บทที่ 3

การคำนวณหาความน่าจะเป็นของการสูญเสียแพ็กเกตรวมของสวิตซ์และวิสัยสามารถสูงสุด

3.1 กล่าวนำ

การทำงานของแพ็กเกตสวิตช์แบ่งเวลาออกเป็นช่องเวลา (time slot) ซึ่งแพ็กเกตที่เข้ามายังด้านเข้าแต่ละตัวของสวิตช์จะเข้ามาในช่วงของช่องเวลา (time slot) จึงจำลองให้เป็น independent Bernoulli process โดยมีความน่าจะเป็นที่แพ็กเกตเข้ามาเท่ากับ p และความน่าจะเป็นที่ไม่มีแพ็กเกตเข้ามาเท่ากับ q หรือเท่ากับ 1-p

ในการพิจารณาการกระจายของระยะห่างของเวลาระหว่างสองแพ็กเกตที่เข้ามายังด้านเข้าของสวิตช์จะพิจารณาโดยสมมุติให้ที่ช่องเวลาศูนย์ไม่มีแพ็กเกตเข้ามาด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ q และในช่องเวลาถัดไปอีกเรื่อยๆ จนถึงช่องเวลาที่ k-1 ก็ยังไม่มีแพ็กเกตเข้ามา แต่ในช่องเวลาที่ k จึงมีแพ็กเกตเข้ามาด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ p หรือเท่ากับ 1-q ดังนั้นการเกิดเหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่ากับ pq^k จึงสรุปได้ว่าระยะห่างของเวลาของสองแพ็กเกตที่เข้ามา (interarrival time) มีการกระจายแบบจีโอเมตริก (geometric distribution)

พิจารณาแพ็กเกตสวิตช์ขนาด NxN ซึ่งด้านเข้าแต่ละตัวมีบัฟเฟอร์ที่มีขนาดจำกัดอยู่ และมีแพ็กเกตเข้ามายังด้านเข้าแต่ละตัวเพื่อให้สวิตช์ทำหน้าที่ในการจัดส่งไปยังด้านออกต่างๆ ตามต้องการ ถ้ามีแพ็กเกตที่หัวของคิวของด้านเข้าต่างๆ ต้องการไปยังด้านออกเดียวกันในช่องเวลาเดียวกันจะทำให้เกิดการแย่งชิงกันของแพ็กเกตเพื่อไปยังด้านออกเดียวกัน จะทำให้มีเพียงแพ็กเกตเดียวเท่านั้นที่จะได้รับเลือกเพื่อส่งไปยังด้านออกในช่องเวลานั้นเนื่องจากสวิตช์สามารถส่งแพ็กเกตจากด้านเข้าไปยังด้านออกเดียวกันได้เพียงหนึ่งแพ็กเกตต่อหนึ่งช่องเวลา ดังนั้นแพ็กเกตที่เหลือซึ่งแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกไม่สำเร็จก็จะต้องรออยู่ในบัฟเฟอร์ของด้านเข้านั้นๆ เพื่อแย่งชิงใหม่ในช่องเวลาถัดไปในขณะเดียวกันก็จะมีแพ็กเกตใหม่เข้ามาเพื่อแย่งชิงไปยังด้านออกเดียวกันอีก ดังนั้นในช่องเวลาถัดไปนี้ก็จะมีทั้งแพ็กเกตเก่าที่แย่งชิงไม่สำเร็จและแพ็กเกตใหม่ที่เข้ามา

เวลาการรับบริการของแพ็กเกตคือเวลาของการแย่งชิงตั้งแต่แพ็กเกตที่พิจารณานั้น (tagged packet) เคลื่อนมาที่หัวของคิว (Head-Of-Line) และพบว่าตัวเองอยู่ที่สถานะ k จนกระทั่งแย่งชิงสำเร็จคือ

เข้าสู่สถานะ absorb ซึ่งจะเห็นว่าเวลาการรับบริการของแพ็กเกตที่พิจารณานี้มีการกระจายแบบเฟส (Phase-type distribution)

