}, {1.5, 0.517143}, {2, 0.53}, {3, 0.548},  
{4, 0.56}, {5, 0.568571}, {6, 0.575}, {8, 0.584}, {10, 0.59}}

In[178]:= Graph2 = ListPlot[dt2, AxesLabel → {" $\frac{K_1}{K_2}$ ", "Energy functional"},  
PlotJoined → True, PlotStyle → {Dashing[{0.04, 0.04}]}]



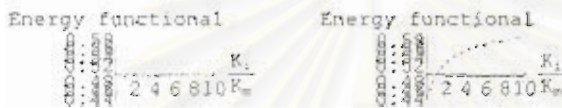
Out[178]= - Graphics -

In[179]:= Show[Graph1, Graph2]



Out[179]= - Graphics -

In[180]:= Show[GraphicsArray[{Graph1, Graph2}, GraphicsSpacing -> .2]];



In[181]:= E1

$$\text{Out[181]} = \left\{ -\frac{3 \cos[\theta] e_0 K_m (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)}{(K_1 + 2 K_m)^4}, \frac{3 \sin[\theta] e_0 K_m (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)}{(K_1 + 2 K_m)^4}, 0 \right\}$$

In[182]:= E1.E1

$$\text{Out[182]} = \frac{9 \cos[\theta]^2 e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)^2}{(K_1 + 2 K_m)^8} + \frac{9 \sin[\theta]^2 e_0^2 K_m^2 (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)^2}{(K_1 + 2 K_m)^8}$$

In[183]:= Div[E1]

Out[183]= 0

In[184]:= -(1 - λ\*(E1.E1))\*Div[E1] + ((λ\*E1).(Grad[E1.E1]))

Out[184]= 0

In[185]:= Simplify[%]

Out[185]= 0

In[186]:=

In[187]:= Do[k[i] = π[i];  
                  , {i, 0, 17}]

In[188]:= ϕ1

Out[188]= π Cos[θ] e0

```

In[189]:=  $\Phi_m$ 
Out[189]=  $\frac{a^3 b \cos[\theta] e_0}{r^2} + r \cos[\theta] e_1$ 

In[190]:= Amj1
Out[190]=  $\frac{3 r \cos[\theta] e_0 K_m (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)}{(K_1 + 2 K_m)^4}$ 

In[191]:= Amjm
Out[191]=  $-\frac{1}{r^2 (K_1 + 2 K_m)^4} (\cos[\theta] e_0 \{ (-a^3 + r^3) K_1^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K_1^3 K_m - 6 (a^3 - 4 r^2) K_1^2 K_m^2 + (32 r^3 + a^3 (4 + 27 \lambda e_0^2)) K_1 K_m^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) K_m^4 \})$ 

In[192]:= sakin =  $\frac{\Phi_1}{Amj_1}$ 
Out[192]=  $\frac{c (K_1 + 2 K_m)^4}{3 K_m (-9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 - (K_1 + 2 K_m)^3)}$ 

In[193]:= sakin = Simplify[%]
Out[193]=  $-\frac{c (K_1 + 2 K_m)^4}{3 K_m (9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 + (K_1 + 2 K_m)^3)}$ 

In[194]:= sakin = sakin /. (c → 1 + b)
Out[194]=  $-\frac{(1 + b) (K_1 + 2 K_m)^4}{3 K_m (9 \lambda e_0^2 K_1 K_m^2 + (K_1 + 2 K_m)^3)}$ 

In[195]:= sakin = sakin /. (b → b[i], K1 → k[i], Km → 1, λ → 10-10, E0 → 1)
Out[195]=  $-\frac{(1 + b[i]) (2 + k[i])^4}{3 (\frac{9 k[i]}{10000000000} + (2 + k[i])^3)}$ 

In[196]:= Do[sk[i] = sakin;
, {i, 1, 17}]

In[197]:= dt1 = Table[{k[i], sk[i]}, {i, 1, 17}]
Out[197]= {{0.02, -1.}, {0.1, -1.}, {0.2, -1.}, {0.3, -1.}, {0.4, -1.},
{0.6, -1.}, {0.8, -1.}, {1, -1.}, {1.2, -1.}, {1.5, -1.}, {2, -1.},
{3, -1.}, {4, -1.}, {5, -1.}, {6, -1.}, {8, -1.}, {10, -1.}}

