การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด
แบบอะซิมโตติคและวิธีมอนติคาร์โล

นางสาวณัฏฐา บุรษนารีรัตน์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาสถิติศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ
คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2545

ISBN 974-17-1986-8

PARAMETER ESTIMATION FOR LOGISTIC REGRESSION MODEL WITH ASYMPTOTIC MAXIMUM LIKELIHOOD AND MONTE CARLO METHODS

Miss Nattha Burutnareerat

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science in Statistics
Department of Statistics
Faculty of Commerce and Accountancy
Chulalongkorn University
Academic Year 2002
ISBN 974-17-1986-8

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและวิธีมอนติคาร์โล
โดย	นางสาวณัฎฐา บุรุษนารีรัตน์
สาขาวิชา	สถิติ
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

…………………………………………….. คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิรัช อภิเมธีธำรง)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

……………………………………………… ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ศิริพร สาเกทอง)

…………………………………………….. อาจารย์ที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา)

……………………………………………… กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา)

……………………………………………… กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ธีระพร วีระถาวร)

ณัฎฐา บุรุษนารีรัตน์ : การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและวิธีมอนติคาร์โล. (PARAMETER ESTIMATION FOR LOGISTIC REGRESSION MODEL WITH ASYMPTOTIC MAXIMUM LIKELIHOOD AND MONTE CARLO METHODS) อ. ที่ปรึกษา : รศ.ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา, 92 หน้า. ISBN 974-17-1986-8.

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค โดยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิจัยนี้ คือ วิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติค (Asymptotic Maximum Likelihood Method) และวิธีมอนติคาร์โล (Monte Carlo Method) เมื่อตัวแบบถดถอยโลจิสติคมีรูปแบบดังนี้ $\pi(X) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\ldots+\beta_p X_p}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\ldots+\beta_p X_p}}$ โดยที่ $\pi(X)$ แทน ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ที่สนใจของตัวแปรตาม (y) $X_1, X_2, \ldots, X_p$ แทน ตัวแปรอธิบาย $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_p$ แทน ค่าสัมประสิทธิ์การถดถอย p แทน จำนวนตัวแปรอธิบาย และ e แทน ค่าคงที่มีค่าประมาณ 2.718 สำหรับข้อมูลตัวแปรตามที่ใช้ในการวิจัยนี้มีการแจกแจงแบบทวินาม ด้วยพารามิเตอร์ $n_i = n$ และ $\pi(x_i)$ การเปรียบเทียบกระทำภายใต้สถานการณ์ของจำนวนตัวแปรอธิบายในแต่ละตัวแบบเป็น 1 3 และ 5 ตัว ตามลำดับ ขนาดตัวอย่าง (k) เท่ากับ 30 90 และ 150 กำหนดค่าพารามิเตอร์ n เท่ากับ 10 20 และ 30 เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบ คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (AMSE) และใช้ตัวสถิติ Deviance เป็นเกณฑ์ประกอบการตัดสินใจ ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ได้จากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลโดยกระทำซ้ำ 500 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์โดยใช้โปรแกรม S–PLUS 2000 ผลการวิจัยสรุปดังนี้

ค่า AMSE ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธีมอนติคาร์โลในทุกสถานการณ์ ผลการวิจัยสอดคล้องกับค่า Deviance ซึ่งค่า Deviance ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคต่ำกว่าค่า Deviance ของวิธีมอนติคาร์โลในทุกสถานการณ์ พิจารณา ค่า AMSE ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและของวิธีมอนติคาร์โล พบว่า ค่า AMSE ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและของวิธีมอนติคาร์โลจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ภาควิชา สถิติ ลายมือชื่อนิสิต..

สาขาวิชา สถิติ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา...

ปีการศึกษา 2545

4382207526 : MAJOR STATISTICS

KEY WORD: LOGISTIC REGRESSION / BINOMIAL REGRESSION / MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD / MONTE CALO METHOD / DEVIANCE

NATTHA BURUTNAREERAT : PARAMETER ESTIMATION FOR LOGISTIC REGRESSION MODEL WITH ASYMPTOTIC MAXIMUM LIKELIHOOD AND MONTE CARLO METHODS. THESIS ADVISOR : ASSOC. PROF. SUPOL DURONGWATANA, Ph.D. 92 pp.

ISBN 974-17-1986-8.

The objective of this study is to compare the parameter estimation methods in logistic regression. The methods of estimating parameters under consideration in this study are Asymptotic Maximum Likelihood method and Monte Carlo method. The model for logistic regression is as follows: $\pi(X) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\ldots+\beta_p X_p}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X_1+\ldots+\beta_p X_p}}$ where $\pi(X)$ is the probability of interested events of dependent variable; $X_1, X_2, \ldots, X_p$ are the explanatory variables; $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_p$ are the regression coefficients; p is the number of explanatory variables and e is the approximate constant that equals 2.718. In addition the data of dependent variable of this study has been binomial distribution with $n_i = n$ and $\pi(x_i)$ parameters. The comparison is done under conditions of the number of explanatory variable is 1 3 and 5, respectively, sample size is 30 90 and 150 and the determination of n parameter value is 10 20 and 30. The criteria employed for the comparison are average mean square of error (AMSE) and statistics Deviance is used to support decision. The data used in this study are generated by S-plus 2000 package using Monte Carlo Simulation technique. Each situation is repeated 500 times. The result of this study is as follow :

AMSE value of Asymptotic Maximum Likelihood method is less than AMSE value of Monte Carlo method for all cases, that relate to Deviance value, Deviance value of Asymptotic Maximum Likelihood method is less than Deviance value of Monte Carlo method for all cases. Considering AMSE value of Asymptotic Maximum Likelihood method and Monte Carlo method mean that AMSE value of Asymptotic Maximum Likelihood method and Monte Carlo method increase the nearly value of AMSE while sample size increase.

Department Statistics Student's signature……………………………………….

Field of study Statistics Advisor's signature……………………………………….

Academic year 2002

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความช่วยเหลืออย่างดียิ่งของรองศาสตราจารย์ ดร. สุพล ดุรงค์วัฒนา อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้ให้คำแนะนำ ปรึกษา ตลอดจนช่วยเหลือแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์เสร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณด้วยความรู้สึกซาบซึ้งและสำนึกในพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ศิริพร สาเกทอง รองศาสตราจารย์ ดร. กัลยา วานิชย์บัญชา และรองศาสตราจารย์ ดร.ธีระพร วีระถาวร ในฐานะประธานกรรมการและกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาตรวจแก้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ประจำภาควิชาสถิติที่ให้โอกาสทางการศึกษา และประสิทธิประสาทความรู้ให้แก่ผู้วิจัยจนกระทั่งสำเร็จการศึกษา

ท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ซึ่งสนับสนุนในด้านการเงินและให้กำลังใจแก่ผู้วิจัยเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา รวมทั้งพี่สาว น้องชาย น้องสาว ญาติๆ และเพื่อนๆ ทุกคนที่ส่งเสริมและให้กำลังใจให้แก่ผู้วิจัยมาตลอด และเนื่องจากทุนการวิจัยครั้งนี้บางส่วนได้รับมาจากทุนอุดหนุนการวิจัยของบัณฑิตวิทยาลัย จึงขอขอบพระคุณบัณฑิตวิทยาลัยมา ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

บทที่ หน้า

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

สารบัญภาพ

ภาพประกอบ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบันการพยากรณ์ได้เข้ามามีบทบาทในการวิจัยสาขาต่างๆ และวิธีหนึ่งที่นิยมใช้กันมากในการพยากรณ์ก็คือ การวิเคราะห์การถดถอย (Regression analysis) ซึ่งเป็นวิธีวิเคราะห์ทางสถิติที่ใช้หารูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 กลุ่ม คือ กลุ่มของตัวแปรอิสระ (Independent variables) และตัวแปรตาม (Dependent variable) ภายใต้ข้อสมมติว่าตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบปกติ (Normal distribution) แต่ก็มีปัญหาหลายปัญหาที่ตัวแปรตามไม่มีการแจกแจงแบบปกติ เช่น ปัญหาทางด้านการแพทย์ ทางการศึกษา ทางสังคมศาสตร์ และทางชีวสถิติ เป็นต้น ซึ่งปัญหาดังกล่าวข้างต้นตัวแปรมักมีการแจกแจงทวินาม (Binomial distribution) เช่น จำนวนคนไข้ที่หายจากโรคมะเร็งที่ทำการรักษาด้วยการฉายรังสีจำแนกตามอายุ จำนวนนิสิตที่สอบผ่านจำแนกตามรายวิชา เป็นต้น

การวิเคราะห์การถดถอยไม่เหมาะที่จะใช้พยากรณ์ตัวแปรตามมีลักษณะดังกล่าว เนื่องจากตัวแปรตามไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นที่สำคัญของการวิเคราะห์การถดถอย คือ ข้อตกลงเบื้องต้นที่ว่า ความคลาดเคลื่อนมีการแจกแจงแบบปกติ นักสถิติจึงพัฒนาวิธีการวิเคราะห์แบบใหม่ขึ้นมา คือ การวิเคราะห์การถดถอยโลจิสติค (Logistic regression analysis) ซึ่งการวิเคราะห์การถดถอยโลจิสติคที่รับการพัฒนาขึ้นมีหลักการคล้ายกับการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้น แต่ตัวแบบการถดถอยโลจิสติคเป็นเส้นโค้งรูปตัวเอส (S – shape) มิได้เป็นเส้นตรงเช่นในตัวแบบถดถอยเชิงเส้น วัตถุประสงค์ของการวิเคราะห์การถดถอยโลจิสติค คือ การหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามและตัวแปรอิสระซึ่งในที่นี้เรียกว่าตัวแปรอธิบาย (Explanatory variable) เมื่อได้รูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแล้วผู้วิจัยอาจนำไปใช้ในการประมาณค่า หรือพยากรณ์ตัวแปรตามซึ่งมีการแปลความหมายในรูปของความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ (Aldrich and Nelson, 1987; DeMaris, 1992; Hardy, 1993; Hosmer and Lemmeshow, 1989; Menard, 1995)

การวิเคราะห์การถดถอยโลจิสติคเมื่อตัวแปรตามมีการแจกแจงทวินาม จะใช้หลักการของตัวแบบเชิงเส้นทั่วไป (Generalized linear model) กล่าวคือ แปลงค่าเฉลี่ยของตัวแปรตาม

$$\eta = \mathrm{E}(y_i | x_i) = \mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi} \qquad ; \; i = 1,2,\ldots,k$$

ด้วยฟังก์ชันเชื่อมโยงแบบโลจิสติค (Logistic link function)

$$\eta = \ln\left(\frac{\mu_i}{n_i - \mu_i}\right) = \ln\left(\frac{n_i\pi_i}{n_i - n_i\pi_i}\right) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$$

เมื่อ η แทน ฟังก์ชันเชื่อมโยง (Link function)

ซึ่งจะได้

$$\text{logit}(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi}$$

และ

$$\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \ldots + \beta_p x_{pi}}$$

$$\pi_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi}}}$$

เรียกตัวแบบที่ได้ข้างต้นว่า ตัวแบบถดถอยโลจิสติค (Logistic regression model)

ในปัจจุบันตัวแบบถดถอยโลจิสติคมีความสำคัญมากขึ้นในการวิจัยสาขาต่างๆ ดังนั้นถ้าผู้วิจัยมีความเข้าใจและรู้เรื่องตัวแบบถดถอยโลจิสติคเป็นอย่างดีแล้ว จะทำให้สามารถวิเคราะห์ข้อมูลได้อย่างมีประสิทธิภาพ แต่อาจพบปัญหาในเรื่องการประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญสุด ถ้าสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ได้ใกล้เคียงค่าจริงแล้วก็จะทำให้การพยากรณ์ความน่าจะเป็นหรือสัดส่วนของการเกิดสิ่งที่น่าสนใจได้ถูกต้องมากขึ้น

ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคสามารถทำได้หลายวิธี แต่ที่นิยมใช้ก็คือ วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood method) พิจารณาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีค่าฟังก์ชันควรจะเป็น (Likelihood function) มากที่สุด และสามารถหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ โดยอาศัยคุณสมบัติอะซิมโตติคของการประมาณความควรจะเป็นสูงสุด (Asymptotic maximum likelihood estimation) อีกวิธีหนึ่งที่นักสถิติให้ความสนใจคือ วิธีมอนติคาร์โล (Monte carlo method) ซึ่งพิจารณาการสุ่มเป็นค่าพารามิเตอร์ตั้งต้นในตัวแบบถดถอยโลจิสติคและกระทำการสุ่มตัวอย่างซ้ำเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณในตัวแบบถดถอยโลจิสติค

จากหลักการดังกล่าวข้างต้นจึงทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดและวิธีมอนติคาร์โล

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญดังนี้

1.2.1 เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค ด้วย

1.2.1.1 ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดและหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์โดยอาศัยคุณสมบัติอะซิมโตติคของการประมาณความควรจะเป็นสูงสุด (Asymptotic of maximum likelihood estimation : ML)

1.2.1.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์และหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล (Monte carlo : MC)

1.2.2 เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าทั้ง 2 วิธี ด้วยการเปรียบเทียบค่าสถิติดีเวียนซ์ (Deviance) ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและวิธีมอนติคาร์โล

1.3 คำจำกัดความที่ใช้ในการวิจัย

ตัวแปรอธิบาย (Explanatory variable) หมายถึง ตัวแปรที่มีผลกระทบต่อตัวแปรตาม

ตัวแปรตาม (Dependent variable) หมายถึง ตัวแปรที่ได้รับผลกระทบจากตัวแปรอธิบาย

การวิเคราะห์การถดถอยโลจิสติค (Logistic regression analysis) หมายถึง เทคนิควิธีการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามที่มีการแจกแจงทวินามและตัวแปรอธิบาย

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 จำนวนตัวแปรอธิบายที่ใช้ในการศึกษา คือ 1 3 และ 5 ตัว

1.4.2 ตัวแปรอธิบายแต่ละตัวเป็นค่าคงที่

1.4.3 ขนาดตัวอย่างที่ทำการศึกษา(k) คือ 30 90 และ 150 *

---

* การวิเคราะห์การถดถอยโลจิสติคจะต้องใช้ขนาดตัวอย่างมากกว่าการวิเคราะห์การถดถอยปกติ โดยทั่วไป $n \geq 30p$ เมื่อ p แทนจำนวนตัวแปรอิสระ (ดร.กัลยา วานิชย์บัญชา , 2544 : 62) และเนื่องจากทำการศึกษากรณีตัวแปรอิสระ 1 3 และ 5 ตัว ดังนั้นจึงกำหนดขนาดตัวอย่างที่ศึกษาเท่ากับ 30 90 และ 150

1.4.4 กำหนด $\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{1}$ *

1.4.5 ตัวแปรตาม y_i มีการแจกแจงแบบทวินามด้วยพารามิเตอร์ n_i และ $\pi(x_i)$ ซึ่งกำหนดดังนี้

1.4.5.1 กำหนด $n_i = n$ เท่ากับ 10 20 และ 30

1.4.5.2 $$\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi}}} \quad ; i = 1,2,\ldots,k$$

1.4.6 กำหนดการกระทำซ้ำในแต่ละสถานการณ์เป็น 500 ครั้ง

1.4.7 สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีมอนติคาร์โล กระทำการสุ่มตัวอย่างซ้ำ 500 ครั้ง

1.5 เกณฑ์การตัดสินใจ

การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ว่าวิธีการใดน่าจะมีความถูกต้องมากที่สุดจะพิจารณาจากเกณฑ์เปรียบเทียบ คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (average mean square of error : AMSE) และใช้ตัวสถิติ Deviance (DV) เป็นเกณฑ์เป็นเกณฑ์ประกอบการตัดสินใจ และเพื่อง่ายในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จะใช้เปอร์เซ็นต์ของอัตราส่วนผลต่างค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (PAMSE) และเปอร์เซ็นต์ของอัตราส่วนผลต่างค่า Deviance (PDV) ประกอบการพิจารณา เนื่องจากงานวิจัยครั้งนี้ใช้เทคนิคในการจำลองซ้ำ 500 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ ดังนั้น

- ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง

$$\text{AMSE} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{500} \frac{(\hat{\beta}_{ij} - \beta_{ij})^2}{500 \text{ x p}} \quad ; \ i = 1,2,\ldots, \text{ p}$$

เมื่อ β_{ij} หมายถึง ค่าจริงของพารามิเตอร์ตัวที่ i ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค ในการจำลองรอบที่ j

$\hat{\beta}_{ij}$ หมายถึง ค่าประมาณพารามิเตอร์ตัวที่ i ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค ในการจำลองรอบที่ j

---

* การวิจัยครั้งนี้ได้ทดลองให้ค่า $\underset{\sim}{\beta}$ มีค่าอื่นๆ ได้ผลลัพธ์ไม่แตกต่างกัน ซึ่งได้แสดงตัวอย่างของผลลัพธ์จากการใช้ $\underset{\sim}{\beta}$ ค่าอื่น ไว้ในภาคผนวก ข.