เนื่องจากในการเข้าคิวของแพ็กเกตในบัฟเฟอร์ของด้านเข้าหนึ่งจะประกอบด้วยแพ็กเกตที่ต้องการส่งไปยังด้านออกที่แตกต่างกันดังนั้นแต่ละแพ็กเกตจึงมีเวลาของการรับบริการที่ต่างกันไปด้วยจึงทำให้ในการวิเคราะห์การเข้าคิวของด้านเข้าหนึ่งจะใช้คุณสมบัติปิดของการกระจายแบบเฟส [5] เพื่อให้ได้การกระจายของเวลาการรับบริการของแพ็กเกตทั้งหมดของด้านเข้านั้นๆ และในการวิเคราะห์สถานะคิวของด้านเข้าหนึ่งจะใช้กระบวนการลูกโซ่มาร์คอฟ (Markov chain process) แบบสองมิติ นั่นคือสถานะหนึ่งของคิวจะประกอบด้วยระดับ (level) และเฟส (phase) ซึ่งระดับจะแสดงถึงจำนวนของแพ็กเกตที่เข้าคิวอยู่ในบัฟเฟอร์ของด้านเข้านั้น ส่วนเฟสจะแสดงถึงสถานะของการให้บริการคือจำนวนแพ็กเกตที่แย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกเดียวกัน ดังนั้นคิวของด้านเข้าอาจไม่มีการเปลี่ยนระดับแต่อาจมีการเปลี่ยนเฟสภายในระดับซึ่งก็คือการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแพ็กเกตที่แย่งชิงไปยังด้านออกเดียวกัน จึงทำให้สามารถจำลองคิวของด้านเข้าให้เป็นการเข้าคิวแบบ Geom/PH/1/b_i ได้ เมื่อ 1 คือจำนวนของตัวให้บริการ (server) และ b_i เป็นขนาดบัฟเฟอร์ของด้านเข้าที่ i

ค่าวิสัยสามารถ (throughput) สูงสุดของสวิตช์คือค่าความเข้มทราฟฟิกเฉลี่ยสูงสุด $\left(\bar{\lambda}_{max}\right)$ ที่สวิตช์สามารถรับได้ ณ จุดนี้ค่าปัจจัยการใช้ประโยชน์ (utilization factor) เข้าใกล้ 1 $(\rho \to 1)$ ซึ่งแพ็กเกตที่เข้ามาจะต้องรอคิวอยู่ในบัฟเฟอร์ด้วยเวลาที่ไม่จำกัดคือเป็นอนันต์ เป็นที่ทราบกันดีว่าในสภาวะที่ความเข้มทราฟฟิกของด้านเข้าทุกตัวเท่ากันคือเป็นแบบสม่ำเสมอ (uniform traffic) ค่าวิสัยสามารถสูงสุดของสวิตช์ที่มีบัฟเฟอร์อยู่ที่ด้านเข้าจะเท่ากับ 0.586 [8] แต่ถ้าความเข้มทราฟฟิกของด้านเข้าแต่ละตัวไม่เท่ากันคือเป็นแบบไม่สม่ำเสมอ (nonuniform traffic) จะทำให้ค่าวิสัยสามารถสูงสุดของสวิตช์ที่มีบัฟเฟอร์อยู่ที่ด้านเข้าต่ำกว่า 0.586 [1]

3.2 แบบจำลองทราฟฟิก

ในที่นี้กำหนดให้ ○ แสดงถึงด้านเข้าของสวิตช์และ ● แสดงถึงด้านออกของสวิตช์ กำหนดความเข้มของทราฟฟิก (traffic intensity) ที่ด้านเข้าของสวิตช์เป็น

$$\Lambda^{\circ} = (\lambda_1^{\circ}, \lambda_2^{\circ}, \ldots, \lambda_N^{\circ}) \qquad (3.1)$$

ซึ่งแพ็กเกตจากด้านเข้าจะส่งไปยังด้านออกโดยกำหนดจากเมตริกซ์

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,N} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{N,1} & t_{N,2} & \cdots & t_{N,N} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

เมื่อ t_{ij} เป็นความน่าจะเป็นของแพ็กเกตจากด้านเข้าที่ i เพื่อไปยังด้านออกที่ j ซึ่ง $\sum_{\forall j} t_{i,j} = 1$ ดังนั้นจะได้ความเข้มของทราฟฟิกด้านออกของสวิตช์เป็น

$$\Lambda^{*} = (\lambda_1^{*}, \lambda_2^{*}, \ldots, \lambda_N^{*}) = \Lambda^{*}\mathrm{diag}[1-\varepsilon_i^{\circ}]T \tag{3.3}$$

เมื่อ $\mathrm{diag}[1-\varepsilon_i^{\circ}]T$ เป็นเมตริกซ์เส้นทะแยงมุมซึ่งสมาชิกตัวที่ i ของเส้นทะแยงมุมเท่ากับ $1-\varepsilon_i^{\circ}$ ซึ่ง ε_i° เป็นความน่าจะเป็นของการสูญหายของแพ็กเกตของด้านเข้าที่ i

3.3 กระบวนการแย่งชิงของแพ็กเกตเพื่อไปยังด้านออกของสวิตช์

พิจารณาแพ็กเกตหนึ่ง (tagged packet) ซึ่งเข้าคิวอยู่ในบัฟเฟอร์ของด้านเข้าที่ i ของสวิตช์ ต่อมาได้เคลื่อนมาถึงหัวของคิว (Head-Of-Line) และพบว่าตัวเองกำลังร่วมในการแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j ของสวิตช์กับแพ็กเกตที่หัวของคิวในบัฟเฟอร์ของด้านเข้าตัวอื่นๆ ดังนั้นจึงสามารถเขียนกระบวนการการแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j ได้เป็น [1]

$$C_j' = C_j - 1 + A_j \tag{3.4}$$

C_j' : จำนวนของแพ็กเกตที่หัวของคิวจะไปยังด้านออกที่ j ในช่องเวลาถัดไป

C_j : จำนวนของแพ็กเกตที่หัวของคิวที่แย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j ณ ช่องเวลาปัจจุบัน

A_j : จำนวนแพ็กเกตใหม่ที่เข้ามาในช่องเวลาปัจจุบันเพื่อแย่งชิงไปยังด้านออกที่ j

ถ้า N เข้าสู่อนันต์ดังนั้น A_j คือกระบวนการปัวซ์ซง (Poisson process) ซึ่งมีอัตราการเข้ามาเท่ากับ λ_j^* จึงจำลองให้กระบวนการแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกของสวิตช์เป็นการเข้าคิวแบบ M/D/1 ซึ่ง $a_{j,n} = \Pr(A_j = n)$ เป็นความน่าจะเป็นที่จำนวนแพ็กเกตที่เข้ามาใหม่เพื่อแย่งชิงไปยังด้านออกที่ j เท่ากับ n

$$a_{j,n} = \frac{(\lambda_j^*)^n \exp(-\lambda_j^*)}{n!} \tag{3.5}$$

ความน่าจะเป็นของการเปลี่ยนสถานะจาก x ไปยังสถานะ y (ความน่าจะเป็นที่จำนวนแพ็กเกตที่แย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j เปลี่ยนจากจำนวน x แพ็กเกตไปเป็นจำนวน y แพ็กเกต) ในช่องเวลาถัดไปจะเขียนได้เป็น $a_{j,y-x+1}$ ดังนั้นจะได้เมตริกซ์ของการเปลี่ยนสถานะของกระบวนการการเข้ามา

$$E_j^* = \begin{bmatrix} a_{j,0} & a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & a_{j,4} & \cdots \\ a_{j,0} & a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & a_{j,4} & \cdots \\ 0 & a_{j,0} & a_{j,1} & a_{j,2} & a_{j,3} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{j,0} & a_{j,1} & a_{j,2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{j,0} & a_{j,1} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{j,0} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

ความน่าจะเป็นที่จำนวนแพ็กเกตที่แย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j เท่ากับ k ($p_{j,k} = \Pr(C_j = k)$) จะหาได้จาก [1],[7]

$$\begin{aligned} \vec{p}_j^*(\bar{I} - \bar{E}_j^*) &= \vec{0} \\ \vec{p}_j^*\vec{e} &= 1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

