การประมาณแบบเบส์สำหรับเมตริกซ์สหสัมพันธ์เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน
และการแจกแจงเริ่มแรกเป็นแบบสม่ำเสมอ

นางสาวศิริลักษณ์ ชัยโชณิชย์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาสถิติศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ ภาควิชาสถิติ
คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2549

BAYES' ESTIMATION FOR A CORRELATION MATRIX WITH EQUAL LOSS DATA AND UNIFORM PRIOR

Miss Sirilak Chaichonich

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science Program in Statistics
Department of Statistics
Faculty of Commerce and Accountancy
Chulalongkorn University
Academic Year 2006

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประมาณแบบเบส์สำหรับเมตริกซ์สหสัมพันธ์เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันและการแจกแจงเริ่มแรกเป็นแบบสม่ำเสมอ
โดย	นางสาวศิริลักษณ์ ชัยโชณิชย์
สาขาวิชา	สถิติ
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์

คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิต

....คณบดีคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี
(รองศาสตราจารย์ ดร. ดนุชา คุณพนิชกิจ)

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา)

.... อาจารย์ที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์)

....กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ผกาวดี ศิริรังษี)

นางสาวศิริลักษณ์ ชัยโชณิชย์ : การประมาณแบบเบส์สำหรับเมตริกซ์สหสัมพันธ์เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันและการแจกแจงเริ่มแรกเป็นแบบสม่ำเสมอ (BAYES' ESTIMATION FOR A CORRELATION MATRIX WITH EQUAL LOSS DATA AND UNIFORM PRIOR) อาจารย์ที่ปรึกษา : อาจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์, จำนวน 87 หน้า

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยมีจุดประสงค์เพื่อแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติไม่เป็นลบแน่นอน (Positive Semi-Definite) ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ซึ่งตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ในงานวิจัยนี้ แบ่งออกเป็น 2 แบบตามการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรก (Prior Distribution) คือ การแจกแจงแบบสม่ำเสมอร่วม (Joint Uniform Distribution) และการแจกแจงแบบสม่ำเสมอส่วนริม (Marginal Uniform Distribution) โดยในแต่ละแบบจะอาศัยเทคนิคการจำลองจากวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล (Markov Chain Monte Carlo: MCMC) ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง (Metropolis-Hasting Algorithm: MH) ซึ่งจะแบ่งวิธีการจำลองออกเป็น 2 วิธี ตามประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลซอล (Proposal Distribution) คือ อินดิเพนเด็น เชน (Independence Chain) และ บอล วอล์ค (Ball Walk) โดยในงานวิจัยนี้จะศึกษาในกรณีที่ข้อมูลมี 3 มิติ และสมมติให้ข้อมูลมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}$ ขนาด 3×3 ที่มีคุณสมบัติไม่เป็นลบแน่นอนและสมมาตร เมื่อ $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$ โดยกำหนดให้เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง $(\mathbf{r})$ เป็น **0.0, 0.1, 0.5** และ **0.9** ตามลำดับ และกำหนดให้ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ (m) เป็น $3, 10, 30$ และ 100 ตามลำดับ

จากผลการวิจัย เมื่อใช้ระยะทางยูคลีเดียน (Euclidean Distance) เทียบกับเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ สามารถสรุปได้ว่า ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอร่วมจะประมาณค่าได้ดี เมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กันในระดับสูงๆ ส่วนค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อกำหนดให้การแจกแจงเริ่มแรกเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอส่วนริม นั้นจะประมาณค่าได้ดีเมื่อข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กันหรือมีความสัมพันธ์กันน้อยๆ

ส่วนการเปรียบเทียบความเร็วในการจำลองจากวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง เมื่อกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลต่างกันนั้น พบว่าการกำหนดประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบอินดิเพนเด็น เชน และกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติไม่เป็นลบแน่นอนจะจำลองได้เร็ว เมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มีจำนวนน้อยๆ (วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างจะกว้าง) ส่วนเมื่อกำหนดประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบบอล วอล์ค และกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในบอล จะจำลองได้เร็วเมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มีจำนวนมากๆ (วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างจะแคบ)

ภาควิชาสถิติ ลายมือชื่อนิสิต ศิริลักษณ์ ชัยโชณิชย์

สาขาวิชาสถิติ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา ......

ปีการศึกษา2549

4782395126 : MAJOR STATISTICS

KEY WORD: BAYES' ESTIMATION / CORRELATION MATRIX / EQUAL LOSS DATA / UNIFORM PRIOR

SIRILAK CHAICHONICH : BAYES' ESTIMATION FOR A CORRELATION MATRIX WITH EQUAL LOSS DATA AND UNIFORM PRIOR. THESIS ADVISOR : SEKSAN KIATSUPAIBUL, Ph.D., 87 pp.