- เปอร์เซ็นต์ของอัตราส่วนผลต่างค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง

$$\text{PAMSE} = \frac{\text{AMSE}_{(i)} - \text{AMSE}_{(\min)}}{\text{AMSE}_{(i)}} \times 100 \qquad ; i = 1, 2$$

เมื่อ $\text{AMSE}_{(i)}$ หมายถึง RMSE ของวิธี i

$\text{AMSE}_{(\min)}$ หมายถึง RMSE ของวิธีที่มีค่าน้อยที่สุด

- ค่าตัวสถิติ Deviance

$$\text{DV} = 2\sum_{i=1}^{k} y_i \ln\left(\frac{y_i}{n_i\hat{\pi}(x_i)}\right) + 2\sum_{i=1}^{k}(n_i - y_i)\ln\left(\frac{n_i - y_i}{n_i - n_i\hat{\pi}(x_i)}\right) \quad ; i = 1,2,\ldots,k$$

เมื่อ y_i หมายถึง จำนวนผลที่สนใจจากจำนวนผลทั้งหมด n_i

$\hat{\pi}(x_i)$ หมายถึง ค่าพยากรณ์ที่ i

k หมายถึง ขนาดตัวอย่าง

- เปอร์เซ็นต์ของอัตราส่วนผลต่างค่า Deviance

$$\text{PDV} = \frac{\text{DV}_{(i)} - \text{DV}_{(\min)}}{\text{DV}_{(i)}} \times 100 \qquad ; i = 1, 2$$

เมื่อ $\text{DV}_{(i)}$ หมายถึง DV ของวิธี i

$\text{DV}_{(\min)}$ หมายถึง DV ของวิธีที่มีค่าน้อยที่สุด

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 เพื่อเป็นแนวทางในการเลือกวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์

1.6.2 เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเปรียบเทียบสำหรับตัวแบบอื่นๆ ต่อไป

บทที่ 2
ทฤษฎีและตัวสถิติที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงข้อสมมติของตัวแบบถดถอยโลจิสติค วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและวิธีมอนติคาร์โล

2.1 ข้อสมมติของตัวแบบถดถอยโลจิสติค

งานวิจัยในครั้งนี้เป็นการศึกษาตัวแบบถดถอยกรณีตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบทวินามโดยใช้การแปลงแบบโลจิสติคมาช่วย

พิจารณาข้อมูลที่อยู่ในรูปของ $\{(y_i, x_i)\}$; $i = 1,2,..., k$ ตัวแปรตาม y_i มีการแจกแจงแบบทวินามด้วยพารามิเตอร์ n_i และ π_i มี x_i เป็นตัวแปรอธิบายร่วมกัน p ตัวแปร (p - covariate explanatory variable) โดยที่ $p \le k$ ความน่าจะเป็น π_i เป็นการอธิบายในเทอมของตัวแปร x_i

$$\pi_i = \pi(x_i) \qquad ; \; i = 1,2,..,k$$

ฟังก์ชันการแปลงโลจิสติคของ π_i ซึ่งอยู่ในรูป $\text{logit}\,(\pi_i) = \ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$ จะทำการแปลง π_i จากช่วง (0,1) เป็นค่าของ logit(π_i) ที่อยู่ในช่วง $(-\infty, \infty)$

กำหนดให้ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค (logistic linear model) สำหรับ π_i ณ ระดับที่ i คือ

$$\text{logit}(\pi_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi} \qquad \ldots(2.1)$$

จากฟังก์ชันการแปลงโลจิสติคและตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค จะได้ว่า

$$\ln\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_p x_{pi}$$

$$\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_p x_{pi}}$$

$$\pi_i = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_p x_{pi}}}$$

สามารถเขียนตัวแบบถดถอยโลจิสติค (2.1) ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathrm{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{XB}$$

เมื่อ $\mathrm{G}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \mathrm{logit}(\pi(x_1)) \\ \mathrm{logit}(\pi(x_2)) \\ \vdots \\ \mathrm{logit}(\pi(x_k)) \end{bmatrix}_{k \times 1}$; $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{p1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{p2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1i} & x_{2i} & \cdots & x_{pi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} & \cdots & x_{pk} \end{bmatrix}_{k \times (p+1)}$

และ $\mathbf{B} = \underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}_{(p+1) \times 1}$

2.2 ลอการิทึมธรรมชาติของฟังก์ชันควรจะเป็น (Log likelihood function) **ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค**

ฟังก์ชันควรจะเป็นสำหรับพารามิเตอร์ β ของตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\mathrm{L}(\beta) = \prod_{i=1}^{k} (\pi_i)^{y_i} (1 - \pi_i)^{n_i - y_i}$$

$$l(\beta) = \ln \mathrm{L}(\beta) = \sum_{i=1}^{k} \{ y_i \ln \pi_i + (n_i - y_i) \ln(1 - \pi_i) \}$$

$$= \sum_{i-1}^{k} \{ y_i \ln \pi_i + n_i \ln(1 - \pi_i) - y_i \ln(1 - \pi_i) \}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left\{ y_i \ln\left(\frac{\pi_i}{1 - \pi_i}\right) + n_i \ln(1 - \pi_i) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i \ln\left(\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}} \cdot \frac{1}{1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}}} \right) + \sum_{i=1}^{k} n_i \ln\left(1-\frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} y_i(\beta_0+\beta_1 x_{1i}+..+\beta_p x_{pi}) - \sum_{i=1}^{k} n_i \ln(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}) \qquad \ldots(2.2)$$

2.3 ประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติค

วิธีความควรจะเป็นสูงสุดเป็นที่รู้จักและใช้กันอย่างแพร่หลายสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ ซึ่งมีหลายวิธีการที่ใช้ในหาตัวประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชันควรจะเป็นมีค่าสูงสุด เช่น วิธีของฟิชเชอร์ (Fisher’s method) วิธี Newton – raphson วิธีทำซ้ำ (Iterative method (McCullagh และ Nelder (1981))) สำหรับในงานวิจัยนี้เลือกใช้วิธี Newton – raphson เนื่องจากเป็นวิธีที่นิยมใช้กัน และหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ผ่านข้อสนเทศของฟิชเชอร์ ดังนี้

2.3.1 ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

วิธีความควรจะเป็นสูงสุดนั้น จุดประสงค์เพื่อหาตัวประมาณพารามิเตอร์ที่ทำให้ $l(\beta)$ มีค่ามากที่สุด โดยทำการหาอนุพันธ์ (Differentiate) เทียบกับพารามิเตอร์ $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ แล้วให้ผลลัพธ์เท่ากับศูนย์ จะได้สมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น p+1 สมการ ซึ่งสามารถหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ต่างได้ด้วยหลายวิธีด้วยกัน ในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้วิธี Newton – raphson มีขั้นตอนดังนี้

ตามวิธี Newton – raphson หาอนุพันธ์ย่อย (Partial derivative) ของลอการิทึมของฟังก์ชันควรจะเป็น $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ เรียกว่า Efficient scores แล้วนำมาเป็นสมาชิกของเวกเตอร์ $\mathbf{U(B)}$ มีขนาด (p+1) x 1

$$U(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l(\beta)}{\beta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial l(\beta)}{\beta_p} \end{bmatrix}$$

กำหนดเมทริกซ์ $H(\mathbf{B})$ มีขนาด (p+1) x (p+1) มีสมาชิกเป็นอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง (Second partial derivative) ของ $l(\beta)$ โดยที่ สมาชิกตัวที่ (j,k) คือ $\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k}$ j ,k =0,1,…,p เรียกเมทริกซ์ $H(\mathbf{B})$ ว่า Hessian matrix

พิจารณาหาเวกเตอร์ $U(\mathbf{B})$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ของ Efficient scores ของ β ที่ประมาณด้วยความควรจะเป็นสูงสุด ใช้ Taylor series กระจาย $U(\mathbf{B})$ รอบ $\mathbf{B}^*$ ซึ่ง $\mathbf{B}^*$ อยู่ใกล้ๆ $\hat{\mathbf{B}}$ ได้ว่า

$$U(\hat{\mathbf{B}}) \approx U(\mathbf{B}^*) + H(\mathbf{B}^*)(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^*)$$

โดยนิยามของตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ $\underset{\sim}{\beta}$ จะได้ว่า

$$\left.\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_j}\right|_{\hat{\beta}} = 0 \qquad \text{สำหรับ } j = 0,1,2,\ldots,p$$

และ $U(\hat{\mathbf{B}}) = 0$

ดังนั้น $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^* - H^{-1}(\beta^*)U(\beta^*)$

ซึ่งชี้นำให้มีการประมาณ $\hat{\mathbf{B}}$ โดยการคำนวณซ้ำๆ ซึ่งค่าประมาณ $\hat{\mathbf{B}}$ ณ รอบที่ r+1 คือ

$$\hat{\mathbf{B}}_{r+1} = \hat{\mathbf{B}}_r - H^{-1}(\mathbf{B}_r)U(\mathbf{B}_r) \qquad \ldots(2.3)$$

สำหรับ r = 0,1,2,… ซึ่ง $\hat{\mathbf{B}}_0$ เป็นเวกเตอร์ของตัวประมาณเริ่มต้น

2.3.1.1 วิธี Newton-raphson สำหรับตัวแปรอธิบาย 1 ตัว

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ k ค่า คือ $(x_{1i}, y_i)\,;\, i = 1,2,\ldots,k$ ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\mathrm{logit}(\pi(x_i)) = \ln\left(\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right)$$

$$= \beta_0 + \beta_1 x_{1i}$$

เมื่อ $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}}}$

หาค่าพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-raphson ด้วยสมการ

$$\hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{r+1}} = \hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{r}} - \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{B}_{\mathrm{r}})\mathrm{U}(\mathrm{B}_{\mathrm{r}})$$

เมื่อ $\underset{\sim}{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\end{bmatrix}$, $\mathrm{U}(\beta) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_0}\\ \dfrac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1}\end{bmatrix}$

และ $$H(\beta) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0^2} & \dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1}\\ \dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \dfrac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1^2}\end{bmatrix} \qquad \ldots(2.4)$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $\mathrm{U}(\mathbf{B})$ และในเมทริกซ์ $\mathrm{H}(\mathbf{B})$ หาได้จากอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ β_0 และ β_1 ดังนี้

จาก (2.2) และสำหรับตัวแปรอธิบาย 1 ตัว

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\beta_0 + \beta_1 x_{1i}) - \sum_{i=1}^{k} n_i \ln(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}})$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{k} (y_i - n_i \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - n_i \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{k} \left(y_i x_{1i} - n_i x_{1i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(y_i x_{1i} - n_i x_{1i} \pi(x_i) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_{1i} \left(y_i - n_i \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_{1i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}} - x_{1i} \left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}} \right)^2 \right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i) \left(1 - \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i \left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}} - \left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}} \right)^2 \right)$$

$$= -\sum_{i-1}^{k} n_i \pi(x_i) \left(1 - \pi(x_i) \right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \left(x_{1i} \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}} - x_{1i} \left(\frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i}}} \right)^2 \right)$$

$$= -\sum_{i-1}^{k} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i) \left(1 - \pi(x_i) \right)$$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $\mathrm{U}(\mathbf{B})$ และในเมทริกซ์ $\mathrm{H}(\mathbf{B})$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ (2.4) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$ และ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ ได้จากสมการ

$$\hat{\mathrm{B}}_{r+1} = \hat{\mathrm{B}}_r - \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{B}_r)\mathrm{U}(\mathrm{B}_r)$$

เมื่อ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{U}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{1i}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right) \end{bmatrix}$

$$\mathrm{H}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{k} n_i\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) \\ -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) \end{bmatrix} \qquad \ldots(2.5)$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{\mathbf{B}}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $\left|\mathbf{B}_r - \mathbf{B}_{r+1}\right| < 0.0000001$ ค่า $\hat{\mathrm{B}}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.3.1.2 **วิธี Newton-raphson สำหรับตัวแปรอธิบาย 3 ตัว**

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ k ค่า คือ $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, y_i)$; $i = 1,2,\ldots,k$ ตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\mathrm{logit}(\pi(x_i)) = \ln\left(\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right)$$

$$= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}$$

เมื่อ $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}$

หาค่าพารามิเตอร์ β_0 , β_1 , β_2 และ β_3 จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-raphson ด้วยสมการ

$$\hat{\mathrm{B}}_{r+1} = \hat{\mathrm{B}}_{r} - \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{B}_r)\mathrm{U}(\mathrm{B}_r)$$

เมื่อ $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{U}(\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3} \end{bmatrix}$ $\ldots(2.6)$

และ $H(\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_3} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_3} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_3} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3^2} \end{bmatrix}$ $\ldots(2.7)$

สมาชิกในเวกเตอร์ $\mathrm{U}(\mathrm{B})$ และในเมทริกซ์ $\mathrm{H}(\mathrm{B})$ หาได้จาก (2.2) และสำหรับตัวแปรอธิบาย 3 ตัว

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{k} y_i(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}) - \sum_{i=1}^{k} n_i \ln(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i}})$$

หาอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ β_0 , β_1 , β_2 และ β_3 ดังนี้

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{k} x_{1i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{k} x_{2i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial \beta_3} = \sum_{i=1}^{k} x_{3i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

โดยที่ค่า $\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}$

และสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ได้ในรูป

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{ji}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{ji} x_{ki} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} x_{2i} \pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} x_{3i} \pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i} x_{3i} \pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big)$$

โดยที่ค่า $\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}}{\left(1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}}\right)^2}$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $\mathrm{U}(\mathbf{B})$ และในเมทริกซ์ $\mathrm{H}(\mathbf{B})$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ (2.6) และ (2.7) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ และ $\hat{\beta}_3$ ได้จากสมการ

$$\hat{\mathbf{B}}_{r+1} = \hat{\mathbf{B}}_r - \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{B}_r)\mathrm{U}(\mathbf{B}_r)$$

เมื่อ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{U}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k}\big(y_i - n_i\pi(x_i)\big) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{1i}\big(y_i - n_i\pi(x_i)\big) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{2i}\big(y_i - n_i\pi(x_i)\big) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{3i}\big(y_i - n_i\pi(x_i)\big) \end{bmatrix}$

$$\mathrm{H}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{k} n_i\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_{1i})\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}\pi(x_{1i})\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) \\ -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) \\ -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}^2\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) \\ -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}^2\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)\big(1-\pi(x_i)\big) \end{bmatrix}$$

$$\ldots(2.8)$$

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{\mathbf{B}}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $\left|\mathbf{B}_r - \mathbf{B}_{r+1}\right| < 0.0000001$ ค่า $\hat{\mathbf{B}}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.3.1.3 วิธี Newton-raphson สำหรับตัวแปรอธิบาย 5 ตัว

ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตที่เป็นอิสระ k ค่า คือ $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, x_{4i}, x_{5i}, y_i)$; $i = 1,2,\ldots,k$ และตัวแบบเชิงเส้นโลจิสติค คือ

$$\mathrm{logit}(\pi(x_i)) = \ln\left(\frac{\pi(x_i)}{1-\pi(x_i)}\right)$$

$$= \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \beta_4 x_{4i} + \beta_5 x_{5i}$$

เมื่อ $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}}}$

หาค่าพารามิเตอร์ β_0 ,β_1, β_2, β_3 ,β_4 และ β_5 จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton -raphson ด้วยสมการ

$$\hat{\mathbf{B}}_{r+1} = \hat{\mathbf{B}}_r - \mathrm{H}^{-1}(\mathbf{B}_r)\mathrm{U}(\mathbf{B}_r)$$

เมื่อ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\\ \beta_5\end{bmatrix}$, $\mathrm{U}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_0}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_2}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_3}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_4}\\ \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_5}\end{bmatrix}$ …(2.9)

และ

$$H(\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_4} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_5} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_4} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_5} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_4} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_5} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_4} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_5} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_3} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4^2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_5} \\ \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_0} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_2} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_3} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_4} & \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5^2} \end{bmatrix} \qquad \ldots(2.10)$$

สมาชิกในเวกเตอร์ $\mathrm{U}(\mathbf{B})$ และในเมทริกซ์ $\mathrm{H}(\mathbf{B})$ หาได้จาก (2.2) และสำหรับตัวแปรอธิบาย 5 ตัว

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{k} \left\{ y_i(\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_5 x_{5i}) - n_i \ln(1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_5 x_{5i}}) \right\}$$

หาอนุพันธ์ของ $l(\beta)$ เทียบกับ β_0 , β_1 , β_2 , β_3 , β_4 และ β_5 ดังนี้

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_0} = \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_1} = \sum_{i=1}^{k} x_{1i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_2} = \sum_{i=1}^{k} x_{2i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_3} = \sum_{i=1}^{k} x_{3i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_4} = \sum_{i=1}^{k} x_{4i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_5} = \sum_{i=1}^{k} x_{5i}\left(y_i - n_i \pi_i(x_i)\right)$$

โดยที่ค่า $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\beta_2 x_{2i}+\beta_3 x_{3i}+\beta_4 x_{4i}+\beta_5 x_{5i}}}$

และสามารถหาอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ได้ในรูป

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{ji}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_j \partial \beta_k} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{ji} x_{ki} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

ซึ่งทำให้ได้

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_3^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_4^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{4i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_5^2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_2 \partial \beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_0} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_2} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_1} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_3} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_2\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_2} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_4} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}x_{4i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_3\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_3} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i))$$

$$\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_4\partial\beta_5} = \frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_5\partial\beta_4} = -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{4i} x_{5i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)$$

โดยที่ค่า $\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}+\beta_4x_{4i}+\beta_5x_{5i}}}{\left(1+e^{\beta_0+\beta_1x_{1i}+\beta_2x_{2i}+\beta_3x_{3i}+\beta_4x_{4i}+\beta_5x_{5i}}\right)^2}$

นำสมาชิกของเวกเตอร์ $U(\mathbf{B})$ และในเมทริกซ์ $H(\mathbf{B})$ ที่หามาได้ไปแทนในสมการ (2.9) และ (2.10) ดังนั้นคำนวณหาค่า $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \hat{\beta}_4$ และ $\hat{\beta}_5$ ได้จากสมการ

$$\hat{\mathbf{B}}_{r+1} = \hat{\mathbf{B}}_r - H^{-1}(\mathbf{B}_r)U(\mathbf{B}_r)$$

เมื่อ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\\ \beta_5\end{bmatrix}$, $U(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{k}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right)\\ \sum_{i=1}^{k}x_{1i}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right)\\ \sum_{i=1}^{k}x_{2i}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right)\\ \sum_{i=1}^{k}x_{3i}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right)\\ \sum_{i=1}^{k}x_{4i}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right)\\ \sum_{i=1}^{k}x_{5i}\left(y_i - n_i\pi(x_i)\right)\end{bmatrix}$

$$H(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{k} n_i\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & \cdots & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) \\ -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & \cdots & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & \cdots & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}^2\pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) \end{bmatrix}$$

…(2.11)

ถ้าค่าผลต่างระหว่าง $\hat{\mathbf{B}}$ ในรอบที่ r กับรอบที่ r+1 มีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่แตกต่างกัน โดยกำหนดเกณฑ์ว่า $\left|\mathbf{B}_r - \mathbf{B}_{r+1}\right| < 0.0000001$ ค่า $\hat{\mathbf{B}}_{r+1}$ นั้นจะเป็นค่าที่ยอมรับได้

2.3.2 ประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$

ก่อนที่จะทำการประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ ขอเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องเพื่อความเข้าใจง่ายขึ้น ดังนี้

<u>ทฤษฎีบท</u> ให้ $y_1, y_2, ..., y_k \sim f(y|\theta)$ และให้ $\mathrm{I}(\underset{\sim}{\theta}) = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln f(y|\theta)\right]$ เป็นข้อสนเทศของพิชเชอร์ (the Fisher information) สำหรับ $\underset{\sim}{\theta}$ ภายใต้เงื่อนไขทั่วไปและสำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ $\underset{\sim}{\hat{\theta}}$ เป็นตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\theta}$ ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\theta}$ และค่าความแปรปรวน I^{-1}

$$\underset{\sim}{\hat{\theta}} \sim N(\underset{\sim}{\theta}, \mathrm{I}^{-1})$$

