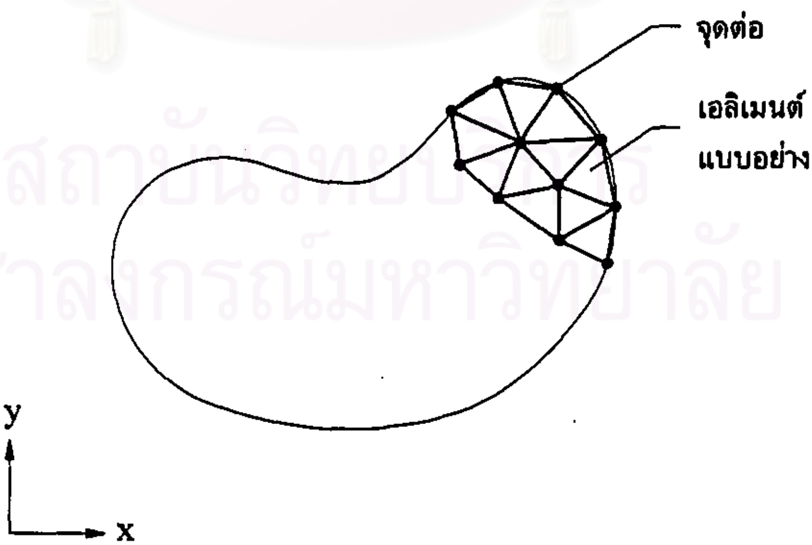
บทที่ 4

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

บทนี้เป็นการนำสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในหัวข้อ 3.4 มาใช้ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเริ่มจากการกล่าวถึงขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การเลือกรูปแบบเอลิเมนต์ในการแก้ปัญหาการไหล พร้อมทั้งฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation function) ที่สอดคล้องกัน จากนั้นจึงดำเนินการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง ซึ่งจะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบไม่เชิงเส้นออกมา และต้องนำระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson iteration method) [15] มาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ (Finite element matrices) ที่ได้มาจากการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในบทนี้ สามารถนำไปประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้โดยตรงและนำไปใช้ในงานวิจัยอื่นที่เกี่ยวข้องกันได้

4.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ขั้นตอนทั่วไปของการแก้ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วยขั้นตอนทั้งหมด 6 ขั้นตอน [1,13] ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ

ขั้นตอนที่ 1

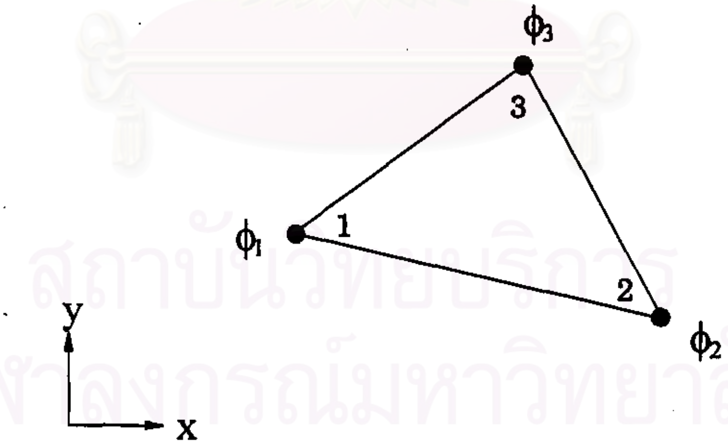
แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการจะหาผลลัพธ์ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆดังแสดงใน รูปที่ 4.1 เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (Nodes) บนขอบของเอลิเมนต์ (Elements) ที่อยู่ติดกัน ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะหาผลลัพธ์ที่ต้องการ

ขั้นตอนที่ 2

เลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับรูปแบบเอลิเมนต์ ซึ่งพิจารณาจากจำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์ จำนวนตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ (Nodal unknown) และเงื่อนไขความเข้ากันได้ (Compatibility condition) [13] ยกตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งประกอบด้วย 3 จุดต่อดังแสดงในรูปที่ 4.2 มีตำแหน่งของตัวไม่ทราบค่า (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) อยู่ที่จุดต่อหมายเลข 1, 2 และ 3 ตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้เป็นผลลัพธ์ของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ ซึ่งอาจเป็นค่าการเคลื่อนตัวในทิศทางต่าง ๆในปัญหาทางด้านของแข็ง หรือเป็นอุณหภูมิของวัตถุในปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรือเป็นความเร็วของของไหลในปัญหาการไหล ลักษณะการกระจายของตัวไม่ทราบค่าบนเอลิเมนต์สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = N_1(x,y)\cdot\phi_1 + N_2(x,y)\cdot\phi_2 + N_3(x,y)\cdot\phi_3 \qquad (4.1)$$

โดย $N_i(x,y)$, $(i = 1,2,3)$ แทนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์



รูปที่ 4.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งจุดต่อ

สมการ (4.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\phi(x,y) = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rfloor \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \qquad (4.2a)$$

หรือ

$$\phi(x,y) = \lfloor N \rfloor \{\phi\} \qquad (4.2b)$$
$$(1\times3)(3\times1)$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

$\{\phi\}$ แทนเวคเตอร์เมตริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่ 3

สร้างสมการของเอลิเมนต์ (Element equations) ยกตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมดังแสดงในรูปที่ 4.2 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \qquad (4.3a)$$

หรือ

$$[k]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \qquad (4.3b)$$
$$(3\times3)(3\times1) \quad (3\times1)$$