This research studied Bayes' estimation for a correlation matrix with equal loss data. The main objective of this study was to handle lack of the positive semi-definite property of correlation matrices. The correlation matrices under this study were classified into two types according to their prior distribution, namely a joint uniform distribution and a marginal uniform distribution.The Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation with Metropolis-Hasting algorithm (MH) was used and was classified into two methods according to the types of proposal distribution, namely independence chain and Ball Walk. This research specifically studied the case where the data are three dimensional and are a multivariate normal distribution with mean vector $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ and variance covariance matrix $\boldsymbol{\Sigma}$, which is a 3×3 symmetric and positive semi-definite, where $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$. We let upper-diagonal elements vector of true correlation matrix $(\mathbf{r})$ be $\mathbf{0.0}$, $\mathbf{0.1}$, $\mathbf{0.5}$ and $\mathbf{0.9}$ respectively. The sample size used to estimate for each elements of correlation matrix (m) were $3, 10, 30$ and 100 respectively.

The result of this study can be summarized as follows. Taking Euclidean distance form the true correlation matrix as performance measure, a Bayes' estimate form the joint uniform prior gives a better estimate than that form the marginal uniform prior when the data are highly correlated. On the contrary, a Bayes' estimate form the marginal uniform prior gives a better estimate than that form the joint uniform prior when the data are uncorrelated or weakly correlated.

The result of the comparison between the two types of proposal distribution by MCMC simulation with MH algorithm shows that a Bayes' estimate from independence chain ,that is assumed uniform on sets of symmetric positive semi-definite correction matrices, is faster of the simulation than Ball Walk when small sample size are estimated each elements of correlation matrix (wide sample path). On the contrary, a Bayes' estimate from Ball Walk ,that is assumed uniform on ball, is faster of the simulation than independence chain when large sample size (narrow sample path).

Department Statistics Student's signature....Sirilak Chaichonich....

Field of study Statistics Advisor's signature....Seksan Kiatsupaibul....

Academic year 2549

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์เป็นอย่างสูง ที่คอยสอน แนะนำ และให้คำปรึกษา ด้วยความปรารถนาดีมาตลอดจนกระทั่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.สุพล ดุรงค์วัฒนา ในฐานะประธานสอบวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ ผกาวดี ศิริรังษี ในฐานะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ให้คำแนะนำเพื่อทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยและอาจารย์ประจำภาควิชาสถิติทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้แก่ผู้วิจัยจนสำเร็จการศึกษา

ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และน้อง ที่เป็นกำลังใจชั้นเยี่ยม

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณเพื่อนทุกคน โดยเฉพาะเพื่อนๆร่วมที่ปรึกษา ที่เป็นกำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สารบัญ

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญภาพ

ภาพที่ หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลหลายตัวแปรนั้นสิ่งจำเป็นที่ควรทราบ คือ โครงสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยสิ่งที่ระบุโครงสร้างความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแปร ได้แก่ เมตริกซ์สหสัมพันธ์ (Correlation Matrix : **R**) ภายใต้เงื่อนไขที่ว่าเมตริกซ์สหสัมพันธ์จะต้องมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

แต่ในทางปฏิบัติ บางครั้งอาจพบว่าการประมาณค่าเมตริกซ์สหสัมพันธ์จากข้อมูลไม่สามารถนำไปใช้ได้ เนื่องจากข้อมูลเกิดการสูญหาย จึงส่งผลทำให้โครงสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลเกิดการขัดแย้งกันเอง และนำไปสู่ภาวะการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

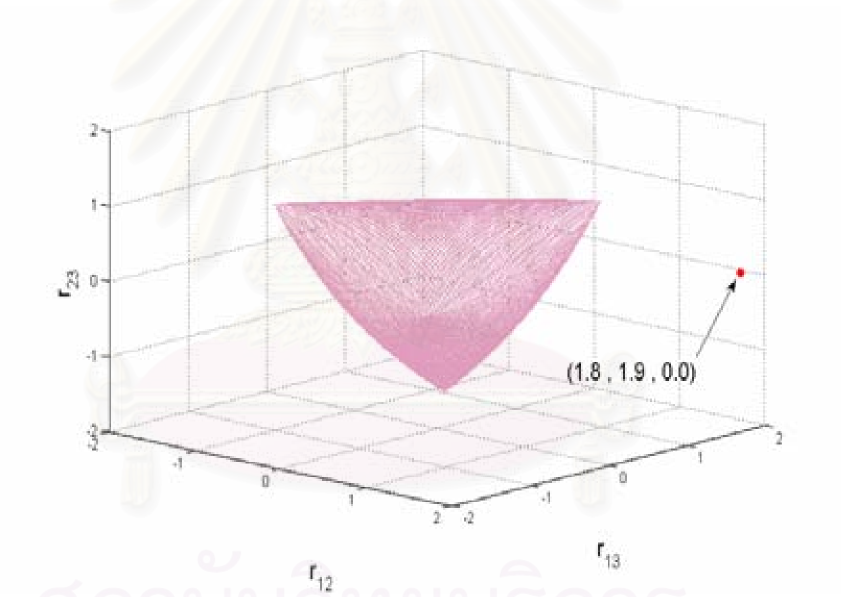
<u>ตัวอย่าง</u> ในกรณีข้อมูลมี 3 มิติและ 9 ค่าสังเกต