ซึ่ง

$$\vec{p}_j^* = (p_{j,0}, p_{j,1}, p_{j,2}, \ldots)$$

เมื่อ

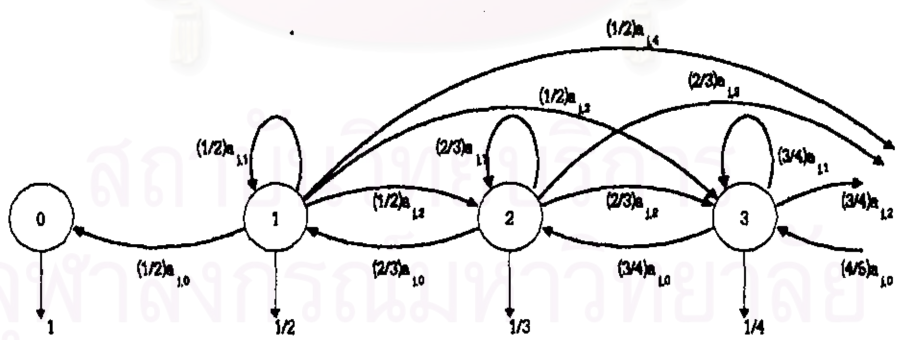
$$p_{j,0} = (1-\lambda_j^{*})$$

$$p_{j,1} = \frac{(1-a_{j,0})}{a_{j,0}} p_{j,0}$$

$$p_{j,k} = \frac{(1-a_{j,1})}{a_{j,0}} p_{j,k-1} - \frac{a_{j,k-1}}{a_{j,0}} p_{j,0} - \sum_{l=2}^{k-1} \frac{a_{j,l}}{a_{j,0}} p_{j,k-l} \qquad \text{สำหรับ } k \geq 2 \qquad (3.8)$$

และ $\bar{e}$ เป็นเวกเตอร์แนวตั้งหนึ่งหน่วย

กำหนดให้แพ็กเกตแต่ละตัวที่หัวของคิวที่ต้องการจะไปยังด้านออกที่ j จะถูกเลือกอย่างสุ่มเพื่อส่งไปยังด้านออกที่ j ดังนั้นความน่าจะเป็นที่แพ็กเกตหนึ่งที่หัวของคิวที่ต้องการไปยังด้านออกที่ j จะถูกเลือกเพื่อส่งไปยังด้านออกที่ j จะเท่ากับ $\frac{1}{C_j}$ เมื่อแพ็กเกตที่พิจารณาเคลื่อนมายังหัวของคิวจะพบว่าตัวมันกำลังแย่งชิงกับแพ็กเกตอื่นจำนวน k แพ็กเกตเพื่อไปยังด้านออกที่ j ดังนั้นเมื่อรวมตัวมันเองจะทำให้มีจำนวนแพ็กเกตทั้งหมดที่ต้องการส่งไปยังด้านออกที่ j ในช่องเวลาปัจจุบันเท่ากับ k+1 จึงทำให้ได้ความน่าจะเป็นของแพ็กเกตที่พิจารณาจะแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j สำเร็จเท่ากับ $\frac{1}{k+1}$ เวลาของการแย่งชิงคือเวลาของการเปลี่ยนสถานะใน transient Markov chain โดยเริ่มจากสถานะเริ่มต้นจนกระทั่งถึงสถานะ absorb ซึ่งสถานะต่างๆ ของ transient Markov chain คือค่า C_j ค่าต่างๆ แสดงดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แผนภาพการเปลี่ยนสถานะของกระบวนการแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j

สถานะเริ่มต้นของ transient Markov chain นี้ได้จากเวกเตอร์ของความน่าจะเป็น $\bar{p}_j^{*}$ ซึ่งแสดงถึงสถานะปัจจุบันของ C_j เมื่อแพ็กเกตที่พิจารณาเคลื่อนมาถึงหัวของคิว ถ้าปัจจุบันแพ็กเกตที่พิจารณาอยู่ในสถานะ

k ดังนั้นความน่าจะเป็นที่แพ็กเกตที่พิจารณานี้จะแย่งชิงสำเร็จหรือเข้าสู่สถานะดูดกลืน (absorbtion state) จะเท่ากับ $\frac{1}{k+1}$ และความน่าจะเป็นที่จะเปลี่ยนไปยังสถานะ l จะเท่ากับ $\left(1-\frac{1}{k+1}\right)a_{j,l-k+1}$

จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่าถ้าแพ็กเกตที่พิจารณาเคลื่อนมายังหัวของคิวแล้วพบว่าไม่มีแพ็กเกตอื่นที่จะแย่งชิงไปยังด้านออก j นั่นคือแพ็กเกตที่พิจารณาอยู่ในสถานะ 0 ดังนั้นความน่าจะเป็นที่แพ็กเกตที่พิจารณานี้จะแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออก j สำเร็จจะเท่ากับ 1 ซึ่งจากรูปที่ 3.1 สามารถนำมาเขียนเป็นเมตริกซ์ของการเปลี่ยนสถานะซึ่งเป็น transient Markov chain

$$\bar{H}_j^* = diag\left(\frac{l}{l+1}\right)E_j^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}a_{j,0} & \frac{1}{2}a_{j,1} & \cdots & \frac{1}{2}a_{j,M_k-1} & \frac{1}{2}\left(1-\sum\limits_{k=0}^{M_k-1}a_{j,k}\right) \\ 0 & \frac{2}{3}a_{j,0} & \cdots & \frac{2}{3}a_{j,M_k-2} & \frac{2}{3}\left(1-\sum\limits_{k=0}^{M_k-2}a_{j,k}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{M_k-1}{M_k}a_{j,1} & \frac{M_k-1}{M_k}\left(1-\sum\limits_{k=0}^{1}a_{j,k}\right) \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{M_k}{M_k+1}a_{j,0} & \frac{M_k}{M_k+1}(1-a_{j,0}) \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

เมื่อ $diag\left(\frac{l}{l+1}\right)$ เป็นเมตริกซ์ทแยงมุมซึ่งสมาชิกตัวที่ l ในแนวทแยงมุมเท่ากับ $\frac{l}{l+1}$ และ M_k คือจำนวนแพ็กเกตสูงสุดที่แย่งชิงเพื่อไปยังด้านออก j ซึ่งขนาดของเมตริกซ์ $\bar{H}_j^*$ กำหนดจากค่าของ M_k ซึ่งในการคำนวณจะพยายามให้ M_k มีค่าน้อยที่สุดโดยที่ M_k จะขึ้นอยู่กับอัตราการเข้ามา λ_i^* นั่นคือถ้า λ_i^* มีค่ามากก็จะทำให้ M_k มีค่ามากขึ้น จาก [1] สรุปได้ว่า M_k = 10 ถ้า $\lambda_i^* \leq 0.75$ และ M_k = 20 ถ้า $0.75 < \lambda_i^* < 0.9$ จะเห็นว่าเวลาของการแย่งชิงมีการกระจายแบบเฟส (phase-type distribution) ซึ่งแสดงโดย $\left(\bar{p}_j^*, \bar{H}_j^*\right)$

3.4 การวิเคราะห์คิวด้านเข้าของแพ็กเกตสวิตช์

เนื่องจากในบัฟเฟอร์ด้านเข้าหนึ่ง (ในที่นี้จะพิจารณาเป็นด้านเข้าที่ i) จะมีแพ็กเกตที่มีความต้องการที่จะส่ง ไปยังด้านออกที่แตกต่างกันเข้าคิวอยู่ด้วยกันในบัฟเฟอร์นั้นๆ ซึ่งแพ็กเกตแต่ละตัวก็จะมีเวลา

ของการรับบริการที่แตกต่างกันดังนั้นเวลาของการรับบริการของด้านเข้า (input service time) ที่ i จะสามารถหาได้จากคุณสมบัติปิดของการกระจายแบบเฟสซึ่งจะได้

$$\bar{H}^* = \begin{bmatrix} \bar{H}_1^* & & & & & & \\ & \bar{H}_2^* & & & & & \\ & & \bar{H}_3^* & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \bar{H}_N^* \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

และสถานะเริ่มต้นของเวลาการรับบริการจะได้จากเวกเตอร์ความน่าจะเป็น

$$\vec{p}_i^\circ = (t_{i,1}\vec{p}_0^*, t_{i,2}\vec{p}_1^*, \ldots, t_{i,N}\vec{p}_N^*) \qquad (3.11)$$

ดังนั้นเวลาการรับบริการของด้านเข้าจะสามารถแสดงโดยตัวแสดง $\left(\vec{p}_i^\circ, \bar{H}^*\right)$ ซึ่งการออกจากกระบวนการแย่งชิง (absorption) ของแพ็กเกตหนึ่งจะสามารถเขียนได้ในรูปของเวกเตอร์คือ

$$\vec{a} = \left[1^{-1}, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots\right]^T \qquad (3.12)$$