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (4.3) กระทำได้โดย

(1) วิธีการโดยตรง (Direct approach) เป็นวิธีที่ทำความเข้าใจได้ง่ายที่สุด แต่ไม่สามารถนำไปแก้ปัญหาที่มีความซับซ้อนได้

(2) วิธีการแปรผัน (Variational approach) เป็นวิธีที่นิยมใช้ในระยะเริ่มแรกและใช้แก้ปัญหาได้มากกว่าวิธีการโดยตรง

(3) วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) เป็นวิธีที่นำไปใช้ได้สะดวกที่สุด เนื่องจากสามารถประดิษฐ์สมการของเอลิเมนต์ได้โดยตรงจากสมการเชิงอนุพันธ์ โดยไม่ต้องอาศัยฟังก์ชันแปรผัน (Variational function) เหมือนกับวิธีการแปรผัน

ขั้นตอนที่ 4

นำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการซึ่งอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\sum(\text{Element equations}) = [k]_{sys}\{\phi\}_{sys} = \{F\}_{sys} \qquad (4.4)$$

ขั้นตอนที่ 5

ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาลงในสมการ (4.4) แล้วแก้สมการดังกล่าวเพื่อหาค่าของ $\{\phi\}_{sys}$ ซึ่งเป็นตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ตัวไม่ทราบค่าที่กล่าวถึงนี้อาจจะเป็นค่า

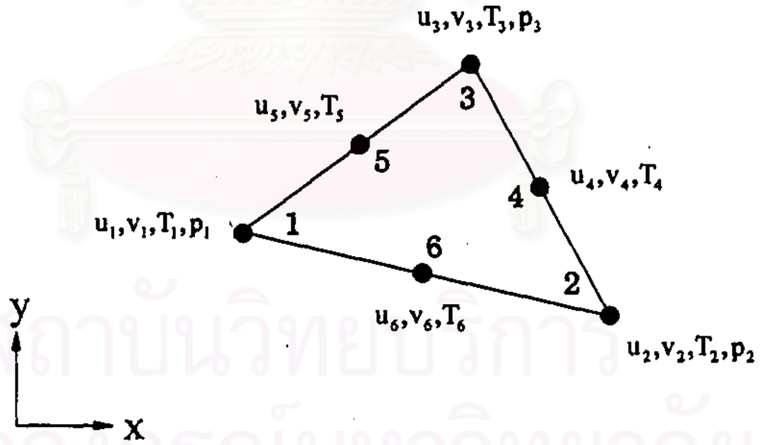
การเคลื่อนตัวที่ตำแหน่งต่าง ๆของโครงสร้าง หรือเป็นอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆของปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรือเป็นความเร็วของของไหลในปัญหาเกี่ยวกับการไหล

ขั้นตอนที่ 6

คำนวณค่าอื่น ๆที่ต้องการทราบ เช่น เมื่อทราบค่าการเคลื่อนตัวจะคำนวณหาความเค้น (Stress) และความเครียด (Strain) ได้ หรือเมื่อทราบอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆจะคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนได้ หรือเมื่อทราบความเร็วของของไหลจะคำนวณหาอัตราการไหลได้

4.2 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

จากสมการ (3.19) ถึง (3.21) ในบทที่ 3 เมื่อแทนค่าของความเค้นลงไปในสมการชุดดังกล่าว แล้วพิจารณาอันดับของอนุพันธ์ของตัวไม่ทราบค่าทั้งหมดพบว่า อนุพันธ์ของความเร็วและอุณหภูมิมีอันดับสูงกว่าอนุพันธ์ของความดันอยู่หนึ่งอันดับ ดังนั้นฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของความเร็วและอุณหภูมิจึงต้องมีอันดับสูงกว่าฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของความดันหนึ่งอันดับ [16] ซึ่งเอลิเมนต์ที่เหมาะสมกับปัญหาในลักษณะนี้ก็คือ เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

เอลิเมนต์ในรูปที่ 4.3 นี้ ประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่าทั้งหมด 21 ตัว ได้แก่ u, v, T อย่างละ 6 ตัว และ p อีก 3 ตัว ซึ่งต้องการจำนวนสมการทั้งสิ้น 21 สมการต่อหนึ่งเอลิเมนต์ในการหาค่าของตัวไม่ทราบค่าเหล่านี้ การสมมุติลักษณะการกระจายของความเร็ว อุณหภูมิ และความดันภายในเอลิเมนต์ จะอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$u(x,y) = \underset{(1\times6)(6\times1)}{\lfloor N \rfloor \{u\}} = N_\alpha u_\alpha \quad , (\alpha = 1,2,...,6) \tag{4.5}$$

$$v(x,y) = \underset{(1\times6)(6\times1)}{\lfloor N \rfloor \{v\}} = N_\alpha v_\alpha \quad , (\alpha = 1,2,...,6) \tag{4.6}$$

$$T(x,y) = \underset{(1\times6)(6\times1)}{\lfloor N \rfloor \{T\}} = N_\alpha T_\alpha \quad , (\alpha = 1,2,...,6) \tag{4.7}$$

$$p(x,y) = \underset{(1\times3)(3\times1)}{\lfloor H \rfloor \{p\}} = H_\lambda p_\lambda \quad , (\lambda = 1,2,3) \tag{4.8}$$

โดย $\lfloor N \rfloor$ แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์อันดับสอง