No.	x1	x2	x3
1	-1.0	-1.0	
2	0.0	0.0	
3	1.0	1.0	
4	-1.0		-1.0
5	0.0		0.0
6	1.0		1.0
7		0.0	1.0
8		0.0	1.0
9		0.0	1.0

คำนวณหาค่าประมาณเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมและค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ โดยไม่นำข้อมูลที่ไม่ทราบค่ามาคำนวณด้วย จะได้

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}_{MVUE}{}^{1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.4 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.7 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } \hat{\mathbf{R}}_{MVUE} = \begin{bmatrix} 1.0 & 1.8 & 1.9 \\ 1.8 & 1.0 & 0.0 \\ 1.9 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเมื่อนำค่าประมาณเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมมาตรวจสอบคุณสมบัติ Positive Semi-Definite โดยการกำหนดให้ $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ จะได้ว่า $\mathbf{a}^T \hat{\mathbf{\Sigma}}_{MVUE} \mathbf{a} = -2.1 < 0$ ดังนั้นค่าประมาณเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และส่งผลทำให้ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ด้วยเช่นกัน



ภาพที่ 1.1 แสดงตำแหน่งของค่าประมาณขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ บนขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

จากปัญหาที่กล่าวมาข้างต้น แสดงให้เห็นว่าการสูญหายของข้อมูลนั้น อาจเป็นสาเหตุที่ทำให้ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ซึ่งถือว่าเป็นจุดเริ่มต้นของงานวิจัยนี้ และเพื่อต้องการแก้ปัญหาที่เกิดขึ้น ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาวิธีแก้ปัญหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite โดยพบว่า

---

[1] MVUE คือ ตัวประมาณไม่เอนเอียงที่มีค่าความแปรปรวนต่ำสุด (Minimum Variance Unbiased Estimator)

ในปี ค.ศ. 2006 ดร.เสกสรร เกียรติสุไพบูลย์ ได้ทำการศึกษาการแก้ปัญหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite โดยการใช้ Minimum Norm Method และ Eigenvalue Shifting Method

แต่วิธีการแก้ปัญหานี้ จะทำได้แค่เพียงดึงค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite นั้น ให้มาอยู่บริเวณผิวของขอบเขตเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite เท่านั้น

ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการศึกษาการประมาณด้วยวิธีของเบส์ (Bayesian Estimation) เพื่อต้องการแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ โดยมีจุดมุ่งหมายให้ ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์นั้น เข้ามาอยู่ภายในขอบเขตเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ส่วนวิธีการในการคำนวณหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์นั้น ในงานวิจัยนี้จะอาศัยเทคนิคการจำลองด้วยวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล (Markov Chain Monte Carlo : MCMC) ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง (Metropolis-Hastings Algorithm : HM) และเมื่อผู้วิจัยได้ทำการศึกษาหลักการทั้งหมดพบว่า

ในปี ค.ศ. 2000 Barnard, McCulloch and Meng ได้เสนอการแจกแจงเริ่มแรก (Prior Distribution) ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ 2 แบบ คือ Joint Uniform Distribution, Marginal Uniform Distribution

ในปี ค.ศ. 2004 Ghosh and Handerson ได้เสนอ Onion Method เพื่อใช้ในการจำลองเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนขอบเขตเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

ในปี ค.ศ. 1992 Lovasz and M. Simonovits ได้เสนอวิธีการสุ่มตัวอย่างด้วย Ball Walk

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ จะแบ่งตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ออกเป็น 2 แบบ ตามการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรก คือ

1. Joint Uniform Distribution
2. Marginal Uniform Distribution

ส่วนวิธีการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ในแต่ละแบบนั้น จะอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง โดยแบ่งวิธีการจำลองออกเป็น 2 แบบ ตามการกำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอล (Proposal Distribution) คือ