จากทฤษฎีบทข้างต้นสามารถประยุกต์ใช้กับตัวแบบถดถอยโลจิสติคในกรณีที่ตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบทวินาม นั่นคือ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ เป็นตัวประมาณความควรจะเป็นสูงสุดของ $\underset{\sim}{\beta}$ มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย $\underset{\sim}{\beta}$ และค่าความแปรปรวน I^{-1} เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และสามารถหาเมทริกซ์ข้อสนเทศ (the information matrix) ได้ดังนี้

$$I_{(p+1)\times(p+1)}(\underset{\sim}{\beta}) = (I_{ij}(\underset{\sim}{\beta}))$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_i} \cdot \frac{\partial l(\beta)}{\partial\beta_j}\right]$$

$$= -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_i \partial\beta_j}\right]$$

$$
= \begin{bmatrix}
-E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_1}\right) & \cdots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_0\partial\beta_p}\right) \\
-E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_0}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1^2}\right) & \cdots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_1\partial\beta_p}\right) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_p\partial\beta_0}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_p\partial\beta_1}\right) & \cdots & -E\left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial\beta_p^2}\right)
\end{bmatrix} \quad \ldots(2.12)
$$

2.3.2.1 ความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์กรณีตัวแปรอธิบาย 1 ตัว

หาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ผ่านเมทริกซ์ข้อสนเทศ ดังนี้ จากสมการ (2.5) , (2.12) และสำหรับตัวแปรอธิบาย 1 ตัว จะได้เมทริกซ์ข้อสนเทศ คือ

$$
\underset{\sim}{I}(\beta) = \begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{k} n_i \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) \\
\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)\left(1-\pi(x_i)\right)
\end{bmatrix} \quad \ldots(2.13)
$$

จากนั้นหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยการคำนวณหาค่าอินเวอร์สของเมทริกซ์ข้อสนเทศ

2.3.2.2 ความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์กรณีตัวแปรอธิบาย 3 ตัว

หาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ผ่านเมทริกซ์ข้อสนเทศ ดังนี้ จากสมการ (2.8) , (2.12) และสำหรับตัวแปรอธิบาย 3 ตัว จะได้เมทริกซ์ข้อสนเทศ คือ

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}(\beta)=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} n_i\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_{1i})(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}\pi(x_{1i})(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{2i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{2i}x_{3i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{3i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

...(2.14)

จากนั้นหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยการคำนวณหาค่าอินเวอร์สของเมทริกซ์ข้อสนเทศ

2.3.2.3 **ความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์กรณีตัวแปรอธิบาย 5 ตัว**

หาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ผ่านเมทริกซ์ข้อสนเทศ ดังนี้ จากสมการ (2.11) , (2.12) และสำหรับตัวแปรอธิบาย 5 ตัว จะได้เมทริกซ์ข้อสนเทศ คือ

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{I}}(\beta)=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} n_i\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}x_{5i}\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{5i}^2\pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

...(2.15)

จากนั้นหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยการคำนวณหาค่าอินเวอร์สของเมทริกซ์ข้อสนเทศ

2.4 **การประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล**

วิธีมอนติคาร์โลเป็นวิธีหนึ่งที่นิยมใช้ในการหาคำตอบทางสถิติ พิจารณาการจำลองสุ่มและกระทำซ้ำมาช่วยในการหาคำตอบที่ต้องการศึกษา ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้วิธีมอนติคาร์โล

ดังกล่าวในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติค โดยพิจารณาการสุ่มเป็นค่าพารามิเตอร์ตั้งต้นในตัวแบบและกระทำซ้ำเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 นำค่าประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ..., \hat{\beta}_p$ ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุดในส่วนแรกเป็นค่าพารามิเตอร์ตั้งต้นของตัวแบบถดถอยโลจิสติค ดังนั้นจึงได้ค่า $\pi(x_i)$ คือ

$$\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi}}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_{1i} + ... + \beta_p x_{pi}}} \quad ; \; i = 1,2,..., k \qquad ...(2.16)$$

ขั้นที่ 2 นำค่า $\pi(x_i)$ ที่ได้จากสมการ (2.16) จำลองเซตข้อมูล $(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$ โดยกระทำซ้ำ 500 ครั้ง และประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ..., \hat{\beta}_p$ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดในแต่ละเซตข้อมูล แสดงผลดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงการประมาณพารามิเตอร์ $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ..., \hat{\beta}_p$ ของการกระทำซ้ำ 500 ครั้ง

จำนวนครั้ง	$(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$	$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ..., \hat{\beta}_p$
1	$(y_{11}, y_{12}, ..., y_{1k})$	$\hat{\beta}_{1,0}, \hat{\beta}_{1,1}, ..., \hat{\beta}_{1,p}$
2	$(y_{21}, y_{22}, ..., y_{2k})$	$\hat{\beta}_{2,0}, \hat{\beta}_{2,1}, ..., \hat{\beta}_{2,p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
500	$(y_{500,1}, y_{500,2}, ..., y_{500,k})$	$\hat{\beta}_{500,0}, \hat{\beta}_{500,1}, ..., \hat{\beta}_{500,p}$

ขั้นที่ 3 คำนวณหาค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของ $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, ..., \hat{\beta}_p$ จากการกระทำซ้ำ 500 ครั้ง ด้วยสมการ (2.17) และ (2.18) ตามลำดับ ค่าที่ได้ดังกล่าวเป็นค่าประมาณพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล

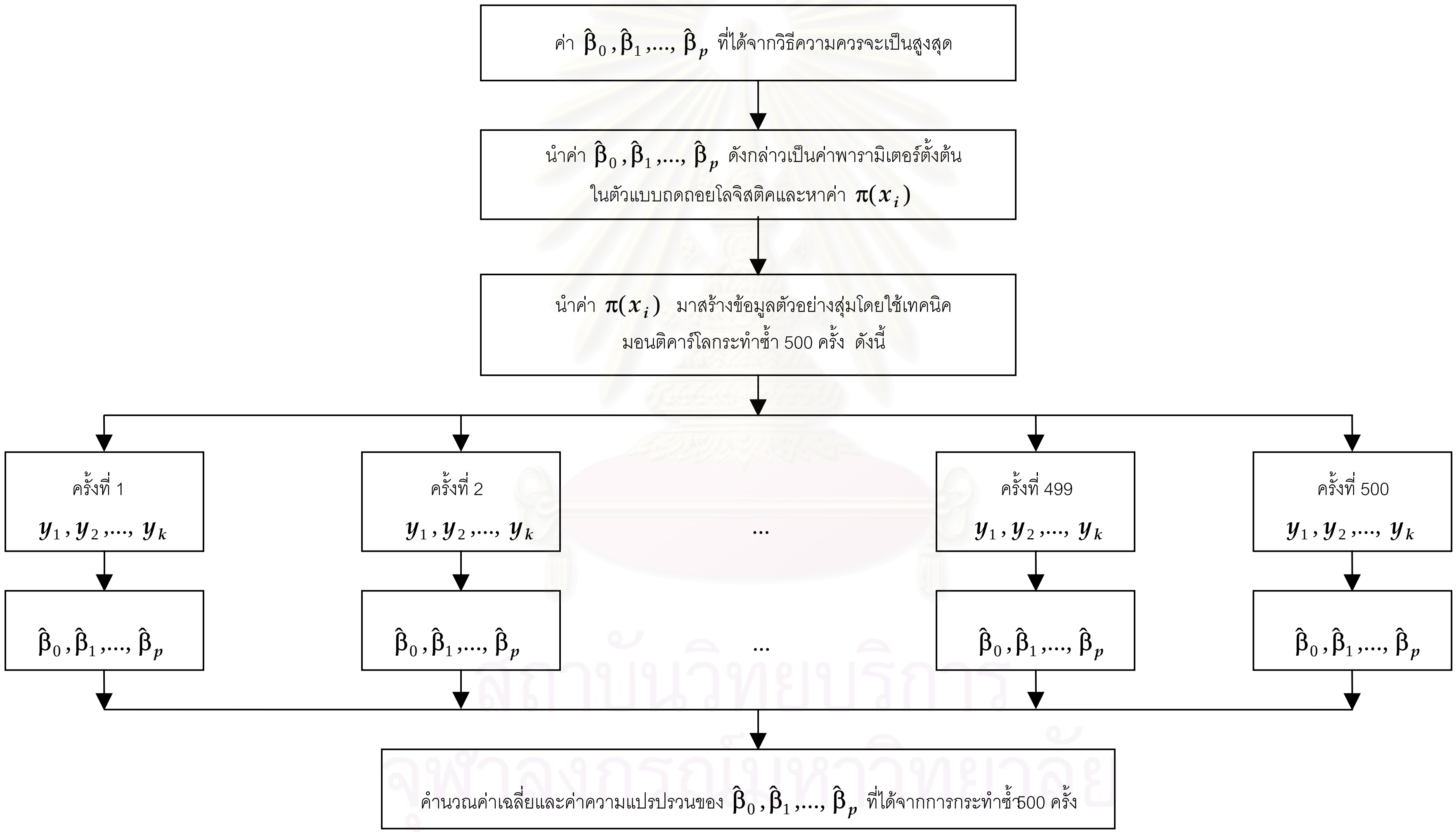
$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{500} \hat{\beta}_0}{500} \\ \vdots \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{500} \hat{\beta}_p}{500} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{bmatrix} \qquad \text{...(2.17)}$$

และ

$$\mathrm{COV}(\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_0) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \cdots & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_p) \\ \mathrm{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) & \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) & \cdots & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(\hat{\beta}_p, \hat{\beta}_0) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_p, \hat{\beta}_1) & \cdots & \mathrm{var}(\hat{\beta}_p) \end{bmatrix} \qquad \text{...(2.18)}$$

จากขั้นตอนดังกล่าวข้างต้นสามารถแสดงแผนผังขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โลได้ดังนี้

แผนผังขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล



2.5 ตัวสถิติ Deviace

ตัวสถิติ Deviance ใช้สำหรับตัวแบบถดถอยโลจิสติคมีบทบาทเหมือนผลรวมของค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Sum of Squares Error : SSE) และเกี่ยวข้องกับลอการีทึมธรรมชาติของฟังก์ชันควรจะเป็น

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{k} (\pi_i)^{y_i} (1-\pi_i)^{n_i - y_i}$$

$$l(\beta) = \ln L(\beta) = \sum_{i=1}^{k} \{ y_i \ln \pi_i + (n_i - y_i) \ln(1-\pi_i) \}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันรวบรวมข้อสนเทศของข้อมูลเกี่ยวกับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบไว้ เรียกค่าฟังก์ชันควรจะเป็นที่แทนค่าพารามิเตอร์ด้วยตัวประมาณ $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ ว่าฟังก์ชันควรจะเป็นสูงสุดภายใต้ตัวแบบลดรูป เขียนแทนด้วย L_r ค่านี้ไม่เป็นอิสระจากจำนวนค่าสังเกตของข้อมูล จำเป็นต้องนำมาเปรียบเทียบกับ ฟังก์ชันควรจะเป็นสูงสุดของตัวแบบของค่าสังเกตทั้งหมด ซึ่งเรียกว่า ตัวแบบเต็มรูป เขียนแทนด้วย L_f

ในการเปรียบเทียบ L_r กับ L_f เพื่อความเหมาะสมและเป็นไปได้ทางคณิตศาสตร์ ได้นิยามความแตกต่างเป็น Deviance คือ

$$D = -2\ln\left(\frac{\hat{L}_r}{\hat{L}_f}\right)$$

$$= -2\,(\ln \hat{L}_r - \ln \hat{L}_f)$$

$$= -2\left\{\left[\sum_{i=1}^{k} y_i \ln \hat{\pi}(x_i) + \sum_{i=1}^{k} (n_i - y_i)\ln(1-\hat{\pi}(x_i))\right] - \left[\sum_{i=1}^{k} y_i \ln\left(\frac{y_i}{n_i}\right) + \sum_{i=1}^{k}(n_i - y_i)\ln\left(1-\frac{y_i}{n_i}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\left\{\sum_{i=1}^{k} y_i\left[\ln\left(\frac{y_i}{n_i}\right) - \ln\hat{\pi}(x_i)\right] + \sum_{i=1}^{k}(n_i - y_i)\left[\ln\left(\frac{n_i - y_i}{n_i}\right) - \ln(1-\hat{\pi}(x_i))\right]\right\}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{k} y_i \ln\left(\frac{y_i}{n_i\hat{\pi}(x_i)}\right) + 2\sum_{i=1}^{k}(n_i - y_i)\ln\left(\frac{n_i - y_i}{n_i - n_i\hat{\pi}(x_i)}\right)$$

เมื่อ $y_i = 0$ หรือ $y_i = n_i$ กำหนดให้ $0\ln 0 = 0$

D จะมีค่าใหญ่ ถ้า $\mathrm{L_r}$ มีค่าน้อยกว่า $\mathrm{L_f}$ นี่แสดงว่าตัวแบบลดรูปไม่เหมาะสม ในทางกลับกัน D จะมีค่าเล็ก ถ้า $\mathrm{L_r}$ ไม่ต่างจาก $\mathrm{L_f}$ ซึ่งเป็นการบอกว่าตัวแบบลดรูปเป็นตัวแบบที่ดี นั่นคือ ถ้า Deviance มีค่ามาก แสดงว่าตัวแบบไม่เหมาะสม

McCullagh และ Nelder (1983) กล่าวว่าตัวสถิติ Deviance เป็นตัวสถิติอัตราส่วนควรจะเป็น ผลจากการทดสอบอัตราส่วนควรจะเป็นพบว่า ตัวสถิติ Deviance มีการแจกแจงแบบอะซิมโตติคไคสแคว์ (Asymptotic Chi-square) ด้วยระดับความเป็นเสรี $k - p$

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและวิธีมอนติคาร์โล โดยศึกษากรณีที่ตัวแปรตาม y_i มีการแจกแจงแบบทวินามและกำหนดให้ตัวแปรอธิบายเป็นค่าคงที่ ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จะพิจารณาจากค่า AMSE และค่า Deviance ข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการจำลองสุ่มด้วยเทคนิคการจำลองแบบมอนติคาร์โล (Monte carlo simulation technique) สร้างสถานการณ์การจำลองโดยใช้โปรแกรม S – plus กับเครื่อง CP สำหรับแผนการทดลองและขั้นตอนในการวิจัยรวมทั้งรายละเอียดเกี่ยวกับการทำงานของโปรแกรมที่ใช้ในการวิจัยจะนำเสนอในลำดับต่อไปนี้

3.1 แผนการดำเนินการวิจัย

ในการดำเนินการวิจัยครั้งนี้กำหนดสถานการณ์ต่างๆ สำหรับศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคกับวิธีมอนติคาร์โล ดังนี้

3.1.1 จำนวนตัวแปรอธิบายที่ใช้ในการศึกษา คือ 1 3 และ 5 ตัว

3.1.2 ตัวแปรอธิบายแต่ละตัวเป็นค่าคงที่

3.1.3 ขนาดตัวอย่างที่ทำการศึกษา (k) คือ 30 90 และ 150

3.1.4 กำหนด $\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{1}$

3.1.5 ตัวแปรตาม y_i มีการแจกแจงแบบทวินามด้วยพารามิเตอร์ n_i และ $\pi(x_i)$ ซึ่งกำหนดดังนี้

3.1.5.1 กำหนด $n_i = n$ เท่ากับ 10 20 และ 30

3.1.5.2 $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+\ldots+\beta_p x_{pi}}}$; i = 1,2,..., k

3.1.6 กำหนดการกระทำซ้ำในแต่ละสถานการณ์เป็น 500 ครั้ง

3.1.7 สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีมอนติคาร์โล กระทำการสุ่มตัวอย่างซ้ำ 500 ครั้ง

3.2 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยมีดังนี้ คือ

3.2.1 สร้างข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

3.2.2 คำนวณหาค่าประมาณพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธี

3.2.2.1 ความควรจะเป็นสูงสุดและหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ผ่านเมทริกซ์ข้อสนเทศของฟิชเชอร์

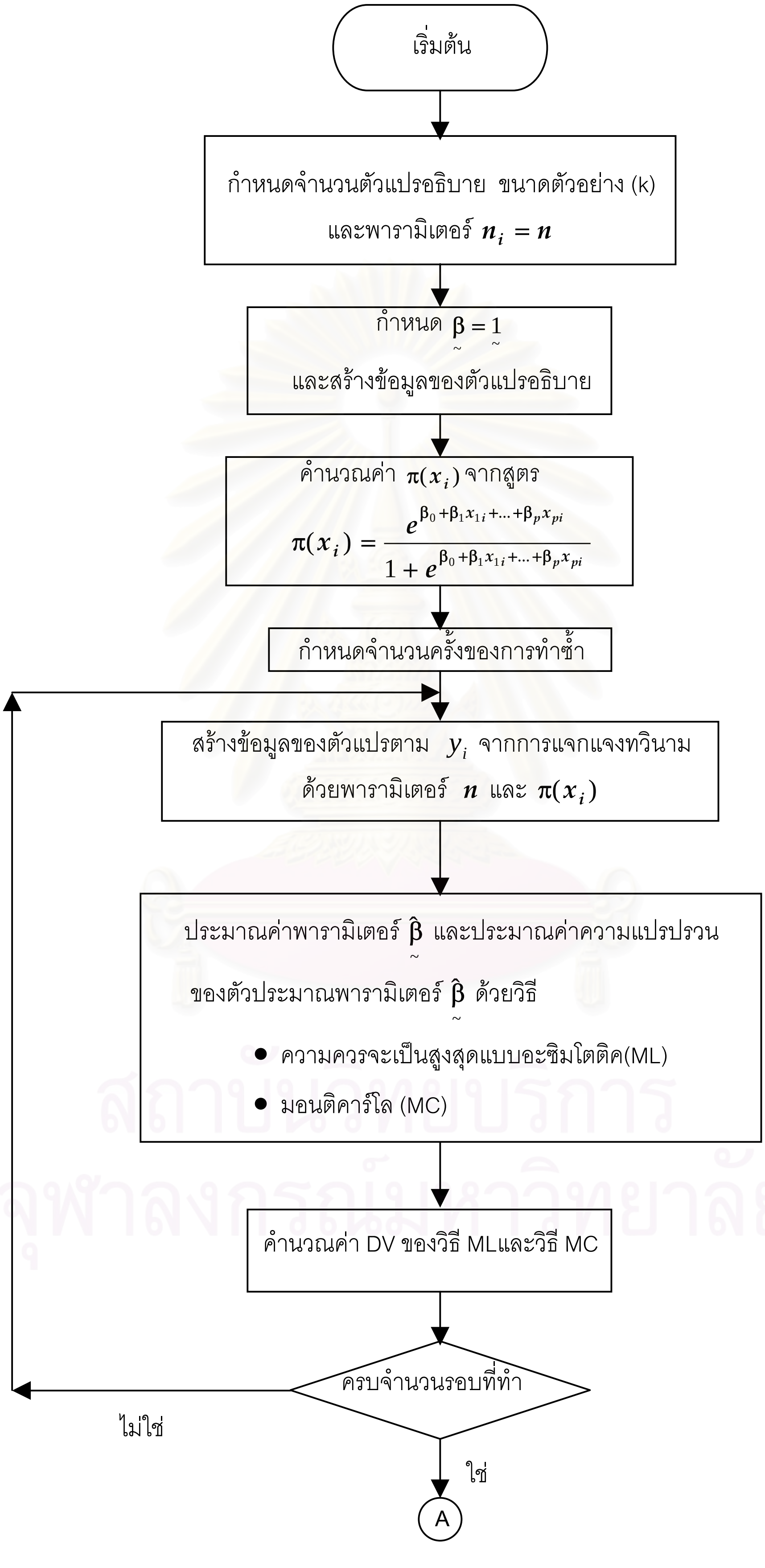
3.2.2.2 มอนติคาร์โล

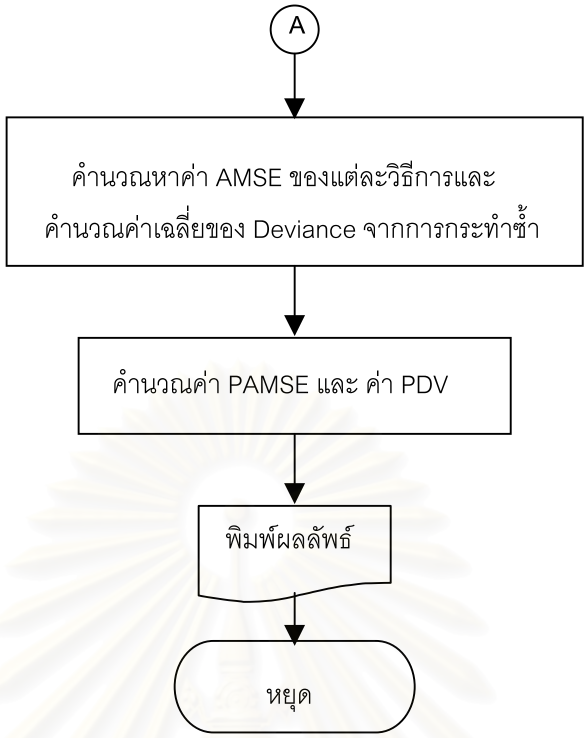
3.2.3 คำนวณค่า AMSE และค่า DV จากการกระทำซ้ำ