$\lfloor H \rfloor$ แทนเมตริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์อันดับหนึ่ง

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ทั้งสองแบบของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$N_1 = L_1^2 - L_1(L_2 + L_3) \tag{4.9a}$$

$$N_2 = L_2^2 - L_2(L_3 + L_1) \tag{4.9b}$$

$$N_3 = L_3^2 - L_3(L_1 + L_2) \tag{4.9c}$$

$$N_4 = 4L_2L_3 \tag{4.9d}$$

$$N_5 = 4L_3L_1 \tag{4.9e}$$

$$N_6 = 4L_1L_2 \tag{4.9f}$$

$$H_i = L_i \quad , (i = 1,2,3) \tag{4.10}$$

โดย L_i แทนฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ ซึ่งหาได้จากสมการ

$$L_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \quad , (i = 1,2,3) \tag{4.11}$$

A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ซึ่งคำนวณได้จาก

$$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = x_2y_3 - x_3y_2 & b_1 = y_2 - y_3 & c_1 = x_3 - x_2 \\ a_2 = x_3y_1 - x_1y_3 & b_2 = y_3 - y_1 & c_2 = x_1 - x_3 \\ a_3 = x_1y_2 - x_2y_1 & b_3 = y_1 - y_2 & c_3 = x_2 - x_1 \end{array}\right\} \tag{4.13}$$

4.3 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวกระทำได้โดย นำวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง [1] มาประยุกต์ใช้กับสมการ (3.19) ถึง (3.21) หลักการของวิธีการนี้ก็คือ นำฟังก์ชันน้ำหนัก (Weighting function) ซึ่งในที่นี้เลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ มาคูณกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา แล้วกำหนดให้ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากการอินทิเกรตบนพื้นที่ของเอลิเมนต์มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อดำเนินการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ตามวิธีการดังกล่าว จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$\int_A N_\alpha \left[\rho\left(uu_{,x} + vu_{,y}\right) - \sigma_{x,x} - \tau_{yx,y}\right] dA = 0 \qquad (4.14a)$$

$$\int_A N_\alpha \left[\rho\left(uv_{,x} + vv_{,y}\right) - \tau_{xy,x} - \sigma_{y,y} + \rho g\left[1 - \beta\left(T - T_0\right)\right]\right] dA = 0 \qquad (4.14b)$$

$$\int_A N_\alpha \left[\rho c\left(uT_{,x} + vT_{,y}\right) - \left(kT_{,x}\right)_{,x} - \left(kT_{,y}\right)_{,y}\right] dA = 0 \qquad (4.14c)$$

$$\int_A H_\lambda \left(u_{,x} + v_{,y}\right) dA = 0 \qquad (4.14d)$$

สมการ (4.14a-d) นี้ ประกอบด้วยสมการทั้งหมด 21 สมการ สำหรับหาค่าของตัวไม่ทราบค่า 21 ตัว การเลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์อันดับหนึ่งในสมการ (4.14d) นั้นจะทำให้เมตริกซ์ทางด้านซ้ายของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์บางส่วนมีความสมมาตร ซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ในภายหลัง

นำทฤษฎีบทของเกาส์ (Gauss's theorem) มาประยุกต์ใช้กับสมการ (4.14a-c) เพื่อก่อให้เกิดค่าอินทิกรัลบนขอบเขตของเอลิเมนต์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \sigma_{x,x} dA &= \int_A \left(N_\alpha \sigma_x\right)_{,x} dA - \int_A N_{\alpha,x} \sigma_x dA \\ &= \int_{S_o} N_\alpha \sigma_x l \, dS_o - \int_A N_{\alpha,x} \sigma_x dA \end{aligned} \qquad (4.15a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \tau_{yx,y} dA &= \int_A \left(N_\alpha \tau_{yx}\right)_{,y} dA - \int_A N_{\alpha,y} \tau_{yx} dA \\ &= \int_{S_o} N_\alpha \tau_{yx} m \, dS_o - \int_A N_{\alpha,y} \tau_{yx} dA \end{aligned} \qquad (4.15b)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \tau_{xy,x} dA &= \int_A \left(N_\alpha \tau_{xy}\right)_{,x} dA - \int_A N_{\alpha,x} \tau_{xy} dA \\ &= \int_{S_o} N_\alpha \tau_{xy} l \, dS_o - \int_A N_{\alpha,x} \tau_{xy} dA \end{aligned} \qquad (4.16a)$$

$$\int_A N_\alpha \sigma_{y,y} dA = \int_A (N_\alpha \sigma_y)_{,y} dA - \int_A N_{\alpha,y} \sigma_y dA$$
$$= \int_{S_o} N_\alpha \sigma_y m\, dS_o - \int_A N_{\alpha,y} \sigma_y dA \quad (4.16b)$$

$$\int_A N_\alpha (kT_{,x})_{,x} dA = \int_A (N_\alpha kT_{,x})_{,x} dA - \int_A N_{\alpha,x} kT_{,x} dA$$
$$= \int_{S_w} N_\alpha kT_{,x} l\, dS_w - \int_A N_{\alpha,x} kT_{,x} dA \quad (4.17a)$$

$$\int_A N_\alpha (kT_{,y})_{,y} dA = \int_A (N_\alpha kT_{,y})_{,y} dA - \int_A N_{\alpha,y} kT_{,y} dA$$
$$= \int_{S_w} N_\alpha kT_{,y} m\, dS_w - \int_A N_{\alpha,y} kT_{,y} dA \quad (4.17b)$$

แทนค่าอินทิกรัลในสมการ (4.15) ถึง (4.17) ลงในสมการ (4.14a-c) จะได้ผลดังนี้

$$\int_A N_\alpha \rho (uu_{,x} + vu_{,y}) dA + \int_A N_{\alpha,x} \sigma_x dA + \int_A N_{\alpha,y} \tau_{yx} dA$$
$$= \int_{S_o} N_\alpha (\sigma_x l + \tau_{yx} m) dS_o \quad (4.18a)$$

$$\int_A N_\alpha \rho (uv_{,x} + vv_{,y}) dA + \int_A N_{\alpha,x} \tau_{xy} dA + \int_A N_{\alpha,y} \sigma_y dA + \int_A N_\alpha \rho g [1 - \beta (T - T_0)] dA$$
$$= \int_{S_o} N_\alpha (\tau_{xy} l + \sigma_y m) dS_o \quad (4.18b)$$

$$\int_A N_\alpha \rho c (uT_{,x} + vT_{,y}) dA + \int_A N_{\alpha,x} kT_{,x} dA + \int_A N_{\alpha,y} kT_{,y} dA$$
$$= \int_{S_w} N_\alpha (kT_{,x} l + kT_{,y} m) dS_w \quad (4.18c)$$

หลังจากแทนค่าของความเค้นจากสมการ (3.4a-c) ลงไปในสมการ (4.18a-c) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\int_A N_\alpha (uu_{,x} + vu_{,y}) dA - \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,x} p\, dA + 2\nu \int_A N_{\alpha,x} u_{,x} dA + \nu \int_A N_{\alpha,y} (u_{,y} + v_{,x}) dA$$
$$= \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_x dS_o \quad (4.19a)$$

$$\int_A N_\alpha (uv_{,x} + vv_{,y}) dA + \nu \int_A N_{\alpha,x} (u_{,y} + v_{,x}) dA - \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,y} p\, dA + 2\nu \int_A N_{\alpha,y} v_{,y} dA$$
$$- g\beta \int_A N_\alpha T dA = \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_y dS_o - g(1 + \beta T_0) \int_A N_\alpha dA \quad (4.19b)$$

$$\int_A N_\alpha (uT_{,x} + vT_{,y}) dA + \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,x} T_{,x} dA + \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,y} T_{,y} dA$$
$$= \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_\alpha q_w dS_w \quad (4.19c)$$

โดย
$$P_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m \qquad (4.20a)$$
$$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \qquad (4.20b)$$
$$q_w = kT_{,x} l + kT_{,y} m \qquad (4.21)$$

ν แทนความหนืดจลนศาสตร์ของของไหล (Fluid kinematics viscosity) ซึ่งเป็นไปตามสมการ

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (4.22)$$

การแทนค่าของความเร็ว อุณหภูมิ และความดันจากสมการ (4.5) ถึง (4.8) ลงในสมการ (4.19a-c) และ (4.14d) จะก่อให้เกิดสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta = Q_{\alpha^u} \qquad (4.23a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta - K_{\alpha\beta} T_\beta = Q_{\alpha^v} - C_\alpha - D_\alpha \qquad (4.23b)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta T_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta T_\gamma + M_{\alpha\beta^{xx}} T_\beta + M_{\alpha\beta^{yy}} T_\beta = Q_{\alpha^T} \qquad (4.23c)$$

$$H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta = 0 \qquad (4.23d)$$

สัมประสิทธิ์ต่าง ๆในสมการ (4.23a-d) จะเป็นเมตริกซ์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนพื้นที่ของเอลิเมนต์และอินทิกรัลบนขอบ S_o หรือ S_w ของเอลิเมนต์ดังสมการต่อไปนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma^x} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,x} \, dA \qquad (4.24a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^y} = \int_A N_\alpha N_\beta N_{\gamma,y} \, dA \qquad (4.24b)$$

$$H_{\alpha\lambda^x} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,x} H_\lambda \, dA \qquad (4.24c)$$

$$H_{\alpha\lambda^y} = \frac{1}{\rho} \int_A N_{\alpha,y} H_\lambda \, dA \qquad (4.24d)$$

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2\nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} \, dA + \nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} \, dA \qquad (4.24e)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} \, dA + 2\nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} \, dA \qquad (4.24f)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \nu \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,x} \, dA \qquad (4.24g)$$

$$S_{\alpha\beta}^{yx} = \nu \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,y} \, dA \tag{4.24h}$$

$$M_{\alpha\beta}^{xx} = \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,x} N_{\beta,x} \, dA \tag{4.24i}$$

$$M_{\alpha\beta}^{yy} = \frac{k}{\rho c} \int_A N_{\alpha,y} N_{\beta,y} \, dA \tag{4.24j}$$

$$K_{\alpha\beta} = g\beta \int_A N_\alpha N_\beta \, dA \tag{4.24k}$$

$$Q_\alpha^{u} = \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_x \, dS_o \tag{4.24l}$$

$$Q_\alpha^{v} = \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_y \, dS_o \tag{4.24m}$$

$$Q_\alpha^{T} = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_\alpha q_w \, dS_w \tag{4.24n}$$

$$C_\alpha = g \int_A N_\alpha \, dA \tag{4.24o}$$

$$D_\alpha = g\beta T_0 \int_A N_\alpha \, dA \tag{4.24p}$$

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นดังแสดงในสมการ (4.23a-d) นั้น เป็นระบบสมการในรูปแบบไม่เชิงเส้น วิธีการแก้ระบบสมการดังกล่าวจะถูกอธิบายในหัวข้อ 4.4 ส่วนการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (4.24a-p) จะถูกอธิบายโดยละเอียดในหัวข้อ 4.5

4.4 การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นในสมการ (4.23a-d) นั้น เป็นระบบสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งการหาผลลัพธ์ของระบบสมการดังกล่าวไม่สามารถกระทำได้โดยการคำนวณเพียงครั้งเดียว จึงจำเป็นต้องทำการประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในการหาผลลัพธ์ดังนี้

พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้นซึ่งประกอบด้วย n สมการในรูปแบบดังสมการ

$$[K(x)]\{x\} = \{R\} \tag{4.25}$$

โดย $\{x\}$ แทนเวคเตอร์เมตริกซ์ของตัวไม่ทราบค่า

หาก $\{x\}$ ในสมการ (4.25) ไม่ใช่ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง เราจะได้ฟังก์ชันค่าตกค้างดังสมการ

$$\{F(x)\} = [K(x)]\{x\} - \{R\} \tag{4.26}$$

ซึ่งสามารถเขียนทีละสมการได้เป็น

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_j \; - \; R_i \qquad (4.27)$$

โดย $\quad i \quad = \quad 1,2,\ldots n$

เราสามารถประมาณค่าของฟังก์ชันค่าตกค้างที่ $\{x + \Delta x\}$ โดยพิจารณาเฉพาะพจน์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} F_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) \quad &= \quad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \Delta x_j \end{aligned} \qquad (4.28)$$

ถ้า $\{x + \Delta x\}$ ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์แม่นตรง ฟังก์ชันค่าตกค้างจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (4.28) จึงก่อให้เกิดระบบสมการที่มี $\{\Delta x\}$ เป็นตัวไม่ทราบค่าในรูปแบบดังนี้

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \Delta x_j \quad = \quad - F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (4.29)$$

การนำระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันมาประยุกต์ใช้กับสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมการ (4.23a-d) จึงเริ่มต้นจากการเขียนฟังก์ชันค่าตกค้างในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} F_{\alpha^u} \quad = \quad & K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{xx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{xy}} v_\beta \\ & - Q_{\alpha^u} \end{aligned} \qquad (4.30a)$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha^v} \quad = \quad & K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda + S_{\alpha\beta^{yx}} u_\beta + S_{\alpha\beta^{yy}} v_\beta \\ & - K_{\alpha\beta} T_\beta - Q_{\alpha^v} + C_\alpha + D_\alpha \end{aligned} \qquad (4.30b)$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha^T} \quad = \quad & K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta T_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta T_\gamma + M_{\alpha\beta^{xx}} T_\beta + M_{\alpha\beta^{yy}} T_\beta \\ & - Q_{\alpha^T} \end{aligned} \qquad (4.30c)$$

$$F_{\beta^p} \quad = \quad H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \qquad (4.30d)$$

หลังจากแทนฟังก์ชันค่าตกค้างในสมการ (4.30a-d) ลงในสมการ (4.29) จะได้ระบบสมการของค่าที่เพิ่มขึ้นของตัวไม่ทราบค่าต่าง ๆในรูปแบบดังนี้

$$\underset{(21\times21)}{\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & 0 & K_{up} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{vT} & K_{vp} \\ K_{Tu} & K_{Tv} & K_{TT} & 0 \\ K_{pu} & K_{pv} & 0 & 0 \end{bmatrix}} \underset{(21\times1)}{\begin{Bmatrix} \Delta u_\beta \\ \Delta v_\beta \\ \Delta T_\beta \\ \Delta p_\lambda \end{Bmatrix}} \quad = \quad - \underset{(21\times1)}{\begin{Bmatrix} F_{\alpha^u} \\ F_{\alpha^v} \\ F_{\alpha^T} \\ F_{\beta^p} \end{Bmatrix}} \qquad (4.31)$$

โดยที่เมตริกซ์ต่าง ๆทางด้านซ้ายของสมการ (4.31) หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$K_{uu} = K_{\alpha\beta\gamma^{x}} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^{x}} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^{y}} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{xx}} \quad (4.32a)$$

$$K_{uv} = K_{\alpha\beta\gamma^{y}} u_\gamma + S_{\alpha\beta^{xy}} \quad (4.32b)$$

$$K_{up} = -H_{\alpha\lambda^{x}} \quad (4.32c)$$

$$K_{vu} = K_{\alpha\beta\gamma^{x}} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{yx}} \quad (4.32d)$$

$$K_{vv} = K_{\alpha\gamma\beta^{x}} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^{y}} v_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^{y}} v_\gamma + S_{\alpha\beta^{yy}} \quad (4.32e)$$

$$K_{vT} = -K_{\alpha\beta} \quad (4.32f)$$

$$K_{vp} = -H_{\alpha\lambda^{y}} \quad (4.32g)$$

$$K_{Tu} = K_{\alpha\beta\gamma^{x}} T_\gamma \quad (4.32h)$$

$$K_{Tv} = K_{\alpha\beta\gamma^{y}} T_\gamma \quad (4.32i)$$

$$K_{TT} = K_{\alpha\gamma\beta^{x}} u_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta^{y}} v_\gamma + M_{\alpha\beta^{xx}} + M_{\alpha\beta^{yy}} \quad (4.32j)$$

$$K_{pu} = H_{\beta\mu^{x}} \quad (4.32k)$$

$$K_{pv} = H_{\beta\mu^{y}} \quad (4.32l)$$

ในสมการ (4.31) นี้ ค่า $\Delta u_\beta, \Delta v_\beta, \Delta T_\beta$ และ Δp_λ เป็นค่าที่เพิ่มขึ้นของตัวไม่ทราบค่าของการคำนวณครั้งที่ i แต่ค่า u_γ, v_γ และ T_γ ในสมการ (4.32a-l) เป็นค่าของตัวไม่ทราบค่าของการคำนวณครั้งที่ i-1 ดังนั้นจึงต้องเดาค่าของตัวไม่ทราบที่ทุกจุดต่อขึ้นมาก่อนในการคำนวณรอบแรก จึงจะเริ่มทำการคำนวณต่อไปได้ ระเบียบวิธีการทำซ้ำนี้จะสิ้นสุดลงเมื่อ ความคลาดเคลื่อนรวม (Overall error) มีค่าน้อยกว่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ ค่าความคลาดเคลื่อนรวมนี้คิดเป็นเปอร์เซนต์โดยคำนวณจาก

$$\text{Overall error} = \frac{\text{Error}}{\text{Sum}} \times 100\% \quad (4.33)$$

โดย

$$\text{Error} = \sum_{i=1}^{NPOIV} (\Delta u_i + \Delta v_i) + \sum_{j=1}^{NPOIT} (\Delta T_j) + \sum_{k=1}^{NPOIP} (\Delta p_k) \quad (4.34a)$$

$$\text{Sum} = \sum_{i=1}^{NPOIV} (u_i + v_i) + \sum_{j=1}^{NPOIT} (T_j) + \sum_{k=1}^{NPOIP} (p_k) \quad (4.34b)$$

NPOIV แทนจำนวนจุดต่อทั้งหมดของความเร็ว

NPOIT แทนจำนวนจุดต่อทั้งหมดของอุณหภูมิ

NPOIP แทนจำนวนจุดต่อทั้งหมดของความดัน

4.5 การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์

การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆในสมการ (4.24a-p) สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยเริ่มจากการเขียนฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในสมการ (4.9) และ (4.10) ในรูปแบบเมตริกซ์ดังนี้

$$\underset{(6\times1)}{\{N\}} = \underset{(6\times6)}{[A]}\underset{(6\times1)}{\{R\}} \tag{4.35}$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \tag{4.36}$$

โดย

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} L_1^2 \\ L_2^2 \\ L_3^2 \\ L_2 L_3 \\ L_3 L_1 \\ L_1 L_2 \end{Bmatrix} \tag{4.38}$$

หลังจากนั้นจึงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์อันดับสอง เทียบกับตัวแปร x และ y ดังนี้

$$\underset{(6\times1)}{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial x} \end{Bmatrix}} = \underset{(6\times6)}{[A]} \underset{(6\times1)}{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial x} \end{Bmatrix}} \tag{4.39a}$$

$$\underset{(6\times1)}{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix}} = \underset{(6\times6)}{[A]} \underset{(6\times1)}{\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} \end{Bmatrix}} \tag{4.39b}$$

แทนค่า $\{R\}$ จากสมการ (4.38) ลงในสมการ (4.39a-b) จะได้

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial x}\right\} = [A] \; [B] \; \{H\} \qquad (4.40a)$$

(6×1) (6×6)(6×3)(3×1)

$$\left\{\frac{\partial N}{\partial y}\right\} = [A] \; [C] \; \{H\} \qquad (4.40b)$$

(6×1) (6×6)(6×3)(3×1)

โดย

$$[B] = \begin{bmatrix} 2b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 \\ 0 & b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.41)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 2c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_3 \\ 0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.42)$$

เนื่องจาก [A], [B] และ [C] เป็นเมตริกซ์ของค่าคงที่ ในขณะที่ {R} และ {H} เป็นเมตริกซ์ของฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x และ y ดังนั้นการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์จึงเป็นเพียงการอินทิเกรตผลคูณของฟังก์ชันพิกัดของพื้นที่เท่านั้น ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้โดยใช้สูตรที่ว่า [1,13]

$$\int_A L_1^{\alpha} L_2^{\beta} L_3^{\gamma} dA = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A \qquad (4.43)$$

โดย A แทนพื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในสมการ (4.24a-p) สามารถประดิษฐ์ขึ้นมาในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้

การประดิษฐ์ $K_{\alpha\beta\gamma}{}^{x}, K_{\alpha\beta\gamma}{}^{y}$

เราสามารถเขียนสมการ (4.35) และ (4.40a-b) ให้อยู่ในรูปแบบของเทนเซอร์ได้ดังนี้ [17]

$$N_{\alpha} = A_{\alpha\xi} R_{\xi} \qquad (4.44)$$

$$N_{\alpha,x} = A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} H_{\eta} \qquad (4.45a)$$

$$N_{\alpha,y} = A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} H_{\eta} \qquad (4.45b)$$

โดย $\alpha, \xi = 1,2,...,6$ และ $\eta = 1,2,3$

แทนสมการ (4.44) และ (4.45a-b) ลงในสมการ (4.24a-b) จะได้

$$K_{\alpha\beta\gamma^{x}} = A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A R_{\xi} R_{\eta} H_{\mu}\, dA \qquad (4.46a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma^{y}} = A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} A_{\gamma\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A R_{\xi} R_{\eta} H_{\mu}\, dA \qquad (4.46a)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \eta, \gamma, \lambda = 1,2,...,6$ และ $\mu = 1,2,3$

ค่าอินทิกรัลในสมการ (4.46a-b) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A R_{\xi} R_{\eta} H_1\, dA = \frac{2A}{5040}\begin{bmatrix} 120 & 12 & 12 & 6 & 24 & 24 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \end{bmatrix} \qquad (4.47a)$$

$$\int_A R_{\xi} R_{\eta} H_2\, dA = \frac{2A}{5040}\begin{bmatrix} 24 & 12 & 4 & 4 & 6 & 12 \\ 12 & 120 & 12 & 24 & 6 & 24 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \\ 12 & 24 & 4 & 6 & 4 & 12 \end{bmatrix} \qquad (4.47b)$$

$$\int_A R_{\xi} R_{\eta} H_3\, dA = \frac{2A}{5040}\begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 & 4 & 12 & 6 \\ 4 & 24 & 12 & 12 & 4 & 6 \\ 12 & 12 & 120 & 24 & 24 & 6 \\ 4 & 12 & 24 & 12 & 6 & 4 \\ 12 & 4 & 24 & 6 & 12 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad (4.47c)$$

การประดิษฐ์ $H_{\alpha\lambda^{x}}, H_{\alpha\lambda^{y}}$

แทนสมการ (4.45a-b) ลงในสมการ (4.24a-c) จะได้

$$H_{\alpha\lambda^{x}} = \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} \int_A H_{\eta} H_{\lambda}\, dA \qquad (4.48a)$$

$$H_{\alpha\lambda^{y}} = \frac{1}{\rho} A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} \int_A H_\eta H_\lambda \, dA \qquad (4.48b)$$

โดย $\alpha, \xi = 1,2,...,6$ และ $\eta, \lambda = 1,2,3$

ค่าอินทิกรัลในสมการ (4.48a-b) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A H_\eta H_\lambda \, dA = \frac{A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (4.49)$$

การประดิษฐ์ $S_{\alpha\beta^{xx}}, S_{\alpha\beta^{yy}}, S_{\alpha\beta^{xy}}, S_{\alpha\beta^{yx}}, M_{\alpha\beta^{xx}}, M_{\alpha\beta^{yy}}$

แทนสมการ (4.45a-b) ลงในสมการ (4.24e-j) จะได้

$$S_{\alpha\beta^{xx}} = 2\nu A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA + \nu A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA \qquad (4.50a)$$

$$S_{\alpha\beta^{yy}} = \nu A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA + 2\nu A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA \qquad (4.50b)$$

$$S_{\alpha\beta^{xy}} = \nu A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA \qquad (4.50c)$$

$$S_{\alpha\beta^{yx}} = \nu A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA \qquad (4.50d)$$

$$M_{\alpha\beta^{xx}} = \frac{k}{\rho c} A_{\alpha\xi} B_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} B_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA \qquad (4.51a)$$

$$M_{\alpha\beta^{yy}} = \frac{k}{\rho c} A_{\alpha\xi} C_{\xi\eta} A_{\beta\lambda} C_{\lambda\mu} \int_A H_\eta H_\mu \, dA \qquad (4.51b)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \lambda = 1,2,...,6$ และ $\eta, \mu = 1,2,3$

ค่าอินทิกรัลในสมการ (4.50a-d) และ (4.51a-b) สามารถหาค่าได้จากสมการ (4.49)

การประดิษฐ์ $K_{\alpha\beta}$

แทนสมการ (4.44) ลงในสมการ (4.24k) จะได้

$$K_{\alpha\beta} = g\beta A_{\alpha\xi} A_{\beta\eta} \int_A R_\xi R_\eta \, dA \qquad (4.52)$$

โดย $\alpha, \xi, \beta, \eta = 1,2,...,6$

ค่าอินทิกรัลในสมการ (4.52) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A R_\xi R_\eta \, dA = \frac{2A}{720}\begin{bmatrix} 24 & 4 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 24 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 4 & 24 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad (4.53)$$

การประดิษฐ์ C_α, D_α

แทนสมการ (4.44) ลงในสมการ (4.24o-p) จะได้

$$C_\alpha = g A_{\alpha\xi} \int_A R_\xi \, dA \qquad (4.54a)$$

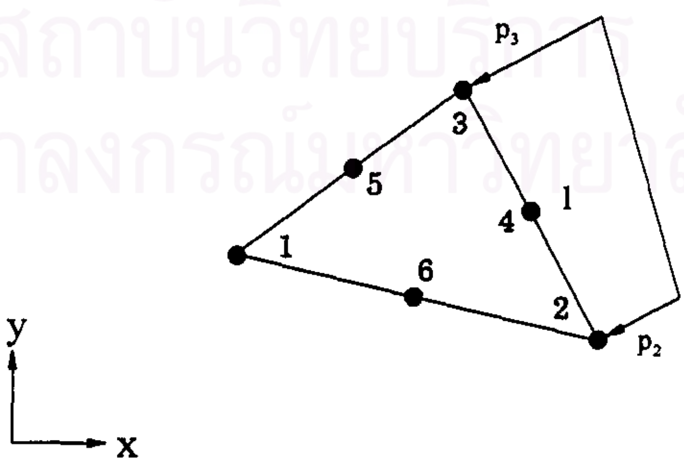
$$D_\alpha = g\beta T_0 A_{\alpha\xi} \int_A R_\xi \, dA \qquad (4.54b)$$

โดย $\alpha, \xi = 1,2,\ldots,6$

ค่าอินทิกรัลในสมการ (4.54a-b) สามารถอินทิเกรตและเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_A R_\xi \, dA = \frac{2A}{24}\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad (4.55)$$

การประดิษฐ์ $Q_{\alpha^u}, Q_{\alpha^v}$



รูปที่ 4.4 ความดันที่กระทำบนด้านหนึ่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

เมตริกซ์ Q_{α^u} และ Q_{α^v} นี้ เป็นเวคเตอร์เมตริกซ์เนื่องจากแรงที่ผิวในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนขอบเขตของเอลิเมนต์ การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ทั้งสองนี้กระทำได้โดย พิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อใด ๆที่มีความดันกระทำตลอดด้าน 23 ที่มีความยาว l ดังแสดงในรูปที่ 4.4 แล้วทำการอินทิเกรตตามเส้นบนด้านดังกล่าวของเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในรูปแบบดังนี้

$$Q_{\alpha^u} = -\frac{p_2 l_y}{6\rho}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\\0\end{Bmatrix} - \frac{p_3 l_y}{6\rho}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\2\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad (4.56a)$$

$$Q_{\alpha^v} = -\frac{p_2 l_x}{6\rho}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\\0\end{Bmatrix} - \frac{p_3 l_x}{6\rho}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\2\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad (4.56b)$$

โดย p_2 แทนความดันที่จุดต่อหมายเลข 2

p_3 แทนความดันที่จุดต่อหมายเลข 3

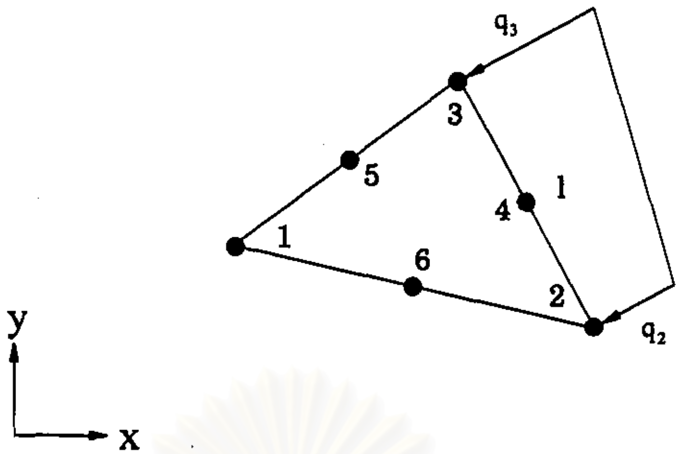
l_x แทนความยาวของภาพฉายของด้าน 23 ของเอลิเมนต์บนแกน x

l_y แทนความยาวของภาพฉายของด้าน 23 ของเอลิเมนต์บนแกน y

เครื่องหมายของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ทั้งสองพิจารณาจากเครื่องหมายของ Δx และ Δy ซึ่งในที่นี้คือ $x_3 - x_2$ และ $y_3 - y_2$ โดยถ้า $\Delta x \geq 0$ เครื่องหมายของเวคเตอร์เมตริกซ์เนื่องจากแรงที่ผิวในแนวแกน y จะเป็นบวก และถ้า $\Delta y \geq 0$ เครื่องหมายของเวคเตอร์เมตริกซ์เนื่องจากแรงที่ผิวในแนวแกน x จะเป็นลบ

การประดิษฐ์ Q_{α^T}

เมตริกซ์ Q_{α^T} นี้ เป็นเวคเตอร์เมตริกซ์เนื่องจากการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของอินทิกรัลบนขอบเขตของเอลิเมนต์เช่นเดียวกับ Q_{α^u} และ Q_{α^v} การประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ Q_{α^T} นี้กระทำได้โดย พิจารณาเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อใด ๆที่มีการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ตลอดด้าน 23 ที่มีความยาว l ดังแสดงในรูปที่ 4.5 แล้วทำการอินทิเกรตตามเส้นบนด้านดังกล่าวของเอลิเมนต์ ซึ่งจะได้ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ในรูปแบบดังนี้



รูปที่ 4.5 การถ่ายเทความร้อนเข้าสู่ด้านหนึ่งของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ

$$Q_{\alpha^{\tau}} = \frac{q_2 l}{6\rho c}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\\0\end{Bmatrix} + \frac{q_3 l}{6\rho c}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\2\\0\\0\end{Bmatrix} \qquad (4.57)$$

โดย q_2 แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ที่จุดต่อหมายเลข 2

q_3 แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ที่จุดต่อหมายเลข 3

q_4 แทนอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าสู่เอลิเมนต์ที่จุดต่อหมายเลข 4

l แทนความยาวของด้าน 23 ของเอลิเมนต์

เครื่องหมายของไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมานี้ จะเป็นบวกถ้าความร้อนถ่ายเทเข้าสู่เอลิเมนต์ และเป็นลบถ้าความร้อนถ่ายเทออกจากเอลิเมนต์

ไฟไนต์เอลิเมนต์เมตริกซ์ต่าง ๆที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมานี้ สามารถนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวได้โดยตรง ซึ่งรายละเอียดของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวจะนำเสนอไว้ในบทที่ 6