ดังนั้นจะได้ absorption probability column vector ของด้านเข้าแต่ละตัว

$$\Delta = \left(\underbrace{\vec{a}, \vec{a}, \vec{a}, \ldots, \vec{a}}_{N}\right)^T \qquad (3.13)$$

และสถานะเริ่มต้นของเวลาการรับบริการของแพ็กเกตต่อไปจะได้เป็น

$$\vec{S}_i = \Delta \vec{p}_i^* = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{a} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{a} \end{bmatrix} \left[t_{i,0}\vec{p}_1^*, t_{i,1}\vec{p}_2^*, \ldots, t_{i,N}\vec{p}_N^* \right] \tag{3.14}$$

เนื่องจากระยะห่างของเวลาของการเข้ามาของแพ็กเกตมีการกระจายแบบจีโอเมตริก (geometric distribution) ดังนั้นคิวของด้านเข้าแต่ละตัวจะสามารถจำลองเป็น Geom/PH/1/b_i ซึ่งเป็น Markov chain process แบบสองมิติ นั่นถือประกอบด้วยระดับ (level) และเฟส (phase) โดยที่ระดับคือขนาดของบัฟเฟอร์และเฟสแสดงถึงสถานะของการให้บริการ

การเปลี่ยนจากระดับ l ไปสู่ตัวมันเองจะประกอบด้วยสองเหตุการณ์ คือ เหตุการณ์หนึ่งไม่มีแพ็กเกตเข้ามาและออกไปจากบัฟเฟอร์ในช่องเวลานั้นดังนั้นจึงมีเพียงการเปลี่ยนเฟสของการให้บริการเท่านั้นซึ่งสามารถแสดงได้โดย $\left(1-\lambda_i^*\right)\vec{H}^*$ และอีกเหตุการณ์หนึ่งคือมีหนึ่งแพ็กเกตเข้ามาและหนึ่งแพ็กเกตออกไปในช่องเวลาเดียวกันซึ่งแสดงได้โดย $\lambda_i^* \vec{S}_i$ ซึ่งมีโครงสร้างเป็นแบบ quasi-birth-death ดังนั้น Geom/PH/1/b_i จะมีเมตริกซ์ของการเปลี่ยนสถานะแสดงดังนี้

$$\vec{P}_i = \begin{bmatrix} 1-\lambda_i^* & \lambda_i^* \vec{P}_i & \vec{0} & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \\ (1-\lambda_i^*)\Delta & (1-\lambda_i^*)\vec{H}^* + \lambda_i^* \vec{S}_i & \lambda_i^* \vec{H}^* & \vec{0} & \cdots & \vec{0} \\ \vec{0} & (1-\lambda_i^*)\vec{S}_i & (1-\lambda_i^*)\vec{H}^* + \lambda_i^* \vec{S}_i & \lambda_i^* \vec{H}^* & \cdots & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & (1-\lambda_i^*)\vec{S}_i & (1-\lambda_i^*)\vec{H}^* + \lambda_i^* \vec{S}_i & \cdots & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & (1-\lambda_i^*)\vec{S}_i & \cdots & \cdot \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & (1-\lambda_i^*)\vec{S}_i & \lambda_i^* \vec{S}_i + \vec{H}^* \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

ซึ่ง $\vec{\Pi}_l = (\Pi_{i0}, \vec{\Pi}_{i1}, \ldots, \vec{\Pi}_{il}, \ldots)$ เป็นเวกเตอร์สถานะเสถียรของความน่าจะเป็น (steady state probability vector) โดยที่ Π_{i0} เป็นสเกลาร์และ $\vec{\Pi}_{il}$ เป็นเวกเตอร์สถานะเสถียรของความน่าจะเป็นของด้านเข้าที่ i มีความยาวของคิวเท่ากับ l โดยหาได้จากสมการสมดุลย์ (balance equation)

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_i(\vec{P}_i - \vec{I}) &= \vec{0} \\ \vec{\Pi}_i \vec{e} &= 1 \end{aligned} \tag{3.16}$$

ดังนั้นความยาวของคิวของด้านเข้าที่ i จะสามารถหาได้จาก [6]

$$\vec{\Pi}_{il} = \Pi_{i0}\vec{p}_i^{*}\vec{R}_i(\vec{H}^{*}\vec{R}_i)^{l-1}, \quad 1 \le l \le K \tag{3.17}$$

$$\vec{\Pi}_{iK} = \lambda_i^{*}\Pi_{i0}\vec{p}_i^{*}\vec{R}_i(\vec{H}^{*}\vec{R}_i)^{K-2}\vec{H}^{*}(\vec{I} - \lambda_i^{*}\vec{S}_i - \vec{H}^{*})^{-1} \tag{3.18}$$

เมื่อ

$$\vec{R}_i = \lambda_i^{*}[\vec{I} - (1-\lambda_i^{*})\vec{H}^{*} - \lambda_i^{*}\vec{e}\vec{p}_i^{*}]^{-1}$$

$$\Pi_{i0} = \left[1 + \vec{p}_i^{*}\vec{R}_i\left[\sum_{l=1}^{K-1}(\vec{H}^{*}\vec{R}_i)^{l-1} + \lambda_i^{*}(\vec{H}^{*}\vec{R}_i)^{K-2}\vec{H}^{*}(\vec{I} - \lambda_i^{*}\vec{S}_i - \vec{H}^{*})^{-1}\right]\vec{e}\,\right]^{-1}$$

ซึ่ง $\vec{I}$ เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ และ $\vec{e}$ เป็นเมตริกซ์แนวตั้งหนึ่งหน่วย ดังนั้นความน่าจะเป็นของความยาวคิวของด้านเข้าที่ i ยาวเท่ากับ l สามารถหาได้จาก

$$q_{il} = \vec{\Pi}_{il}\vec{e} \tag{3.19}$$

และ q_{iK} คือความน่าจะเป็นของการสูญเสียแพ็กเกตที่ด้านเข้าที่ i จากสมการที่ (3.3) ε_i^{*} ก็คือ คือความน่าจะเป็นของการสูญเสียแพ็กเกตที่ด้านเข้าที่ i ดังนั้นเพื่อให้ได้ความน่าจะเป็นของการสูญเสียแพ็กเกตที่ด้านเข้าที่ i ที่ถูกต้องจึงต้องทำการคำนวณซ้ำโดยเริ่มต้นจากกำหนดให้ $\varepsilon_i^{*} = 0$ แล้วคำนวณ q_{iK} ออกมาก่อน จากนั้นนำค่า q_{iK} ที่ได้แทน ε_i^{*} ลงในสมการที่ (3.3) เพื่อคำนวณค่า q_{iK} รอบต่อไป ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าผลต่างระหว่าง q_{iK} ในรอบที่ k กับ q_{iK} ในรอบที่ k+1 ของการคำนวณมีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนดซึ่งในที่นี้กำหนดให้ผลต่างนี้มีค่าน้อยกว่า 10^{-16} ดังนั้นจะได้ความน่าจะเป็นของการสูญเสียแพ็กเกตรวมของสวิตช์เป็น

$$\varepsilon^{*} = \frac{\sum_{i=0}^{N}\varepsilon_i^{*}\lambda_i^{*}}{\sum_{i=0}^{N}\lambda_i^{*}} \tag{3.20}$$

3.5 ค่าวิสัยสามารถสูงสุดของสวิตช์

เนื่องจากได้จำลองให้กระบวนการแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j เป็นการเข้าคิวแบบ M/D/1 [1] ดังนั้นจำนวนแพ็กเกตเฉลี่ยที่แย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j จะหาได้จาก

$$\overline{C}_j = \frac{\lambda_j^{*2}}{2(1-\lambda_j^*)} + \lambda_j^* \tag{3.21}$$

จากสูตรของ Little [7] จะได้เวลาเฉลี่ยของการแย่งชิงเพื่อไปยังด้านออกที่ j ของแพ็กเกต

$$\overline{s}_j^* = \frac{\overline{C}_j}{\lambda_j^*} = \frac{\lambda_j^*}{2(1-\lambda_j^*)} + 1 \tag{3.22}$$

ดังนั้นเวลาเฉลี่ยของการให้บริการของด้านเข้าที่ i จะได้เป็น

$$\overline{s}_i^* = \sum_{\forall j} t_{i,j}\overline{s}_j^* \tag{3.23}$$

แทนสมการที่ (3.22) ลงในสมการที่ (3.23) จะได้

$$\overline{s}_i^* = \sum_{\forall j} t_{i,j}\left[\frac{\lambda_j^*}{2(1-\lambda_j^*)} + 1\right] \tag{3.24}$$

ปัจจัยการใช้ประโยชน์ (utilization factor) ของด้านเข้าที่ i

$$\rho_i^* = \lambda_i^* \overline{s}_j^* \tag{3.25}$$

แทนสมการที่ (3.24) ลงในสมการที่ (3.25) จะได้

$$\rho_i^* = \lambda_i^* \sum_{\forall j} t_{i,j} \left[\frac{\lambda_j^*}{2(1-\lambda_j^*)} + 1 \right] \tag{3.26}$$

วิสัยสามารถของสวิตช์หรือความเข้มทราฟฟิกเฉลี่ยทั้งหมดของสวิตช์หาได้จาก

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{\forall i} \lambda_i^* = \frac{1}{N}\sum_{\forall j} \lambda_j^* \tag{3.27}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_m^*}{N}\sum_{\forall i} \frac{\lambda_i^*}{\lambda_m^*} \tag{3.28}$$

$$\lambda_m^* = \frac{N}{\sum_{\forall i} \frac{\lambda_i^*}{\lambda_m^*}} \bar{\lambda} = f_m^* \bar{\lambda} \tag{3.29}$$

ดังนั้นจะได้

$$f_m^* = \frac{N}{\sum_{\forall i} \frac{\lambda_i^*}{\lambda_m^*}} \tag{3.30}$$

เขียนสมการที่ (3.29) ให้อยู่ในรูปทั่วไปจะได้

$$\lambda_i^* = f_i^* \bar{\lambda} \tag{3.31}$$

และ

$$\lambda_j^* = \sum_{\forall i} \lambda_i^* t_{i,j} \tag{3.32}$$

แทนสมการที่ (3.31) ลงในสมการที่ (3.32) จะได้

$$\lambda_j^{\bullet} = \bar{\lambda}\sum_{\forall i} f_i^{\circ} t_{i,j} = \bar{\lambda} f_j^{\bullet} \qquad (3.33)$$

เมื่อ

$$\vec{f}^{\bullet} = \vec{f}^{\circ}\vec{T} \qquad (3.34)$$

$\vec{f}^{\circ} = (f_1^{\circ}, f_2^{\circ}, \ldots, f_N^{\circ})$ และ $\vec{f}^{\bullet} = (f_1^{\bullet}, f_2^{\bullet}, \ldots, f_N^{\bullet})$ เป็นเวกเตอร์ของการกระจายสัมพัทธ์ของความเข้มทราฟฟิก (relative distribution of traffic intensites) ในด้านออกและด้านเข้าทั้งหมดตามลำดับ

แทนสมการที่ (3.31) ลงในสมการที่ (3.26) จะได้

$$\rho_i^{\circ} = f_i^{\circ}\bar{\lambda}\sum_{\forall j} t_{i,j}\left[\frac{f_j^{\bullet}\bar{\lambda}}{2(1-f_j^{\bullet}\bar{\lambda})}+1\right] \qquad (3.35)$$

การที่สวิตซ์อิ่มตัวจะทำให้แพ็กเกตที่เข้ามายังสวิตซ์จะต้องรอเพื่อรับการส่งผ่านออกไปจากสวิตซ์เป็นเวลาอนันต์ สภาวะนี้เกิดขึ้นเมื่อ $\max_{\forall i}(\rho_i^{\circ}) \rightarrow 1$ ซึ่งจะทำให้ได้ค่าวิสัยสามารถสูงสุดของสวิตซ์ ($\bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}_{\max}$) นั่นคือจากสมการที่ (3.35) จะเขียนได้เป็น

$$\rho_{i\max}^{\circ} = f_i^{\circ}\bar{\lambda}_{\max}\sum_{\forall j} t_{i,j}\left[\frac{f_j^{\bullet}\bar{\lambda}_{\max}}{2(1-f_j^{\bullet}\bar{\lambda}_{\max})}+1\right] = 1 \qquad (3.36)$$