3.2.4 คำนวณค่า PAMSE และค่า PDV ของแต่ละวิธีการ

3.2.5 ทำการเปรียบเทียบและสรุปผลในรูปของตาราง

ผังงานแสดงขั้นตอนในการวิจัย




A
คำนวณหาค่า AMSE ของแต่ละวิธีการและ
คำนวณค่าเฉลี่ยของ Deviance จากการกระทำซ้ำ
คำนวณค่า PAMSE และ ค่า PDV
พิมพ์ผลลัพธ์
หยุด

<u>รายละเอียดของแต่ละขั้นตอนเป็นดังนี้</u>

3.2.1 สร้างข้อมูลที่ใช้ในการวิจัย

ในการสร้างข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยมีรายละเอียดและขั้นตอนตามลำดับดังนี้

3.2.1.1 สร้างตัวแปรอธิบาย X โดยกำหนดให้เป็นค่าคงที่ตามจำนวนตัวแปรอธิบายและขนาดตัวอย่างเหมือนที่กล่าวไว้ในแผนการดำเนินการวิจัยข้างต้น โดยใช้โปรแกรม S-plus ซึ่งใช้คำสั่ง Xmat<-indep(k,inde) เมื่อ k แทน ขนาดตัวอย่าง และ inde แทน จำนวนตัวแปรอธิบาย

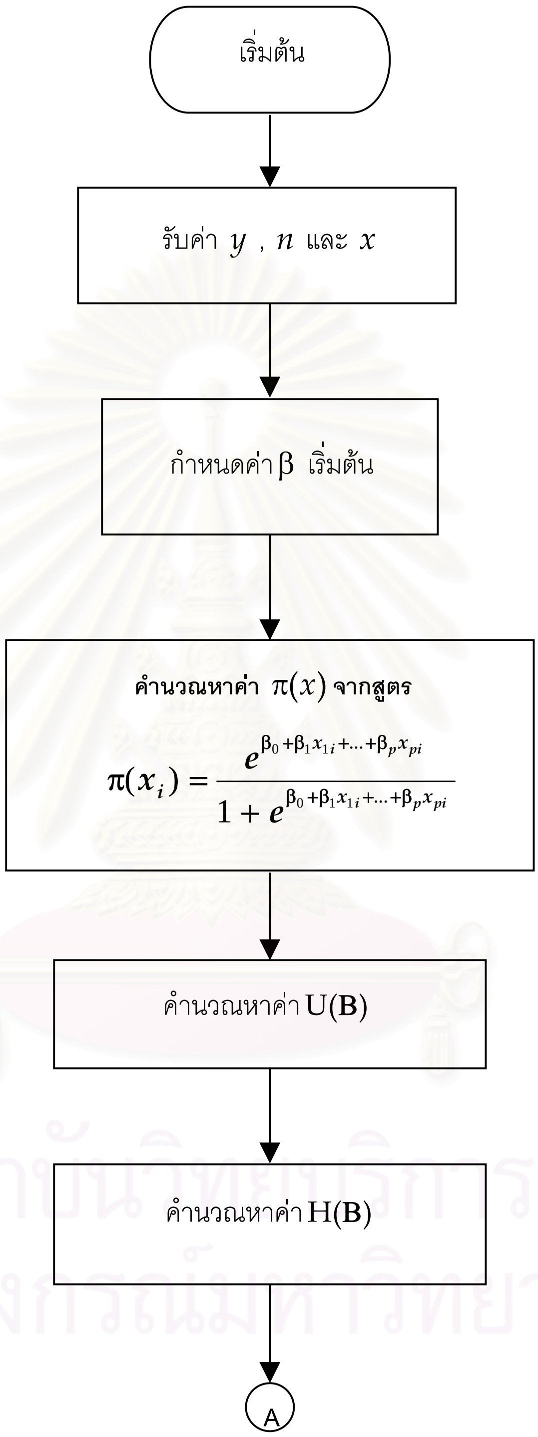
3.2.1.2 สร้างข้อมูลตัวแปรตาม y_i จากการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ n และ $\pi(x_i)$ เมื่อ $\pi(x_i)$ คำนวณจาก $\pi(x_i) = \dfrac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_{1i}+...+\beta_p x_{pi}}}$ โดยที่กำหนดให้ $\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{1}$ สำหรับโปรแกรม S-plus ใช้ฟังก์ชัน rbinom(k, n_i , π_i) เมื่อ k แทน ขนาดตัวอย่าง n_i แทน จำนวนของการทดลองและ π_i แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์สนใจ

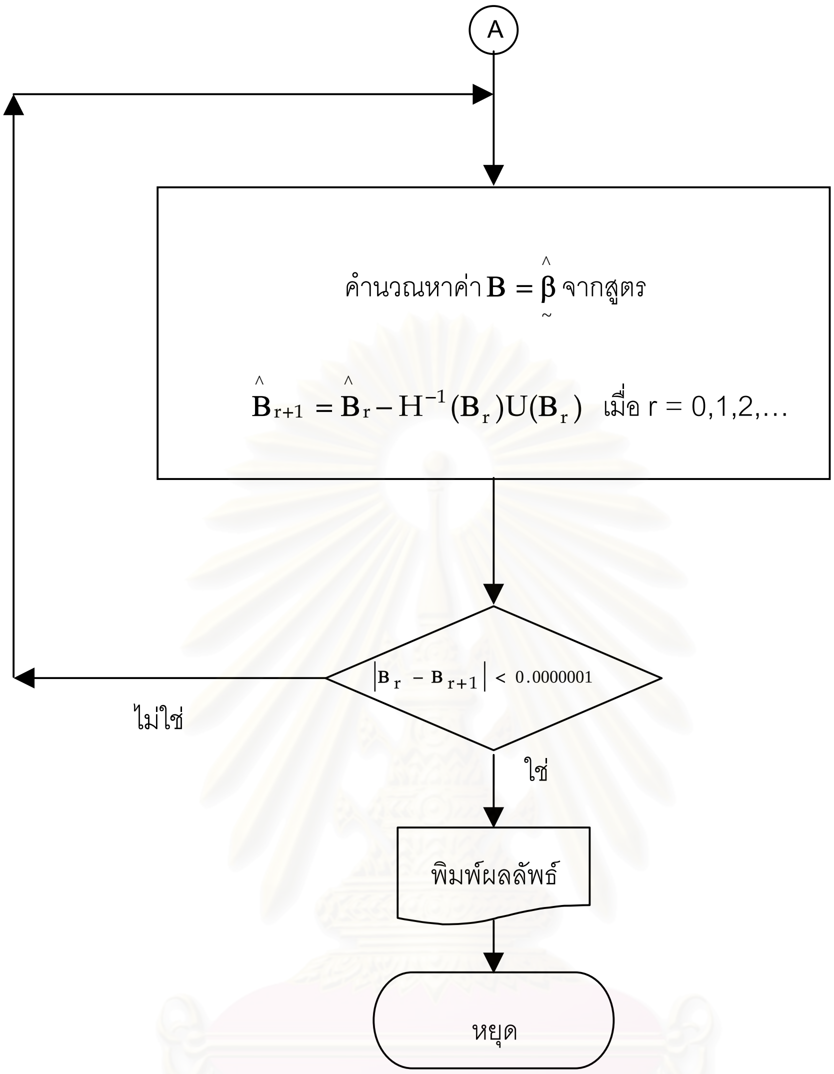
3.2.2 หาค่าประมาณพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์

การคำนวณหาค่าประมาณพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์มีขั้นตอนดังนี้

3.2.2.1 ประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด พิจารณาตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่มีค่าฟังก์ชันควรจะเป็นสูงที่สุด สำหรับงานวิจัยนี้จะใช้ Newton – raphson เริ่มจากการหา $\mathrm{U}(\mathbf{B})$ ด้วยการหาอนุพันธ์ย่อยของลอการิทึมของฟังก์ชันควรจะเป็น $l(\beta)$ เทียบกับ $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ และหา $\mathrm{H}(\mathbf{B})$ จากอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $l(\beta)$ แทนในสมการที่ (2.3) เพื่อทำซ้ำจนได้ค่า $\underset{\sim}{\hat{\beta}}$ มีค่าไม่ต่างกันมากเป็นที่ยอมรับ สำหรับโปรแกรม S – plus ใช้คำสั่ง $\mathrm{nr.logit}(x,y)$ เมื่อ x แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอธิบาย และ y แทน เวกเตอร์ของตัวแปรตาม ซึ่งขั้นตอนของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแสดงเป็นผังงานดังนี้

ผังงานแสดงขั้นตอนวิธี Newton – raphson




A
คำนวณหาค่า $B = \hat{\underset{\sim}{\beta}}$ จากสูตร
$\hat{B}_{r+1} = \hat{B}_r - H^{-1}(B_r)U(B_r)$ เมื่อ r = 0,1,2,…
$|B_r - B_{r+1}| < 0.0000001$
ไม่ใช่
ใช่
พิมพ์ผลลัพธ์
หยุด

และหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์โดยคำนวณค่าอินเวอร์สของเมทริกซ์ข้อสนเทศจากสูตร

$$\mathrm{COV}(\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = \mathrm{I}^{-1}(\underset{\sim}{\hat{\beta}})$$

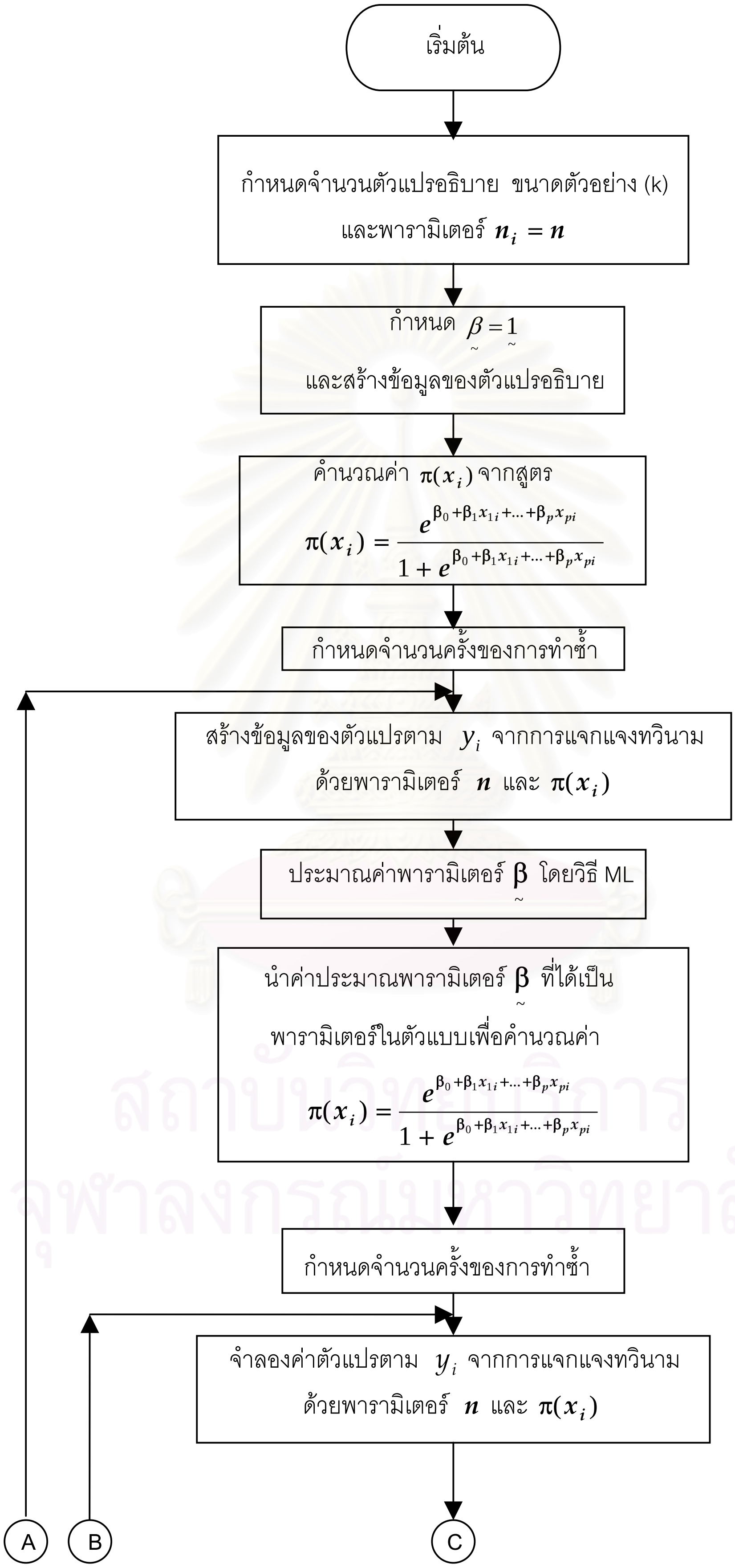
เมื่อ

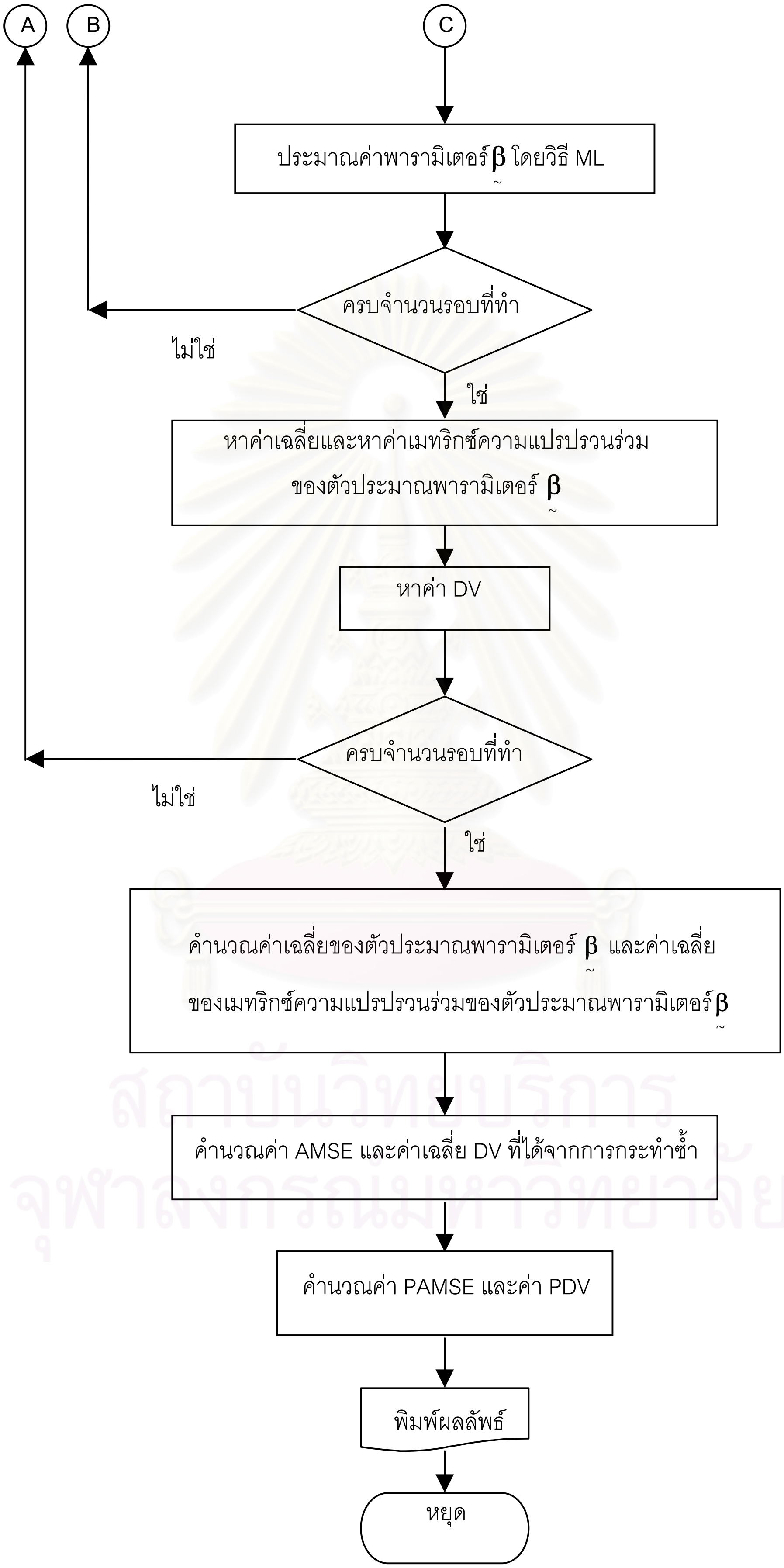
$$\underset{\sim}{\boldsymbol{I}(\beta)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} n_i \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{pi} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} x_{pi} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{pi} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} x_{pi} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \cdots & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{pi}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