```

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

```
In[198]:= Graph1 = ListPlot[dt1, AxesLabel -> {" $\frac{K_1}{K_m}$ ", " $\frac{\Phi_{\text{Variational}}}{\Phi_{\text{Britto}}}$ "},
    PlotJoined -> True, PlotRange -> {{0, 10}, {0.5, -1.5}}
```



```
Out[198]= - Graphics -
```

```
In[199]:= sakout =  $\frac{\Phi_n}{Am]_m}$ 
```

```
Out[199]= - (r^2 Sec[Theta] (  $\frac{a^3 b \text{Cos}[\Theta] e_0}{r^2} + r \text{Cos}[\Theta] e_0$ ) (K1 + 2 Km)^4) /
    (e0 ((-a^3 + r^3) K1^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K1^3 Km - 6 (a^3 - 4 r^3) K1^2 Km^2 +
    (32 r^3 + a^3 (4 + 27 lambda e0^2)) K1 Km^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) Km^4))
```

```
In[200]:= sakout = Simplify[%]
```

```
Out[200]= - ((a^3 b + r^3) (K1 + 2 Km)^4) / ((-a^3 + r^3) K1^4 + (-5 a^3 + 8 r^3) K1^3 Km -
    6 (a^3 - 4 r^3) K1^2 Km^2 + (32 r^3 + a^3 (4 + 27 lambda e0^2)) K1 Km^3 + 8 (a^3 + 2 r^3) Km^4)
```

```
In[201]:= sakout = sakout /. {b -> b[i], K1 -> k[i], Km -> 1, lambda -> 10^-10, E0 -> 1, a -> 1}
```

```
Out[201]= - ((r^3 + b[i]) (2 + k[i])^4) / (8 (1 + 2 r^3) + (  $\frac{40000000027}{100000000000}$  + 32 r^3) k[i] -
    6 (1 - 4 r^3) k[i]^2 + (-5 + 8 r^3) k[i]^3 + (-1 + r^3) k[i]^4)
```

```
In[202]:= sak = sakout /. {r -> 10}
```

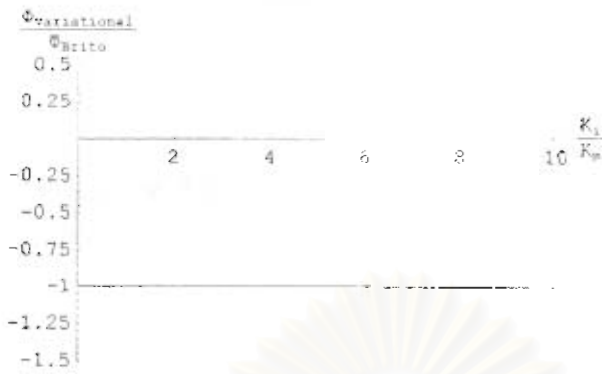
```
Out[202]= -  $\frac{(1000 + b[i]) (2 + k[i])^4}{16008 + \frac{370640000000027 k[i]}{100000000000} + 23994 k[i]^2 + 7995 k[i]^3 + 999 k[i]^4}$ 
```

```
In[203]:= Do[sk[i] = sak;
    , {i, 1, 17}]
```

```
In[204]:= dt2 = Table[{k[i], sk[i]}, {i, 1, 17}]
```

```
Out[204]= {{0.02, -1.}, {0.1, -1.}, {0.2, -1.}, {0.3, -1.}, {0.4, -1.},
    {0.6, -1.}, {0.8, -1.}, {1, -1.}, {1.2, -1.}, {1.5, -1.}, {2, -1.},
    {3, -1.}, {4, -1.}, {5, -1.}, {6, -1.}, {8, -1.}, {10, -1.}}
```

```
In[205]: Graph1 = ListPlot[dt2, AxesLabel -> {" $\frac{K_i}{K_m}$ ", " $\frac{\Phi_{\text{variational}}}{\Phi_{\text{Brito}}}$ "},
PlotJoined -> True, PlotRange -> {{0, 10}, {0.5, -1.5}}]
```



```
Out[205]= - Graphics -
```



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



## ประวัติผู้เขียน

นายพัฒนชัย จันทร

เกิดวันที่ 24 กุมภาพันธ์ 2518 ที่ จ.ราชบุรี

วุฒิการศึกษา

- ปริญญาตรี ศึกษาศาสตร์บัณฑิต ( เกียรตินิยมอันดับ 2 ) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พ.ศ. 2538

ประสบการณ์ ( พ.ศ. 2539 )

- อาจารย์สอนวิชาฟิสิกส์ โรงเรียนอัสสัมชัญ กรุงเทพฯ ฯ

ปัจจุบัน ( พ.ศ.2543 - )

- อาจารย์สอนวิชาฟิสิกส์ โรงเรียนจิตรลดา กรุงเทพฯ ฯ



สถาบันวิทยบริการ  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย