ตรรกศาสตร์พรีดีเคตอันดับโอเมกาที่มีไทป์

นาย อโนชา ยิ้มศิริวัฒนะ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์
บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2540

ISBN 974-638-321-3

ลิขสิทธิ์บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

I20948809

An ω–order predicate logic with types

Mr. Anocha Yimsiriwattana

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Mathematics
Department of Mathematics
Graduate School
Chulalongkorn University
Academic Year 1997

ISBN 974–638–321–3

Thesis Title	An ω–order predicate logic with types
By	Mr. Anocha Yimsiriwattana
Department	Mathematics
Thesis Advisor	Assistant Professor Suwimon Hall.

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University, in Partial Fulfillment of the Requirements for the Master's Degree.

..... Dean of Graduate School
(Professor Supawat Chutivongse, M.D.)

Thesis Committee

..... Chairman
(Assistant Professor Patanee Udomkavanich Ph.D.)

..... Thesis Advisor
(Assistant Professor Suwimon Hall.)

..... Thesis Co-Advisor
(Assistant Professor Mark Edwin Hall Ph.D.)

..... Member
(Assistant Professor Ajchara Harnchoowong Ph.D.)

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อโนชา ยิ้มศิริวัฒนะ : ตรรกศาสตร์พรีดีเคตอันดับโอเมกาที่มีไทป์ (AN ω–ORDER PREDICATE LOGIC WITH TYPES.) อ. ที่ปรึษา: ผศ. สุวิมล ฮอลล์, อ. ที่ปรึษาร่วม: ผศ. ดร. Mark Edwin Hall, 42 หน้า. ISBN 974-638-321-3

ไทป์เป็นสัญลักษณ์ที่ใช้แบ่งวัตถุในเอกภพออกเป็นกลุ่มต่างๆที่แตกต่างกัน วัตถุในตรรกศาสตร์ที่รู้จักกันโดยทั่วไปไม่มีไทป์ (หรืออีกนัยหนึ่งคือทุกวัตถุมีไทป์เดียวกัน) ดังนั้นในทฤษฎีซึ่งต้องการใช้วัตถุอย่างน้อยสองกลุ่มที่แตกต่างกันเช่น ทฤษฎีเวกเตอร์สเปซ หรือ โฮโมมอฟิซึมของกลุ่ม 2 กลุ่ม เราไม่สามารถเขียนทฤษฎีบทบางบทโดยใช้ตรรกศาสตร์ที่ไม่มีไทป์ได้ วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอตรรกศาสตร์ที่มีไทป์โดยกำหนดหลักวากยสัมพันธ์ ความหมาย นิยามการพิสูจน์แบบฟอร์มัลและพิสูจน์ทฤษฎีบทบางบทในกลุ่มทฤษฎีเมตา ซึ่งรวมถึงทฤษฎีความถูกต้อง และจบลงด้วยการให้ตัวอย่างค้านที่แสดงให้เห็นว่า ทฤษฎีความบริบูรณ์และทฤษฎีความกระทัดรัดไม่เป็นจริงในตรรกศาสตร์นี้

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต .....
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....
ปีการศึกษา 2540 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม .....

C725021:MAJOR MATHEMATICS
KEY WORD: PREDICATE LOGIC/ TYPE/ TYPE THEORY
ANOCHA YIMSIRIWATTANA : AN ω-ORDER PREDICATE LOGIC WITH TYPES. THESIS ADVISOR: ASSIST. PROF. SUWIMON HALL. THESIS CO-ADVISOR: ASSIST. PROF. MARK EDWIN HALL PH.D. 42 pp. ISBN 974-638-321-3

A type is a symbol used to separate objects in the universe into different groups. The objects in traditional predicate logic have no types (or, equivalently, they all have the same type), so in some theories which need at least two classes of object, such as the theory of vector spaces or homomorphisms of two groups, we can not write some theorems using untypes predicate logic. This thesis proposes a predicate logic with types. In it we will formulate syntax, sematics, and formal proofs, and prove some metatheorems, including the Soundness Theorem. Finally, we will give counterexamples to show that the Compactness and Completeness theorems fail in this logic.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาควิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อนิสิต .....

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา .....

ปีการศึกษา 2540 ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาร่วม Mark E. Hall

หอสมุดกลาง สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Acknowledgement

I am extremely indebted to Assistant Professor Suwimon Hall, my thesis advisor, and Dr Mark E. Hall, my thesis co-advisor, for their untired offering me thoughtful and helpful advice in preparing and writing my thesis. Also I would like to thank all of the lecturers for their valuable lectures while I was studying.

In particular, I would like to express my deep gratitude to my mother, family, and friends for their encouragement thoughout my graduate study.

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

CONTENTS

page

Abstract in Thai iv
Abstract in English v
Acknowledgement vi
Introduction 1
Chapter

I Background 2

II The Logic 4

III Results about the logic 33

IV Conclusion & Further work 40

References 41
Vita 42

สถาบันวิทยบริการ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Introduction

Type theory has been a topic of research interest to computer scientists, mathematicians, logicains and philosophers for a number of year. For computer scientists, it is the most important part of a programming language. It is used to detect static errors. Many static errors in a program can be detected if the language has a **strong type system.** Moreover, types provide information for the compiler (or interpreter) to generate more efficients code.

For mathematicians and logicians, types look a bit different. A type is just a symbol used to separate objects in a universe into different groups. It is not used to detect errors or provide any information. A type in the sense of mathematics is a tool used to help model the real world using mathematics. Without types, traditional predicate logic cannot express any useful statement. For example, consider the statement:

Let G_1 and G_2 be groups, e_1 an indentity of G_1, and e_2 an identity of G_2. Let $h : G_1 \to G_2$ be a homomorphism. Then $h(e_1) = e_2$.

We cannot express this statement formally using traditional predicate logic because the universe of the model of the group will include elements from both G_1 and G_2, so when we define h we cannot restrict the domain of h to elements in the group G_1.

In this thesis, we will use types to extend the expressive power of predicate logic. The experience of computer scientists working on functional programming languages has shown that including higher–order types in a type system can greatly increase the usefulness of that system. Therefore, the type systems used in this thesis will include types of all finite orders, even thouht it means the resulting logic will be incomplete.

The logic studied in this thesis will be much like traditional predicate logic, except for the addition of types. Therefore, the main outline of the theory should look quite familiar, although many details will be different. In particular, we will follow the standard pattern of studying the syntax of terms and formulas, introducing structures to give their semantics, and defining formal proofs using axioms and rules of inference. In the end most of the details can be hidden in the lemmas, so the proofs of most of the metatheorems are similar to the standard proofs for ordinary predicate logic. Of course, there are some differences, since the Compactness and Completeness theorems fail to be true in the new logic.

In Chapter 1 we cover some general background material that is not directly related to the new logic, but will be needed later in the thesis. In Chapter 2 we define the syntax and semantics of the new logic, as well as formal proofs, and prove a few results that are closely related to the definitions. In Chapter3 we prove several metatheorems, including the Soundness theorem, and gives a counterexample to show that Complactness and Completeness theorems fail.