3.2.2.2 **วิธีมอนติคาร์โล**

ขั้นตอนของวิธีมอนติคาร์โลสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ และประมาณค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ พิจารณาการสุ่มเป็นค่าพารามิเตอร์ตั้งต้นในตัวแบบถดถอยโลจิสติคและกระทำซ้ำเพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณในตัวแบบถดถอยโลจิสติค สำหรับโปรแกรม S – plus ใช้ฟังก์ชัน regre.logit(inde,k,n,pi,m1,m2) เมื่อ inde แทน จำนวนตัวแปรอธิบาย k แทน ขนาดตัวอย่าง n แทน จำนวนการทดลองของการแจกแจงทวินาม pi แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์สนใจ m1 แทน จำนวนของการกระทำซ้ำ และ m2 แทน จำนวนของการกระทำการสุ่มตัวอย่างซ้ำของวิธีมอนติคาร์โล ซึ่งขั้นตอนของวิธีมอนติคาร์โลแสดงเป็นผังงานได้ดังนี้

ผังงานแสดงขั้นตอนในวิธีมอนติคาร์โล




A
B
C
ประมาณค่าพารามิเตอร์ β โดยวิธี ML
ครบจำนวนรอบที่ทำ
ไม่ใช่
ใช่
หาค่าเฉลี่ยและหาค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม
ของตัวประมาณพารามิเตอร์ β
หาค่า DV
ครบจำนวนรอบที่ทำ
ไม่ใช่
ใช่
คำนวณค่าเฉลี่ยของตัวประมาณพารามิเตอร์ β และค่าเฉลี่ย
ของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวประมาณพารามิเตอร์ β
คำนวณค่า AMSE และค่าเฉลี่ย DV ที่ได้จากการกระทำซ้ำ
คำนวณค่า PAMSE และค่า PDV
พิมพ์ผลลัพธ์
หยุด

3.2.3 คำนวณหาค่า AMSE และค่า DV จากการกระทำซ้ำ

หลังจากได้ค่าประมาณพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคของแต่ละวิธีแล้ว คำนวณหาค่า AMSE และค่า DV จากการกระทำซ้ำ

3.2.4 คำนวณค่า PAMSE และค่า PDV ของแต่ละวิธีการ

คำนวณค่า PAMSE จากค่า AMSE ที่ได้จากแต่ละวิธีการและคำนวณค่า PDV จากค่า DV ที่ได้จากแต่ละวิธีการ

3.2.5 ทำการเปรียบเทียบและสรุปผลในรูปของตาราง

เมื่อได้ค่า AMSE ค่า PAMSE ค่า DV และค่า PDV ของแต่ละวิธีการแล้ว นำผลที่ได้มาสรุปลงในตารางเพื่อแสดงการเปรียบเทียบและศึกษาแนวโน้มของแต่ละวิธีการ

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วย

1) ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดและหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ผ่านข้อสนเทศของฟิชเชอร์ (ML)
2) ประมาณค่าพารามิเตอร์และหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล (MC)

โดยจะเปรียบเทียบเพื่อตัดสินว่าวิธีการใดเป็นวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดโดยใช้เกณฑ์การตัดสินใจ คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (AMSE) และค่า Deviance (DV) ประกอบการตัดสินใจ

เพื่อความสะดวกในการอธิบาย จะใช้สัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

AMSE	แทน	ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (average mean square of error : AMSE)
PAMSE	แทน	เปอร์เซ็นต์ของอัตราส่วนผลต่างค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง
DV	แทน	ค่าสถิติ Deviance
PDV	แทน	เปอร์เซ็นต์ของอัตราส่วนผลต่างค่า Deviance
ML	แทน	วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood method)
MC	แทน	วิธีมอนติคาร์โล (Monte carlo method)
k	แทน	ขนาดตัวอย่าง
$n_i = n$	แทน	จำนวนของการทดลองทั้งหมดของการแจกแจงทวินาม

การนำเสนอผลการวิจัยนี้ได้แบ่งออกเป็น 3 ตอน คือ

ตอนที่ 4.1 ผลการวิจัยการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธี ML และวิธี MC กรณีตัวแปรอธิบาย 1 ตัว แสดงดังตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.1 – 4.2 ตามลำดับ

ตอนที่ 4.2 ผลการวิจัยการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธี ML และวิธี MC กรณีตัวแปรอธิบาย 3 ตัว แสดงดังตารางที่ 4.2 และรูปที่ 4.3 – 4.4 ตามลำดับ

ตอนที่ 4.3 ผลการวิจัยการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธี ML และวิธี MC กรณีตัวแปรอธิบาย 5 ตัว แสดงดังตารางที่ 4.3 และรูปที่ 4.5 – 4.6 ตามลำดับ

ตอนที่ 4.1 ผลการวิจัยการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธี ML และวิธี MC กรณีตัวแปรอธิบาย 1 ตัว แสดงดังตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.1 – 4.2 ตามลำดับ

กรณีตัวแปรอธิบาย 1 ตัว ผู้เขียนสรุปผลจากตารางที่ 4.1 และรูปที่ 4.1 – 4.2 ได้ดังนี้

1) **พิจารณาด้วย AMSE** ผลการวิจัยมีดังนี้

k = 30 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

k = 90 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

k = 150 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

2) **<u>พิจารณาด้วย DV</u>** ผลการวิจัยมีดังนี้

<u>k = 30</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน ค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

<u>k = 90</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน ค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

<u>k = 150</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน และค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

สรุปโดยรวม การเพิ่มขนาดตัวอย่าง (k) มีผลทำให้ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าลดลง แต่การเพิ่มขนาดตัวอย่างมีผลทำให้ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าของวิธี MC ในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n ผลวิจัยสอดคล้องกับค่า DV ซึ่งค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าของวิธี MC ในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n

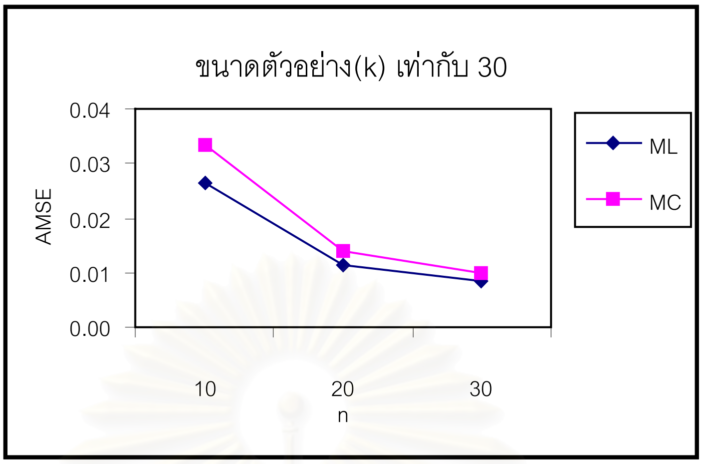
พิจารณา ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC พบว่า ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าต่างกันมากที่ n ขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC จะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ส่วนค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n สาเหตุที่ผลการวิจัยเป็นดังนี้เนื่องมาจากเกณฑ์ตัวสถิติ DV เป็นตัวสถิติทดสอบอัตราส่วนควรจะเป็น (Likelihood Ratio Test Statistics) ซึ่งรวมความผิดพลาดของการทดสอบสมมติฐานไว้ด้วยและตัวสถิติ DV มีค่าขึ้นกับข้อมูลตัวแปรตาม ดังนั้น ตัวสถิติ DV อาจเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคไม่ชัดเจนเท่าการใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อน

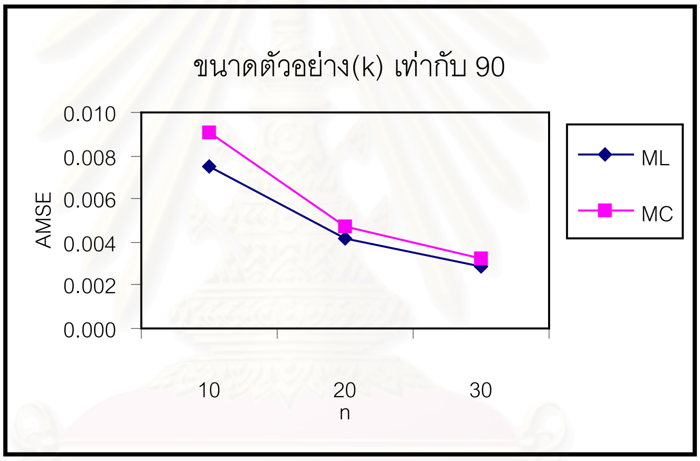
ยกกำลังสอง(AMSE) ซึ่งเป็นเกณฑ์การเปรียบเทียบที่วัดค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้เบี่ยงเบียน
จากค่าพารามิเตอร์จริงเท่าไร

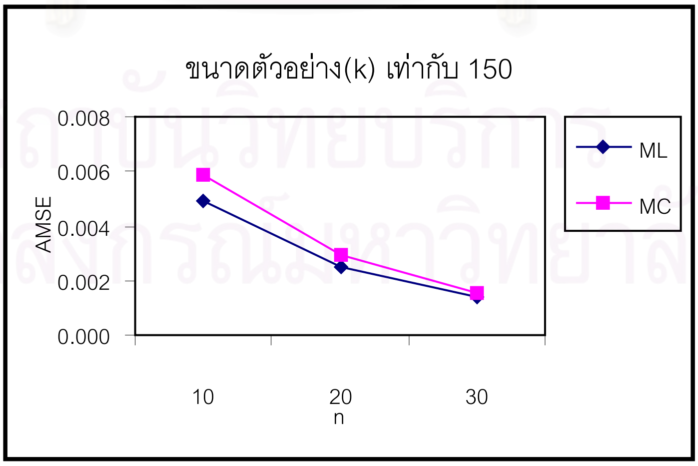
ตารางที่ 4.1 แสดงค่า AMSE ค่า PAMSE ค่า DV และค่า PDV ของวิธี ML และวิธี MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 1 ตัว

k	$n_i = n$	AMSE		PAMSE		DV		PDV	
		ML	MC	ML	MC	ML	MC	ML	MC
30	10	0.02648	0.03325	0	25.59628	31.75327	32.16051	0	1.28251
	20	0.01152	0.01406	0	21.96286	30.17467	30.60272	0	1.41857
	30	0.00855	0.00979	0	14.50047	28.48849	28.91335	0	1.49131
90	10	0.00752	0.00909	0	20.77102	96.89544	97.28622	0	0.40331
	20	0.00417	0.00476	0	14.21716	93.34985	93.74627	0	0.42466
	30	0.00285	0.00328	0	15.08409	90.91210	91.32524	0	0.45444
150	10	0.00488	0.00588	0	20.3728	163.52439	163.91095	0	0.23640
	20	0.00248	0.00295	0	18.7349	157.88023	158.28397	0	0.25573
	30	0.00139	0.00158	0	13.2638	154.62411	155.00515	0	0.24643

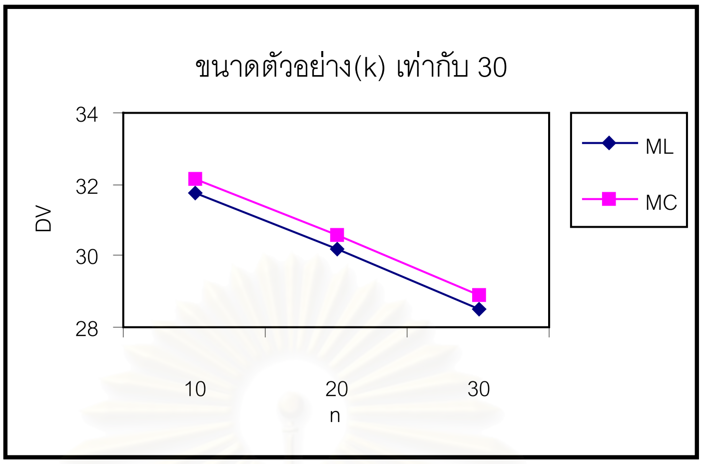
รูปที่ 4.1 แสดงค่า AMSE ของวิธี ML และ MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 1 ตัว

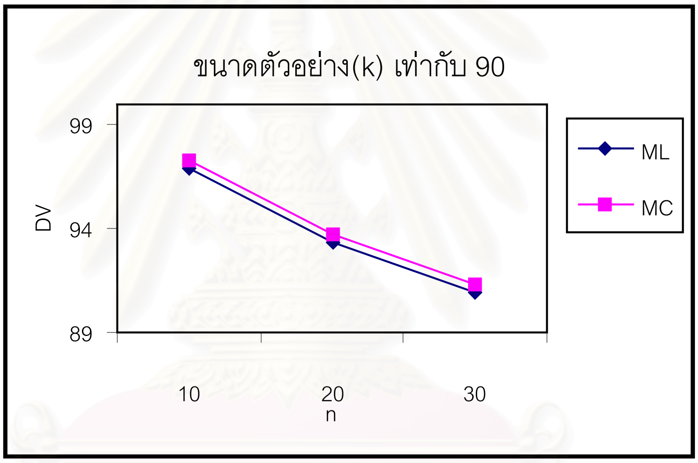


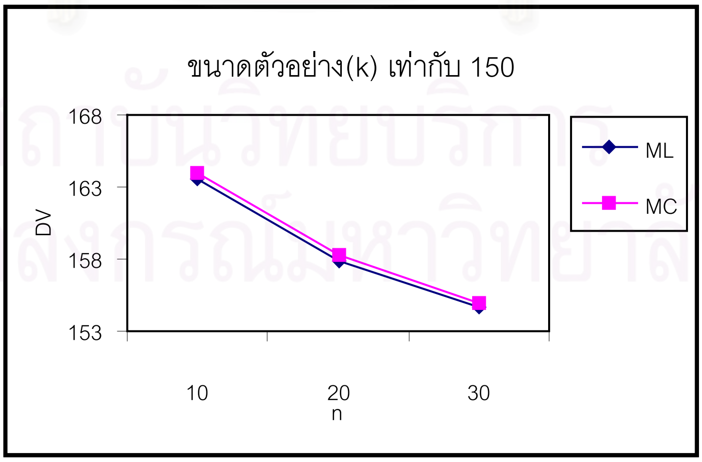




รูปที่ 4.2 แสดงค่า DV ของวิธี ML และ MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 1 ตัว







ตอนที่ 4.2 ผลการวิจัยการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธี ML และวิธี MC กรณีตัวแปรอธิบาย 3 ตัว แสดงดังตารางที่ 4.2 และรูปที่ 4.3 – 4.4 ตามลำดับ

กรณีตัวแปรอธิบาย 3 ตัว ผู้เขียนสรุปผลจากตารางที่ 4.2 และรูปที่ 4.3 – 4.4 ได้ดังนี้

1) **พิจารณาด้วย AMSE** ผลการวิจัยมีดังนี้

k = 30 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

k = 90 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

k = 150 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

3) **<u>พิจารณาด้วย DV</u>** ผลการวิจัยมีดังนี้

<u>k = 30</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน ค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

<u>k = 90</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน ค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

<u>k = 150</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน และค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

สรุปโดยรวม การเพิ่มขนาดตัวอย่าง (k) มีผลทำให้ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าลดลง แต่การเพิ่มขนาดตัวอย่างมีผลทำให้ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าของวิธี MC ในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n ผลวิจัยสอดคล้องกับค่า DV ซึ่งค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าของวิธี MC ในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n

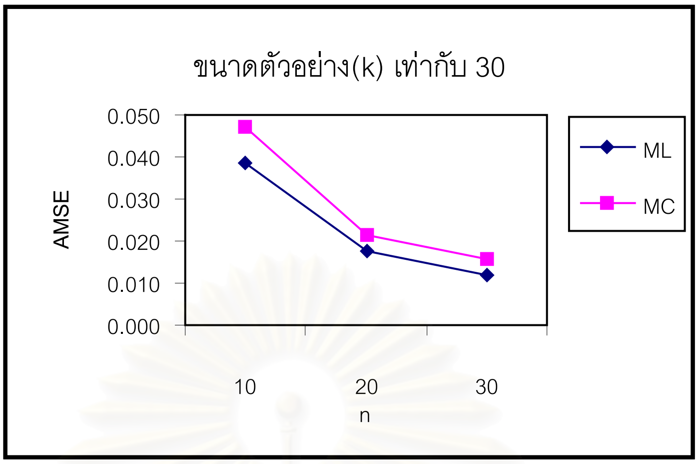
พิจารณา ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC พบว่า ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าต่างกันมากที่ n ขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC จะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ส่วนค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n สาเหตุที่ผลการวิจัยเป็นดังนี้เนื่องมาจากเกณฑ์ตัวสถิติ DV เป็นตัวสถิติทดสอบอัตราส่วนควรจะเป็น (Likelihood Ratio Test Statistics) ซึ่งรวมความผิดพลาดของการทดสอบสมมติฐานไว้ด้วยและตัวสถิติ DV มีค่าขึ้นกับข้อมูลตัวแปรตาม ดังนั้น ตัวสถิติ DV อาจเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคไม่ชัดเจนเท่าการใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อน

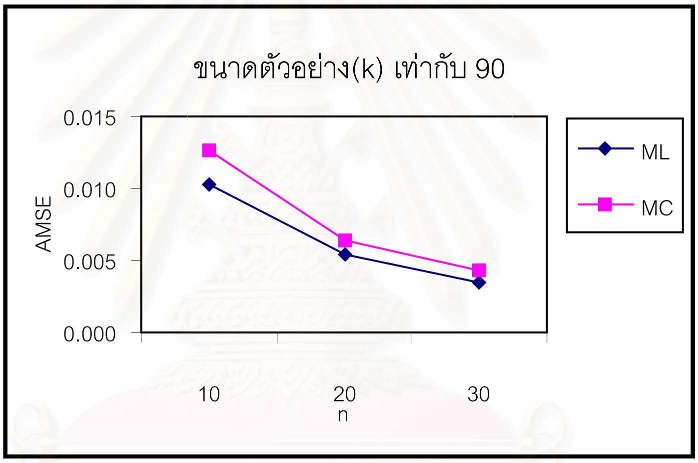
ยกกำลังสอง(AMSE) ซึ่งเป็นเกณฑ์การเปรียบเทียบที่วัดค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้เบี่ยงเบียน จากค่าพารามิเตอร์จริงเท่าไร

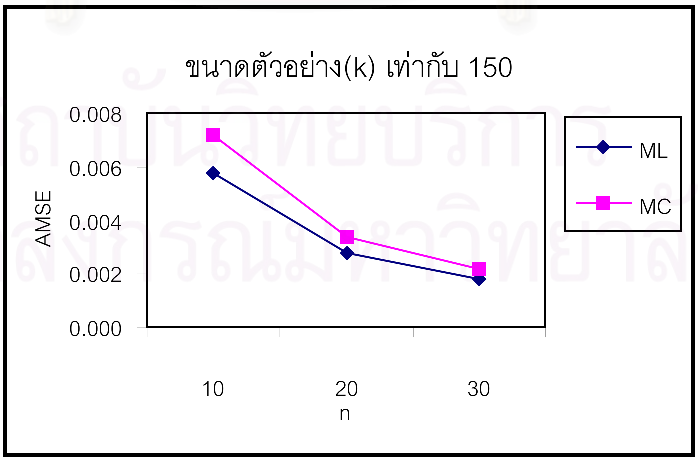
ตารางที่ 4.2 แสดงค่า AMSE ค่า PAMSE ค่า DV และค่า PDV ของวิธี ML และวิธี MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 3 ตัว

k	$n_i = n$	AMSE		PAMSE		DV		PDV	
		ML	MC	ML	MC	ML	MC	ML	MC
30	10	0.03869	0.04703	0	21.55048	27.31799	28.26970	0	3.27261
	20	0.01753	0.02161	0	23.28631	27.27001	28.09309	0	3.01825
	30	0.01187	0.01551	0	30.70638	26.87451	27.75400	0	3.48380
90	10	0.01024	0.01261	0	23.13169	92.63748	93.48423	0	0.91405
	20	0.00535	0.00633	0	18.32622	92.42112	93.23281	0	0.87825
	30	0.00346	0.00429	0	24.07601	90.66872	91.44634	0	0.85766
150	10	0.00574	0.00717	0	24.82578	158.99443	159.79291	0	0.50221
	20	0.00278	0.00339	0	21.65319	158.03783	158.87830	0	0.53182
	30	0.00176	0.00220	0	24.53901	151.26512	152.08891	0	0.54460

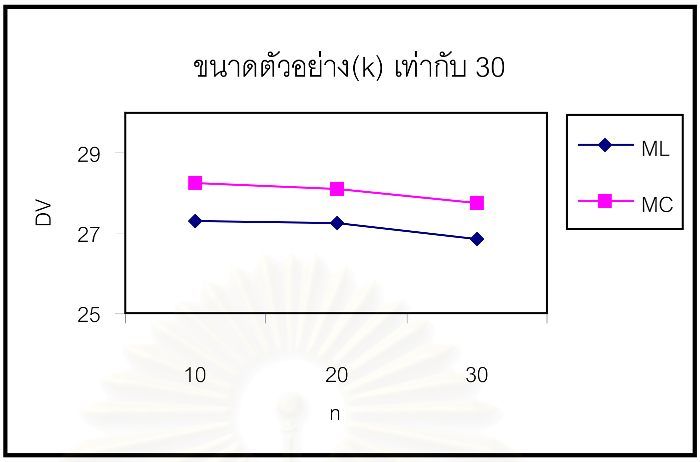
รูปที่ 4.3 แสดงค่า AMSE ของวิธี ML และ MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 3 ตัว

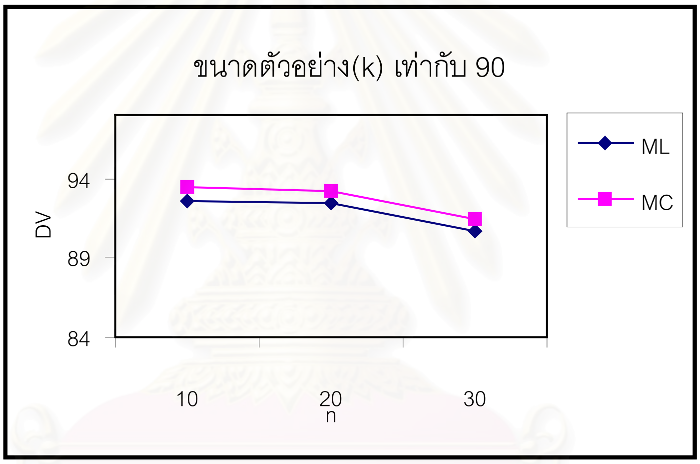


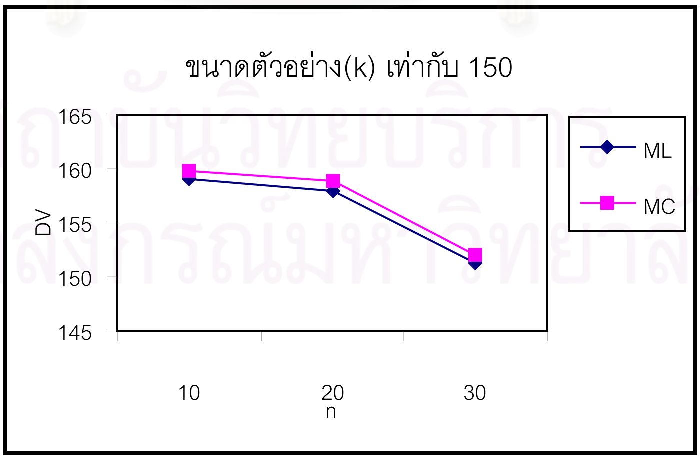




รูปที่ 4.4 แสดงค่า DV ของวิธี ML และ MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 3 ตัว







ตอนที่ 4.3 ผลการวิจัยการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธี ML และวิธี MC กรณีตัวแปรอธิบาย 5 ตัว แสดงดังตารางที่ 4.3 และรูปที่ 4.5 – 4.6 ตามลำดับ

กรณีตัวแปรอธิบาย 5 ตัว ผู้เขียนสรุปผลจากตารางที่ 4.3 และรูปที่ 4.5 – 4.6 ได้ดังนี้

1) **พิจารณาด้วย AMSE** ผลการวิจัยมีดังนี้

k = 30 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

k = 90 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

k = 150 ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า AMSE ของวิธี MC ในทุก n โดยที่ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าแตกต่างกันมากที่ n มีขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

4) **<u>พิจารณาด้วย DV</u>** ผลการวิจัยมีดังนี้

<u>k = 30</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน ค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

<u>k = 90</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน ค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

<u>k = 150</u> ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกัน และค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าค่า DV ของวิธี MC ในทุก n สรุปแนวโน้มของแต่ละวิธีการดังนี้

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี ML มีแนวโน้มลดลง

เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า DV ของวิธี MC มีแนวโน้มลดลง

สรุปโดยรวม การเพิ่มขนาดตัวอย่าง (k) มีผลทำให้ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าลดลง แต่การเพิ่มขนาดตัวอย่างมีผลทำให้ค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML ต่ำกว่าของวิธี MC ในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n ผลวิจัยสอดคล้องกับค่า DV ซึ่งค่า DV ของวิธี ML ต่ำกว่าของวิธี MC ในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n

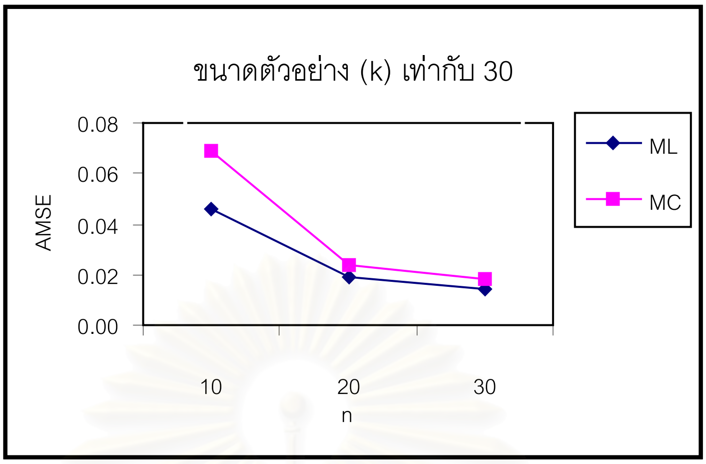
พิจารณา ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC พบว่า ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าต่างกันมากที่ n ขนาดเล็กและจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อ n มีขนาดเพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธี ML และของวิธี MC จะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ส่วนค่า DV ของวิธี ML และของวิธี MC มีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่างและทุก n สาเหตุที่ผลการวิจัยเป็นดังนี้เนื่องมาจากเกณฑ์ตัวสถิติ DV เป็นตัวสถิติทดสอบอัตราส่วนควรจะเป็น (Likelihood Ratio Test Statistics) ซึ่งรวมความผิดพลาดของการทดสอบสมมติฐานไว้ด้วยและตัวสถิติ DV มีค่าขึ้นกับข้อมูลตัวแปรตาม ดังนั้น ตัวสถิติ DV อาจเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคไม่ชัดเจนเท่าการใช้เกณฑ์ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อน

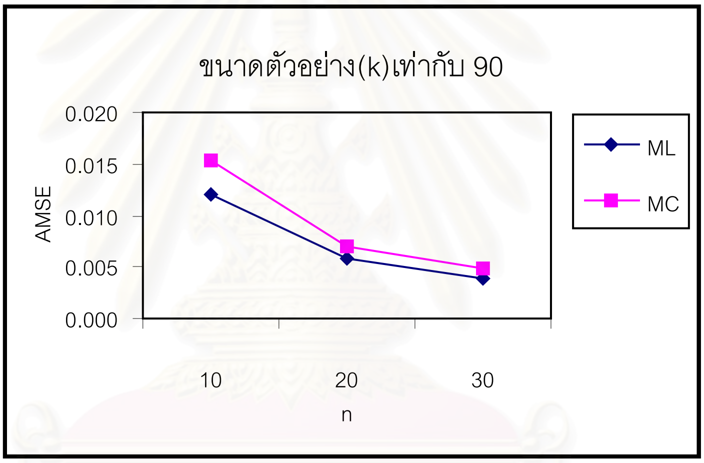
ยกกำลังสอง(AMSE) ซึ่งเป็นเกณฑ์การเปรียบเทียบที่วัดค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้เบี่ยงเบียน จากค่าพารามิเตอร์จริงเท่าไร

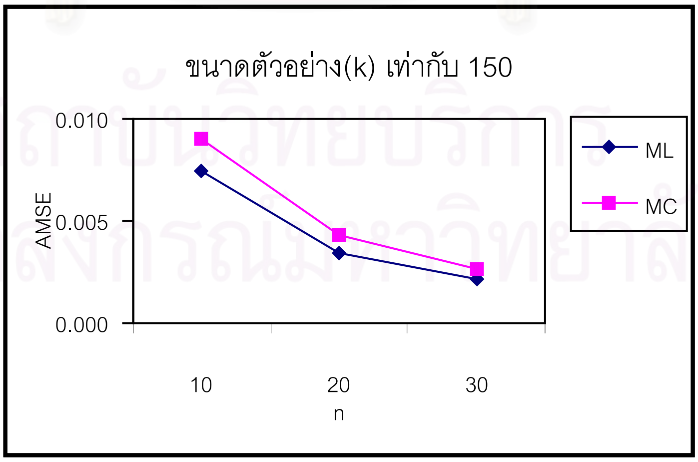
ตารางที่ 4.3 แสดงค่า AMSE ค่า PAMSE ค่า DV และค่า PDV ของวิธี ML และวิธี MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 5 ตัว

k	$n_i = n$	AMSE		PAMSE		DV		PDV	
		ML	MC	ML	MC	ML	MC	ML	MC
30	10	0.04600	0.06867	0	49.30608	26.35676	27.62106	0	4.79687
	20	0.01905	0.02409	0	26.42582	24.89215	26.19085	0	5.21731
	30	0.01411	0.01841	0	30.50928	24.75097	26.06688	0	5.31660
90	10	0.01197	0.01542	0	28.78028	87.64433	88.92835	0	1.46503
	20	0.00578	0.00697	0	20.71552	86.58903	87.77205	0	1.36625
	30	0.00386	0.00491	0	27.18237	86.28133	87.52204	0	1.43798
150	10	0.00748	0.00900	0	20.35674	153.15699	154.43924	0	0.83721
	20	0.00348	0.00427	0	22.75994	151.61664	152.84018	0	0.80700
	30	0.00217	0.00267	0	23.47960	150.73727	151.99404	0	0.83375

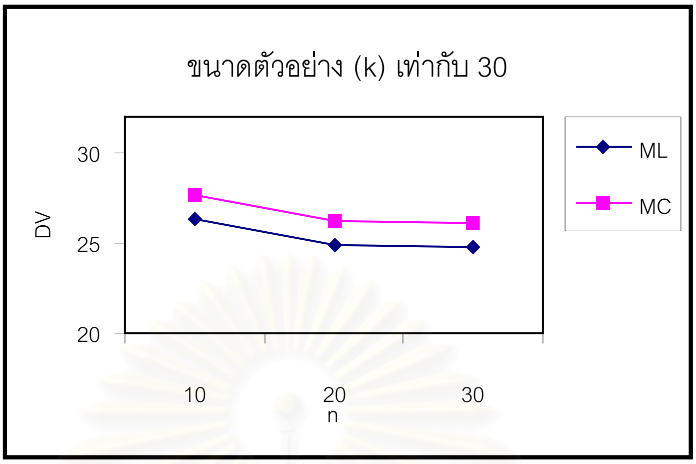
รูปที่ 4.5 แสดงค่า AMSE ของวิธี ML และ MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 5 ตัว

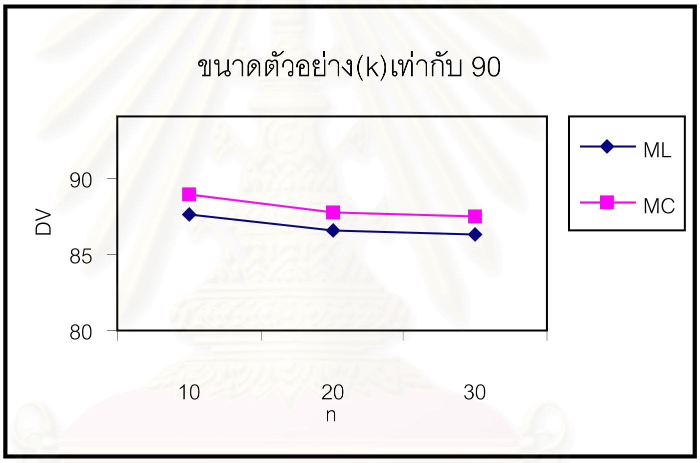


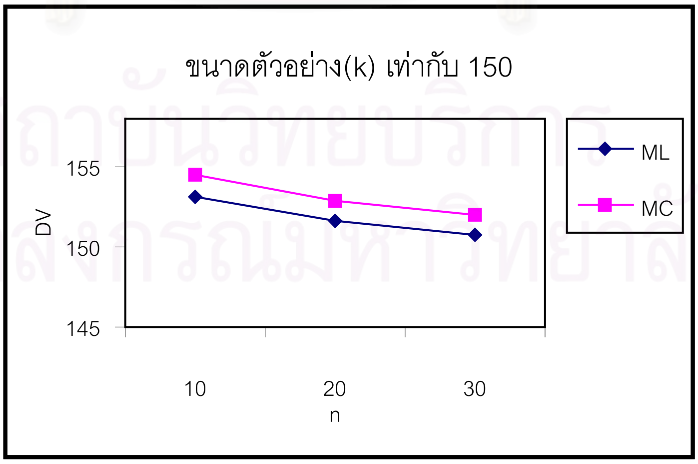




รูปที่ 4.6 แสดงค่า DV ของวิธี ML และ MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบาย เท่ากับ 5 ตัว







บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติค (ML) และวิธีมอนติคาร์โล (MC) โดยศึกษากรณีที่ตัวแปรตาม (y) มีการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ $n_i = n$ และ $\pi(x_i) \in (0,1)$ $;\mathrm{i} = 1,2,\ldots,\mathrm{k}$

งานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาในสถานการณ์ต่างๆที่กำหนด ดังนี้

- จำนวนตัวแปรอธิบายที่ใช้ในการศึกษา คือ 1 3 และ 5 ตัว
- ตัวแปรอธิบายแต่ละตัวเป็นค่าคงที่
- ขนาดตัวอย่างที่ทำการศึกษา(k) คือ 30 90 และ 150
- $n_i = n$ เท่ากับ 10 20 และ 30
- จำนวนรอบของการกระทำซ้ำในแต่ละสถานการณ์เป็น 500 ครั้ง
- การประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีมอนติคาร์โล กระทำการสุ่มตัวอย่างซ้ำ 500 ครั้ง

การสรุปผลว่าวิธีการใดเป็นวิธีการที่ดีที่สุด พิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (AMSE) และค่า Deviance (DV) ประกอบการตัดสินใจ โดยวิธีการที่ให้ค่า AMSE และค่า DV ต่ำสุดจะเป็นวิธีการที่ดีที่สุด ผลการวิจัยมีข้อสรุปดังนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

5.1.1 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (AMSE) ของแต่ละวิธีการ

จากผลการเปรียบเทียบค่า AMSE ของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค พบว่า ค่า AMSE ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคต่ำกว่าของวิธีมอนติคาร์โลในทุกสถานการณ์ ผลวิจัยสอดคล้องกับค่า Deviance ซึ่งค่า Deviance ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคต่ำกว่าของวิธีมอนติคาร์โลในทุกสถานการณ์ พิจารณา ค่า AMSE ของวิธีควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและ

ของวิธีมอนติคาร์โล พบว่า ค่า AMSE ของวิธีควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและของวิธีมอนติคาร์โลจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

5.1.2 ผลการวิจัยปัจจัยที่มีผลต่อค่า AMSE

5.1.2.1 ขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและของวิธีมอนติคาร์โลมีแนวโน้มลดลง

5.1.2.2 n เพิ่มขึ้น ค่า AMSE ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและของวิธีมอนติคาร์โลมีแนวโน้มลดลง

5.2 ข้อเสนอแนะ

5.2.1 การเลือกใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค ควรเลือกใช้วิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติค เพราะวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคเป็นวิธีการที่ดีกว่าวิธีมอนนติคาร์โลและทางปฏิบัติ วิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคสามารถคำนวณง่ายและรวดเร็วกว่าวิธีมอนติคาร์โล

5.2.2 เสนอค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนยกกำลังสอง (AMSE) เป็นเกณฑ์สำคัญในการตัดสินใจว่า วิธีการประมาณใดดีที่สุด โดยเหตุผลที่ว่า AMSE เป็นการวัดค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้เบี่ยงเบนไปจากค่าพารามิเตอร์จริงเท่าไรและค่า AMSE ไม่ขึ้นกับข้อมูลของตัวแปรตาม ซึ่งต่างกับตัวสถิติ Deviance มีค่าขึ้นกับข้อมูลตัวแปรตามและเป็นสถิติทดสอบอัตราส่วนควรจะเป็น ดังนั้น การใช้ตัวสถิติ Deviance เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์จึงให้ผลการเปรียบเทียบไม่ชัดเจนเท่ากับการใช้ค่า AMSE เป็นเกณฑ์การเปรียบเทียบ

5.2.3 การวิจัยครั้งนี้ได้ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค จากการวิจัยครั้งนี้ พบว่า วิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคเป็นวิธีการที่ดีกว่าวิธีมอนนติคาร์โลในทุกสถานการณ์ และวิธีการประมาณค่าทั้งสองจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้นและพารามิเตอร์ n เพิ่มขึ้น แต่ไม่สามารถระบุจุดตัดที่เหมาะสมของค่าขนาดตัวอย่างและพารามิเตอร์ n ที่ทำให้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันมากพอที่จะใช้แทนกันได้ ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากการกำหนดขอบเขตของการศึกษาไม่ชัดเจนพอ กล่าวคือ การกำหนดขนาดตัวอย่างของการศึกษาน้อยเกินไปและการกำหนดช่วงของค่าพารามิเตอร์ n ไม่ละเอียดพอ

5.2.4 เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบจุดพร้อมทั้งหาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคเท่านั้น ซึ่งเป็นที่น่าสนใจที่จะทำการศึกษาถึงวิธีการประมาณช่วงความเชื่อมั่นสำหรับตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค

5.2.5 ถ้าผู้สนใจศึกษาวิธีการประมาณค่าแบบใหม่เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติคกรณีที่ข้อมูลตัวแปรตามมีการแจกแจงแบบทวินาม น่าจะทำการศึกษาวิจัยเรื่องตัวประมาณแบบเบส์ (Bayesian Estimators) แสดงตัวอย่างการคำนวณโดย Edward J., Bedrick Ronald Christensen และ Wesly Johson (1997)

5.2.6 งานวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมในแต่ละสถานการณ์สำหรับตัวแบบถดถอยโลจิสติค ซึ่งจะช่วยให้การพยากรณ์มีความถูกต้องมากขึ้นและสามารถประยุกต์ใช้กับการศึกษาวิจัยหลายด้าน เช่น ด้านการแพทย์ ด้านการศึกษาและด้านการตลาด เป็นต้น

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

กาญจนา พานิชการ. การประมาณค่าพารามิเตอร์ในสมการถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและฟังก์ชันจำแนกประเภท. วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2539.

กัลยา วานิชบัญชา. การวิเคราะห์ตัวแปรหลายตัวด้วยเอสพีเอสเอสสำหรับวินโดว์ส. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2544.

ธีระพร วีระถาวร. การอนุมานเชิงสถิติชั้นกลาง : โครงสร้างและความหมาย. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2536.

ธีระพร วีระถาวร. ตัวแบบเชิงเส้น : ทฤษฎีและการประยุกต์. กรุงเทพมหานคร : บริษัทพิมพ์ดีด จำกัด, 2527.

ภาษาต่างประเทศ

Agresti, A. Categorical data analysis. New York : Wiley, 1990.

Chris, J. Lioyd. Binomial Regression Models : Statistical analysis of categorical data. New York : Wiley, 1999.

Cox, D.R. and Hinkley, D.V. Theoretical Statistics. London : Chapman and Hall, 1974.

De Bruijn, N.D. Asymptotic methods in analysis. 3rd ed. North – Holland :Amsterdam, 1970.

Douglas B. Clarkson and Robert J. Jennrich. Computing Extended Maximum Likelihood Estimates for Linear Parameter Models. Journal of the Royal statistical Society Ser. A. 53 (1991) : 417-426.

Edward J. Bedrick , Ronald Christensen , and Wesly Johnson. Statistical Practice : Bayesian Binomial Regresion : Predicting survival at a Trauma Center. The Amarican statistician 51 (1997) : 211-218.

Marvyn J. Silvapulle. On the Existence of Maximum Likelihood Estimators for the Binomial Response Models. Journal of the Royal statistical Society Ser.B 43 (1981) : 310-313.

Norman R. Draper,Harry Smith. Applied regression analysis : Generalized Linear Models (GLIM). 3rd ed. John Wiley and sons,1998.

Pranab K. Sen and Julio M. Singer. Large sample methods in statistics an introduction with applications. London : Chapman and Hall, 1993.

W.R. Gilks, S. Richardson and D. J. Spiegelhalter. Markov Chain Monte Carlo in practice. London :Chapman and Hall, 1996.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ตัวอย่างการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ในตัวแบบถดถอยโลจิสติค

พิจารณาข้อมูลการรักษาหายจากโรคมะเร็งของคนไข้จำนวนทั้งหมด 162 ราย เมื่อตัวแปรตาม y แทน จำนวนคนไข้ที่เข้ารับการรักษาและหายจากโรคมะเร็ง ตัวแปรอธิบาย x แทน ค่าวัดการทำงานของเซลล์หลังจากเข้ารับการรักษา ข้อมูลแสดงในตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 แสดงข้อมูลการหายจากโรคมะเร็งจำแนกตามค่าวัดการทำงานของเซลล์ (x)

x_i	n_i	y_i	$p_i = \frac{y_i}{n_i}$
8	5	1	0.11
10	12	1	0.12
12	7	1	0.15
14	15	3	0.2
16	10	3	0.32
18	8	3	0.43
20	13	7	0.54
22	20	13	0.65
24	12	9	0.72
26	18	14	0.80
28	11	9	0.86
32	23	20	0.88
34	5	4	0.89
38	3	3	0.89
รวม	162	93	0.57

หมายเหตุ x แทน ค่าวัดการทำงานของเซลล์เมื่อได้รับการรักษา

y แทน จำนวนของคนไข้ที่หายจากโรคมะเร็งเมื่อเข้ารับการรักษา

n_i แทน จำนวนของคนไข้ทีเข้ารับการรักษา

p_i แทน สัดส่วนของตัวอย่างคนไข้ที่หายจากโรคมะเร็ง

จากข้อมูลในตารางที่ 1 ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิโตติคและวิธีมอนติคาร์โล ได้ดังนี้

1. **การประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติค**

1.1 **การประมาณค่าพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$**

ข้อมูลจากตารางที่ 1 ข้อมูลประกอบด้วย y (จำนวนคนไข้ที่หายจากโรคมะเร็ง), x (ค่าวัดการทำงานของเซลล์ที่ได้รับการรักษา) k =14

สมการถดถอยโลจิสติค คือ $\text{logit}(\pi_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$

จะได้ $$\pi(x_i) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 x_i}}$$

ประมาณพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 จากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Newton-raphson ด้วยสมการ

$$\hat{B}_r = \hat{B}_{r+1} - H^{-1}(B_r)U(B_r)$$

คำนวณหา B_0 เพื่อใช้เริ่มต้นการทำซ้ำ โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 ด้วยวิธีกำลังสองน้อยสุดเชิงเส้น (linear least squares) เมื่อตัวแปรตาม คือ y^* ที่ได้จาก Empirical logits $y_i^* = \log\left(\frac{y_i + 0.5}{n_i - y_i + 0.5}\right)$

ตารางที่ 2 แสดงค่า Empirical logits ที่ได้จากการคำนวณ

i	y_i	$y_i^* = \log\left(\frac{y_i + 0.5}{n_i - y_i + 0.5}\right)$
1	1	-1.09861228866811
2	1	-2.03688192726104

ตารางที่ 2 (ต่อ) แสดงค่า Empirical logits ที่ได้จากการคำนวณ

i	y_i	$y_i^* = \log\left(\frac{y_i + 0.5}{n_i - y_i + 0.5}\right)$
3	1	-1.46633706879343
4	3	-1.27296567581289
5	3	0.762140052046897
6	3	-0.45198512374306
7	7	0.14310084364068
8	13	0.58778666490212
9	9	0.99852883011113
10	14	1.17007125265025
11	9	1.33500106673234
12	20	1.76766191764899
13	4	1.09861228668110
14	3	1.94591014905531

จากตารางที่ 2 คำนวณค่า $\mathbf{B}_0$ เริ่มต้น คือ

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.7330304784 \\ 0.1331793959 \end{bmatrix}$$

และ $z_i = -2.7330304784 + 0.1331793959 \quad x_i$

โดยให้ $\mathrm{U}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} \left(y_i - n_i \pi(x_i)\right) \\ \sum_{i=1}^{k} x_{1i} \left(y_i - n_i \pi(x_i)\right) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 4.1031078515 \\ 153.7368011017 \end{bmatrix}$$

และ $$H(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{k} n_i \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & -\sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32.5946542220 & 698.4274633719 \\ 698.4274633719 & 16454.5319898831 \end{bmatrix}$$

คำนวณได้ $$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -3.5543826683 \\ 0.1773855592 \end{bmatrix}$$

นำค่าไปคำนวณซ้ำได้ค่า $\mathbf{B}_r$ สำหรับรอบต่างๆดังนี้

รอบที่ 2 : $$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -3.7094889757 \\ 0.1856322141 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 3 : $$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} -3.7142805423 \\ 0.1858849542 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 4 : $$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} -3.7142848835 \\ 0.1858851818 \end{bmatrix}$$

รอบที่ 5 : $$\mathbf{B}_5 = \begin{bmatrix} -3.7142848835 \\ 0.1858851818 \end{bmatrix}$$

และเนื่องจาก $|\mathbf{B}_4 - \mathbf{B}_5| < 0.0000001$ ดังนั้นตัวแบบถดถอยโลจิสติค คือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = -3.7142848835 + 0.1858851818 \; x_i$$

และได้ว่า $$\pi(x_i) = \frac{e^{-3.7142848835 + 0.1858851818 \; x_i}}{1 + e^{-3.7142848835 + 0.1858851818 \; x_i}}$$

1.2 การประมาณค่าความแปรปรวนของ $\underset{\sim}{\beta}$

หาค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ $\underset{\sim}{\beta}$ จากเมทริกซ์ผกผันของข้อสนเทศของฟิชเชอร์จากสมการที่ 2.13 จึงได้ว่า

$$COV(\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = I^{-1}(\hat{\underset{\sim}{\beta}})$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} n_i \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i} \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) & \sum_{i=1}^{k} n_i x_{1i}^2 \pi(x_i)(1-\pi(x_i)) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 27.9269424355 & 585.1625022595 \\ 585.1625022595 & 13321.2285195849 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4499498725 & -0.0197649783 \\ -0.0197649783 & 0.0009432856 \end{bmatrix}$$

2. การประมาณค่าพารามิเตอร์และค่าความแปรปรวนของตัวประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีมอนติคาร์โล

จากข้อมูลตารางที่ 1 แสดงการคำนวณค่า $\underset{\sim}{\beta}$ และค่าความแปรปรวนของ $\underset{\sim}{\beta}$ ด้วยวิธีมอนติคาร์โล ดังนี้

นำค่าประมาณพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุดในส่วนแรกเป็นค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติค นั่นคือ

$$\text{logit}(\pi(x_i)) = -3.7142848835 + 0.1858851818 \quad x_i$$

และได้ว่า $$\pi(x_i) = \frac{e^{-3.7142848835 + 0.1858851818 \quad x_i}}{1 + e^{-3.7142848835 + 0.1858851818 \quad x_i}}$$

สำหรับค่า $\pi(x_i)$ ที่แต่ละ x_i ได้แสดงไว้ในตารางที่ 3 จากนั้นทำการจำลองสุ่มเซตข้อมูลของ $(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, ..., \mathrm{Y}_k)$ จากการแจกแจงทวินามด้วยพารามิเตอร์ n_i และค่า $\pi(x_i)$ ของตารางที่ 3 และประมาณค่าพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 จากกระทำซ้ำแต่ละครั้ง ผลแสดงในตารางที่ 4

ตารางที่ 3 แสดงค่า $\pi(x_i)$ ที่ได้จากการคำนวณ

i	x_i	$\pi(x_i) = \dfrac{e^{-3.7142848835 \quad +0.1858851818 \quad 9x_i}}{1 + e^{-3.7142848835 \quad +0.1858851818 \quad 9x_i}}$
1	8	0.097334071649600
2	10	0.135236254050751
3	12	0.184874827278853
4	14	0.247518266786813
5	16	0.322977472145615
6	18	0.408939908045990
7	20	0.500854687751308
8	22	0.592712254709826
9	24	0.678515824886942
10	26	0.753753038722670
11	28	0.816153339419162
12	32	0.903265021113507
13	34	0.931234649929710
14	38	0.966083610772745

ตารางที่ 4 แสดงเซตข้อมูล $(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$ และค่าประมาณพารามิเตอร์ β_0 และ β_1

จำนวนรอบ	$(Y_1, Y_2, ..., Y_k)$	$\underset{\sim}{\beta}$
1	(1,1,2,5,3,2,7,11,5,15,9,20,4,3)	β_0 = -3.29363259611935 β_1 = 0.161075659377071
2	(0,0,2,6,1,5,7,14,7,12,10,23,5,2)	β_0 = -4.01592876152192 β_1 = 0.205742927286057
3	(1,1,2,4,2,4,8,12,9,11,9,22,5,2)	β_0 = -3.4337131978641 β_1 = 0.1741564611258
⋮	⋮	⋮
500	(1,2,0,1,2,5,7,13,10,12,10,20,5,3)	β_0 = -4.22819655816261 β_1 = 0.21434283498190

คำนวณหาค่าเฉลี่ยของ β_0 และ β_1 ที่ได้จากการทำซ้ำ 500 ครั้ง ค่าที่ได้จากการคำนวณนี้เป็นค่าประมาณพารามิเตอร์ β_0 และ β_1 ด้วยวิธีมอนติคาร์โล

$$\underset{\sim}{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{i=1}^{500}\hat{\beta}_0}{500} \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{500}\hat{\beta}_1}{500} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.8193004048 \\ 0.1913210031 \end{bmatrix}$$

และคำนวณหาความเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\hat{\beta}_0$ และ $\hat{\beta}_1$ ที่ได้จากการทำซ้ำ500 ครั้ง ค่าจากการคำนวณเป็นค่าความแปรปรวนและค่าความแปรปรวนร่วมของ $\hat{\beta}_0$ และ $\hat{\beta}_1$ ด้วยวิธีมอนติคาร์โล

$$\mathrm{COV}(\underset{\sim}{\hat{\beta}}) = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_0) & \mathrm{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ \mathrm{cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0) & \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4754293268 & -0.0209862283 \\ -0.0209862283 & 0.0010134700 \end{bmatrix}$$

ภาคผนวก ข

ตารางที่ 1 แสดงค่า AMSE และค่า DV ของวิธี ML และวิธี MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบายเท่ากับ 1 ตัว และกำหนด $\underset{\sim}{\beta} = -\underset{\sim}{0}.5$

k	$n_i = n$	AMSE		DV	
		ML	MC	ML	MC
30	10	0.02648	0.03325	31.75327	32.16051
	20	0.01152	0.01406	30.17468	30.60273
	30	0.00855	0.00978	28.48848	28.91334

ตารางที่ 2 แสดงค่า AMSE และค่า DV ของวิธี ML และวิธี MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบายเท่ากับ 1 ตัว และกำหนด $\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{0}.5$

k	$n_i = n$	AMSE		DV	
		ML	MC	ML	MC
30	10	0.02648	0.03325	31.75326	32.16051
	20	0.01151	0.01406	30.17468	30.60272
	30	0.00854	0.00979	28.48849	28.91335

ตารางที่ 3 แสดงค่า AMSE และค่า DV ของวิธี ML และวิธี MC เมื่อจำนวนตัวแปรอธิบายเท่ากับ 1 ตัว และกำหนด $\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{5}$

k	$n_i = n$	AMSE		DV	
		ML	MC	ML	MC
30	10	0.02647	0.03324	31.75327	32.16051
	20	0.01152	0.01406	30.17466	30.60271
	30	0.00854	0.00979	28.48847	28.91335

ภาคผนวก ค

ตารางแสดงลักษณะการทำงานของฟังก์ชันในโปรแกรม S-plus 2000 ทั้งหมดในการวิจัย

ลำดับที่	ชื่อฟังก์ชัน	การทำงานของฟังก์ชัน
1	unique(x)	ส่งคืนค่า x ที่เข้ามาโดยที่ไม่มีค่าซ้ำ
2	rnorm(x)	สร้างเลขสุ่มให้มีการแจกแจงปกติ
3	rbinom(k, n_i , π_i)	สร้างเลขสุ่มให้มีการแจกแจงทวินาม เมื่อ k แทน ขนาดตัวอย่าง n_i แทน จำนวนของการทดลอง และ π_i แทน ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่สนใจ
4	mean(x)	คำนวณหาค่าเฉลี่ยของข้อมูล
5	sqrt(x)	คำนวณหาค่ารากที่สองของข้อมูล
6	var(x)	คำนวณหาค่าความแปรปรวนของข้อมูล
7	length(x)	แสดงขนาดหรือจำนวนของข้อมูล
8	round(x,dig)	ทำการปัดเศษ โดยที่ x แทน ชุดข้อมูลที่ทำการปัดเศษและ dig แทน การกำหนดทศนิยมตามที่ต้องการ
9	matrix(nrow,ncol)	ทำการเก็บข้อมูลในรูปของเมทริกซ์ โดย nrow แทน จำนวนแถวที่ต้องการ และ ncol แทน จำนวนสดมภ์ที่ต้องการ
10	indep(k,inde)	สร้างข้อมูลของตัวแปรอธิบาย โดยที่ k แทน จำนวนขนาดตัวอย่าง และ inde แทน จำนวนตัวแปรอธิบาย
12	cbind(x)	เก็บค่าอยู่ในรูปแบบของสดมภ์

ตารางแสดงลักษณะการทำงานของฟังก์ชันในโปรแกรม S-plus 2000 ทั้งหมดในการวิจัย

ลำดับที่	ชื่อฟังก์ชัน	การทำงานของฟังก์ชัน
12	data.frame(x)	การเก็บค่าข้อมูลของตัวแปรอธิบาย โดยที่ 1 สดมภ์แทน 1 ตัวแปร
13	rbind(x)	เก็บค่าอยู่ในรูปแบบของแถว
14	matX(dataX,inde)	สร้างเมทริกซ์ตัวแปรอธิบายที่มีสดมภ์แรกเป็น 1 หมด โดย dataX แทน ค่าของตัวแปรอธิบายและ inde แทน จำนวนตัวแปรอธิบาย
15	pi1(beta0,beta1,…beat5,Xmat)	คำนวณค่า $\pi(x_i)$ ของวิธีมอนติคาร์โล โดยที่ beta0,beta1,…,beta5 แทน ค่าของ $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,...,\hat{\beta}_5$ ตามลำดับ และ Xmat แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอธิบาย
16	list()	สร้างหรือเก็บค่าของข้อมูลมีคุณสมบัติเป็นลิซท์
17	array(data,dim)	สร้างหรือเก็บค่าข้อมูลเป็นอเรย์ โดยที่ data แทน ข้อมูลที่รับมา และ dim แทน มิติและขนาดของข้อมูลตามต้องการ
18	deviance	คำนวณค่า Deviance
19	colMeans(x)	คำนวณค่าเฉลี่ยทางสดมภ์
20	cat(“/n”) ,cat(“/n/n”)	เว้น 1 บรรทัด และเว้น 2 บรรทัด ตามลำดับ

ตารางแสดงลักษณะการทำงานของฟังก์ชันในโปรแกรม S-plus 2000 ทั้งหมดในการวิจัย

ลำดับที่	ชื่อฟังก์ชัน	การทำงานของฟังก์ชัน
21	cat(paste("..."))	แสดงข้อความในเครื่องหมายคำพูด
22	nr.logit(x,y,n,maxits,eps,beta.start)	คำนวณค่าด้วยวิธี Newton – raphson โดยที่ x แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอธิบาย y แทน เวกเตอร์ของตัวแปรตาม n แทน ค่าของ ni maxits แทน จำนวณรอบมากสุดที่ยอมให้ค่าลู่เข้า ,eps แทน ค่าผลต่างที่ยอมรับได้ $\lvert \mathbf{B}_r - \mathbf{B}_{r+1} \rvert < \text{eps}$ และ beta.start แทน ค่าเริ่ม $\mathbf{B}_0$ ที่ใช้ในการประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธี Newton – raphson
23	lsfit(x,emp.logit,intercept=F)$coef	คำนวณค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธี Linear least squares โดยที่ x แทน เมทริกซ์ของตัวแปรอธิบายที่สดมภ์แรกเป็น 1 หมด และ emp.logit แทน ค่าตัวแปรตามที่ได้จาก empirical logits
24	logit.print	แสดงค่าที่คำนวณได้ในแต่ละวิธีตามลำดับและคำที่อธิบายไว้

โปรแกรมสำหรับการดำเนินการวิจัย

ตัวอย่างโปรแกรม S-plus 2000 สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบถดถอยโลจิสติคด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดแบบอะซิมโตติคและวิธีมอนติคาร์โล

```
/* ฟังก์ชันการสร้างตัวแปรอิสระ */

x1_function(k)
{     x_unique(k)
      x_rnorm(k)
      x_(x-mean(x))/sqrt(var(x))
      contr_matrix(nrow=k,ncol=1)
      contr[,1]_round(x,dig=8)
}

x2_function(k)
{     x_unique(k)
      x_rnorm(k)
      x_(x-mean(x))/sqrt(var(x))
      contr_matrix(nrow=k,ncol=1)
      contr[,1]_round(x,dig=8)
}

x3_function(k)
{     x_unique(k)
      x_rnorm(k)
      x_(x-mean(x))/sqrt(var(x))
      contr_matrix(nrow=k,ncol=1)
      contr[,1]_round(x,dig=8)
}
```

```
x4_function(k)
{     x_unique(k)
      x_rnorm(k)
      x_(x-mean(x))/sqrt(var(x))
      contr_matrix(nrow=k,ncol=1)
      contr[,1]_round(x,dig=8)
}

x5_function(k)
{     x_unique(k)
      x_rnorm(k)
      x_(x-mean(x))/sqrt(var(x))
      contr_matrix(nrow=k,ncol=1)
      contr[,1]_round(x,dig=8)
}
 indep_function(k,inde)
      {
       if(inde==1)data.frame(x.1=x1(k))else
            if(inde==3)data.frame(x.1=x1(k),x.2=x2(k),x.3=x3(k))else
                  if(inde==5)data.frame(x.1=x1(k),x.2=x2(k),x.3=x3(k),x.4=x4(k),x.5=x5(k))
                        else    stop("haven't model")
      }
```

/* ฟังก์ชันการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย ML และ MC */

```
logitRe_function(inde,k,n,m1,m2,dataX)
{matX_function(dataX,inde)
 { if(inde==1)
   {  x.1_cbind(dataX$x.1)
      Xmat_cbind(1,x.1)
           dimnames(Xmat)_list(NULL,c("int","x.1"))
   }else if(inde==3)
    { x.1_cbind(dataX$x.1)
        x.2_cbind(dataX$x.2)
        x.3_cbind(dataX$x.3)
        Xmat_cbind(1,x.1,x.2,x.3)
           dimnames(Xmat)_list(NULL,c("int","x.1","x.2","x.3"))
        }else if(inde==5)
                {  x.1_cbind(dataX$x.1)
                     x.2_cbind(dataX$x.2)
                     x.3_cbind(dataX$x.3)
                     x.4_cbind(dataX$x.4)
                     x.5_cbind(dataX$x.5)
                     Xmat_cbind(1,x.1,x.2,x.3,x.4,x.5)
                     dimnames(Xmat)_list(NULL,c("int","x.1","x.2","x.3","x.4","x.5"))
           }else  stop("missing value")
 Xmat
}

# compute pi-value of monte carlo method
pi1_function(beta0,beta1,beta2,beta3,beta4,beta5,Xmat)
  {if((beta2==0) && (beta3==0) && (beta4==0) && (beta5==0))
           {  XB_(beta0+(beta1*Xmat[,2]))
                pi1_(exp(XB)/(1+exp(XB)))
              }
       else if ((beta4==0) && (beta5==0))
                { XB_(beta0+(beta1*Xmat[,2])+(beta2*Xmat[,3])+(beta3*Xmat[,4]))
                  pi1_(exp(XB)/(1+exp(XB)))
```

```
                  }
              else if (beta5!=0)
                 {    XB_(beta0+(beta1*Xmat[,2])+(beta2*Xmat[,3])+(beta3*Xmat[,4])+(beta4*Xmat
    [,5])+(beta5*Xmat[,6]))
                      pi1_(exp(XB)/(1+exp(XB)))
                      } else  stop("missing value")

    pi1
  }

nr.logit_function(x,y,n,inde,beta.start,maxits=10,eps=0.0001){
 if(missing( beta.start) ){
       emp.logit_log((y+.5)/(n-y+.5))
       newbeta_lsfit(x,emp.logit,intercept=F)$coef
           }
 else{newbeta_beta.start}
 iter_0
 converged_F
 while( (!converged) & (iter<maxits) ){
  iter_iter+1
     beta_newbeta
     tmp_exp(x%*%beta)
     pi_tmp/(1+tmp)
     mu_n*pi
     w_as.vector(n*pi*(1-pi)) # this is a vector, not a matrix
     xtwx_t(w*x)%*%x
     xtwxinv_solve(xtwx)
     newbeta_beta + xtwxinv%*%t(x)%*%(y-mu)
     converged_all(abs(newbeta-beta)<eps)}
 cat("\n")
 tmp_exp(x%*%newbeta)
 pi_as.vector(tmp/(1+tmp))
 loglik_sum( y*log(pi) + (n-y)*log(1-pi) )
```

```
# compute deviance contributions and G2
deviance_y*log(y/(n*pi)) + (n-y)*log((n-y)/(n-n*pi))
 if(any(y==0))
   deviance[y==0]_n[y==0]*log(n[y==0]/(n[y==0]-n[y==0]*pi[y==0]))
 if(any(y==n))
   deviance[y==n]_n[y==n]*log(n[y==n]/(n[y==n]*pi[y==n]))
 G2_2*sum(deviance)
#compute RMSE
 sse_sum((y-n*pi)^2)
 mse_sse/(length(y)-inde-1)
 rmse_sqrt(mse)
 result_list(beta=newbeta, cov.beta=xtwxinv, iter=iter,converged=converged, loglik=loglik, G2=G2,
      fitted=pi ,rmse=rmse)
 result}

ni_rep(n,k)
beta.start_rep(1,(inde+1))
Xmat_matX(dataX,inde)

sum00_0
sum01_0
sum02_0
sum03_0
sum10_0
sum11_0
sum12_0
sum13_0
ssb0.ml_0
ssb1.ml_0
ssb2.ml_0
ssb3.ml_0
ssb4.ml_0
ssb5.ml_0
ssb0.mc_0
ssb1.mc_0
```

```
ssb2.mc_0
ssb3.mc_0
ssb4.mc_0
ssb5.mc_0

b.fix_as.vector(rep(1,(inde+1)))
e.xb_exp(Xmat%*%b.fix)
pi.1_e.xb/(1+e.xb)

b_array(0,dim=c((inde+1),1,m2))
DV.me_array(0,dim=c(m2,1))
for (i in 1:m1)
   {  y_rbinom(k,ni,pi.1)
          fit_nr.logit(Xmat,y,ni,inde)
          sum01_sum01+fit$beta
          sum00_sum00+fit$G2
          sum02_sum02+fit$cov.beta
          sum03_sum03+fit$rmse
          beta_array(fit$beta,dim=c((inde+1),1))
          dist.b_(beta-b.fix)
          if(inde==1)
          {     ssb0.ml_ssb0.ml+(dist.b[1,1])^2
                ssb1.ml_ssb1.ml+(dist.b[2,1])^2
                cat("ssb =  ",ssb0.ml,ssb1.ml)
                cat("\n")
          }
          if(inde==3)
          {     ssb0.ml_ssb0.ml+(dist.b[1,1])^2
                ssb1.ml_ssb1.ml+(dist.b[2,1])^2
                ssb2.ml_ssb2.ml+(dist.b[3,1])^2
                ssb3.ml_ssb3.ml+(dist.b[4,1])^2
                cat("ssb =  ",ssb0.ml,ssb1.ml,ssb2.ml,ssb3.ml)
                cat("\n")

          }
```

```
            if(inde==5)
            {     ssb0.ml_ssb0.ml+(dist.b[1,1])^2
                  ssb1.ml_ssb1.ml+(dist.b[2,1])^2
                  ssb2.ml_ssb2.ml+(dist.b[3,1])^2
                  ssb3.ml_ssb3.ml+(dist.b[4,1])^2
                  ssb4.ml_ssb4.ml+(dist.b[5,1])^2
                  ssb5.ml_ssb5.ml+(dist.b[6,1])^2
                  cat("ssb =  ",ssb0.ml,ssb1.ml,ssb2.ml,ssb3.ml,ssb4.ml,ssb5.ml)
                  cat("\n")

            }

            if (inde==1)
                  pi.2_pi1(beta[1,1],beta[2,1],0,0,0,0,Xmat)
            else
                  if (inde==3)
                        pi.2_pi1(beta[1,1],beta[2,1],beta[3,1],beta[4,1],0,0,Xmat)
                  else
                        if (inde==5)
                              pi.2_pi1(beta[1,1],beta[2,1],beta[3,1],beta[4,1],beta[5,1],beta[6,1],Xmat)
                        else stop("missing value")

for (j in 1:m2)
  {   cat( "    iter j:", j)
            y1_rbinom(k,ni,pi.2)
            fit1_nr.logit(Xmat,y1,ni,inde)
            a_array(fit1$beta,dim=c((inde+1),1))
            b[,,j]_array(a)
      }

if(inde==1)
{ Bhat.mat_cbind(int=b[1,1,],x.1=b[2,1,])
      } else if (inde==3)
       { Bhat.mat_cbind(int=b[1,1,],x.1=b[2,1,],x.2=b[3,1,],x.3=b[4,1,])
         }else if (inde==5)
```

```
     { Bhat.mat_cbind(int=b[1,1,],x.1=b[2,1,],x.2=b[3,1,],x.3=b[4,1,],x.4=b[5,1,],x.5=b[6,1,])
              }else stop("missing value")

Bhat.mean_colMeans(Bhat.mat)
aa_array(Bhat.mean,dim=c((inde+1),1))
dist.b1_(aa-b.fix)
 if(inde==1)
   {    ssb0.mc_ssb0.mc+(dist.b1[1,1])^2
        ssb1.mc_ssb1.mc+(dist.b1[2,1])^2
        cat("ssb.mc = ",ssb0.mc,ssb1.mc)
        cat("\n")
   }
   if(inde==3)
   {    ssb0.mc_ssb0.mc+(dist.b1[1,1])^2
        ssb1.mc_ssb1.mc+(dist.b1[2,1])^2
        ssb2.mc_ssb2.mc+(dist.b1[3,1])^2
        ssb3.mc_ssb3.mc+(dist.b1[4,1])^2
        cat("ssb.mc =  ",ssb0.mc,ssb1.mc,ssb2.mc,ssb3.mc)
        cat("\n")

   }
   if(inde==5)
   {    ssb0.mc_ssb0.mc+(dist.b1[1,1])^2
        ssb1.mc_ssb1.mc+(dist.b1[2,1])^2
        ssb2.mc_ssb2.mc+(dist.b1[3,1])^2
        ssb3.mc_ssb3.mc+(dist.b1[4,1])^2
        ssb4.mc_ssb4.mc+(dist.b1[5,1])^2
        ssb5.mc_ssb5.mc+(dist.b1[6,1])^2
        cat("ssb.mc =  ",ssb0.mc,ssb1.mc,ssb2.mc,ssb3.mc,ssb4.mc,ssb5.mc)
        cat("\n")
   }

sum11_sum11+Bhat.mean
Bhat.cova_var(Bhat.mat)
sum12_sum12 + Bhat.cova
```

```
 cat("\n")
 tmp1_exp(Xmat%*%Bhat.mean)
 pi.3_as.vector(tmp1/(1+tmp1))
 loglike_sum( y*log(pi.3) + (n-y)*log(1-pi.3) )
# compute deviance contributions and G2 of MC method
dev_y*log(y/(ni*pi.3)) + (ni-y)*log((ni-y)/(ni-ni*pi.3))
 if(any(y==0))
   dev[y==0]_ni[y==0]*log(ni[y==0]/(ni[y==0]-ni[y==0]*pi.3[y==0]))
 if(any(y==n))
   dev[y==ni]_ni[y==n]*log(ni[y==n]/(ni[y==ni]*pi.3[y==ni]))
 G2.mo_2*sum(dev)
#compute RMSE of MC method
 sse1_sum((y-n*pi.3)^2)
 mse1_sse1/(length(y)-inde-1)
 rmse.mo_sqrt(mse1)

sum10_sum10+G2.mo
sum13_sum13+rmse.mo
cat( "iter i:", i)
cat("\n")
}
beta.likeli_sum01/m1
beta.like_t(beta.likeli)
beta.mon_sum11/m1
cov.beta.like_sum02/m1
cov.beta.mon_sum12/m1
RMSE.like_sum03/m1
RMSE.MON_sum13/m1
RootMSE_cbind(RMSE.like,RMSE.MON)
dimnames(RootMSE)_list("RMSE =",c("likelihood","  Monte Carlo"))
DV.mean.likeli_sum00/m1
DV.mean.MON_sum10/m1
```

```
if(inde==1)
{     ms.b0.ml_ssb0.ml/m1
      ms.b1.ml_ssb1.ml/m1
      ms.b0.mc_ssb0.mc/m1
      ms.b1.mc_ssb1.mc/m1
      output_list(beta.like=beta.like,beta.mon=beta.mon,cov.like=cov.beta.like,cov.mon=cov.beta.mo
      n,RootMSE=RootMSE,DV.LI=DV.mean.likeli,DV.MO=DV.mean.MON,AMS.BO.ML=ms.b0.ml,AMS
      .B1.ML=ms.b1.ml,AMS.BO.MC=ms.b0.mc,AMS.B1.MC=ms.b1.mc)

}else if(inde==3)
{     ms.b0.ml_ssb0.ml/m1
      ms.b1.ml_ssb1.ml/m1
      ms.b2.ml_ssb2.ml/m1
      ms.b3.ml_ssb3.ml/m1
      ms.b0.mc_ssb0.mc/m1
      ms.b1.mc_ssb1.mc/m1
      ms.b2.mc_ssb2.mc/m1
      ms.b3.mc_ssb3.mc/m1
      output_list(beta.like=beta.like,beta.mon=beta.mon,cov.like=cov.beta.like,cov.mon=cov.beta.mo
      n,RootMSE=RootMSE,DV.LI=DV.mean.likeli,DV.MO=DV.mean.MON,AMS.BO.ML=ms.b0.ml,AMS
      .B1.ML=ms.b1.ml,AMS.B2.ML=ms.b2.ml,AMS.B3.ML=ms.b3.ml,AMS.BO.MC=ms.b0.mc,AMS.B
      1.MC=ms.b1.mc,AMS.B2.MC=ms.b2.mc,AMS.B3.MC=ms.b3.mc)

}else if(inde==5)
{     ms.b0.ml_ssb0.ml/m1
      ms.b1.ml_ssb1.ml/m1
      ms.b2.ml_ssb2.ml/m1
      ms.b3.ml_ssb3.ml/m1
      ms.b4.ml_ssb4.ml/m1
      ms.b5.ml_ssb5.ml/m1
      ms.b0.mc_ssb0.mc/m1
      ms.b1.mc_ssb1.mc/m1
      ms.b2.mc_ssb2.mc/m1
      ms.b3.mc_ssb3.mc/m1
      ms.b4.mc_ssb4.mc/m1
```

```
    ms.b5.mc_ssb5.mc/m1
    output_list(beta.like=beta.like,beta.mon=beta.mon,cov.like=cov.beta.like,cov.mon=cov.beta.mo
    n,RootMSE=RootMSE,DV.LI=DV.mean.likeli,DV.MO=DV.mean.MON,AMS.BO.ML=ms.b0.ml,AMS
    .B1.ML=ms.b1.ml,AMS.B2.ML=ms.b2.ml,AMS.B3.ML=ms.b3.ml,AMS.B4.ML=ms.b4.ml,AMS.B5.
    ML=ms.b5.ml,AMS.BO.MC=ms.b0.mc,AMS.B1.MC=ms.b1.mc,AMS.B2.MC=ms.b2.mc,AMS.B3.
    MC=ms.b3.mc,AMS.B4.MC=ms.b4.mc,AMS.B5.MC=ms.b5.mc)
}

output}
```

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวณัฏฐา บุรุษนารีรัตน์ เกิดเมื่อวันที่ 2 ธันวาคม 2520 ที่ จ. ตราด สำเร็จการศึกษาปริญญาตรีวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาสถิติ จากคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร เมื่อ พ.ศ.2543 เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ.2543