1. Independence Chain
2. Ball Walk

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันด้วยตัวประมาณเบส์
2. เพื่อเปรียบเทียบความใกล้เคียงในการประมาณค่าของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็นแบบ Joint Uniform Distribution และ Marginal Uniform Distribution
3. เพื่อเปรียบเทียบความเร็วในการจำลองหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยกำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain และ Ball Walk

1.3 สมมติฐานการวิจัย

1. ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution จะมีความใกล้เคียงในการประมาณค่ามากกว่า การกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution
2. การกำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Ball Walk จะมีความเร็วในการจำลองมากกว่า แบบ Independence Chain

1.4 ขอบเขตการวิจัย

1. ศึกษาในกรณีข้อมูลมี 3 มิติ ($d=3$) และสมมติให้ข้อมูลมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปรด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}=[\mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3]^T=[0 \quad 0 \quad 0]^T$ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}$ ขนาด 3×3 ที่มีคุณสมบัติ Positive semi-Definite และสมมาตร เมื่อ
$$\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

2. กำหนดรูปแบบการสูญหายของข้อมูล

<u>นิยาม</u> การสูญหายแบบเท่ากันคือ รูปแบบการสูญหายที่ในแต่ละมิติมีสัดส่วนการสูญหายเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> ในกรณีข้อมูลมี 3 มิติและ 9 ค่าสังเกต

x_{11}	x_{21}	x_{31}	
x_{12}	x_{22}	x_{32}	สูญหาย
x_{13}	x_{23}	x_{33}	
x_{14}	x_{24}	x_{34}	
x_{15}	x_{25}	x_{35}	
x_{16}	x_{26}	x_{36}	
x_{17}	x_{27}	x_{37}	
x_{18}	x_{28}	x_{38}	
x_{19}	x_{29}	x_{39}	

โดยในแต่ละมิติจะมีข้อมูลสูญหาย $\frac{n}{d} = \frac{9}{3} = 3$ ค่าสังเกต ซึ่งในงานวิจัยนี้จะไม่นำข้อมูลที่ไม่ทราบค่ามาคำนวณหาเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ดังนั้นขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ในแต่ละองค์ประกอบจะเหลือ $n - 2(\frac{n}{d}) = \frac{(d-2)}{d}n$ $= \frac{(3-2)}{3}9 = 3$ ค่าสังเกต

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ m คือ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ โดยที่ $m = \frac{(d-2)}{d}n$ เมื่อ d คือ มิติ และ n คือ ขนาดตัวอย่าง

3. กำหนดให้ฟังก์ชันความสูญเสีย (Loss Function) อยู่ในรูปของกำลังสองความแตกต่างระหว่างตัวประมาณและตัวพารามิเตอร์ โดยที่ตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ในงานวิจัยนี้ คือ ค่าคาดหวังของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย

4. กำหนดการแจกแจงเริ่มแรก (Prior Distribution) เป็นแบบ Joint Uniform Distribution และ Marginal Uniform Distribution
5. กำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอล(Proposal Distribution) เป็นแบบ Independence Chain และ Ball Walk
6. ศึกษาในกรณีที่เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง $(\mathbf{r})$ เป็น **0.0**, **0.1**, **0.5** และ **0.9** ตามลำดับ

   <u>นิยาม</u> กำหนดให้ $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{23} \end{bmatrix}^T$ คือ เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง เมื่อ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$ มีลักษณะสมมาตร โดยที่ $\mathbf{r} \in \Re^3$

7. ศึกษาในกรณีที่ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์(m) เป็น 3, 10, 30 และ 100 ตามลำดับ

1.5 วิธีดำเนินการวิจัย

1. จำลองข้อมูล เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันภายใต้กรณีศึกษาที่กำหนด
2. หาอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน
3. หาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ภายใต้การกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกและการกำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอล ต่างกัน
4. วิเคราะห์เปรียบเทียบค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกต่างกัน
5. วิเคราะห์เปรียบเทียบความเร็วในการจำลองหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลต่างกัน

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทำให้สามารถแก้ปัญหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันได้
2. ทำให้สามารถใช้เทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ในการประมาณด้วยวิธีของเบส์ได้
3. ทำให้ทราบว่าการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกแบบใด ที่สามารถแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ได้ และการประมาณค่าดีกว่ากัน
4. ทำให้ทราบว่ากำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลแบบใด ที่จะมีความเร็วในการจำลองหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ดีกว่ากัน

บทที่ 2

ทฤษฎีและสถิติที่เกี่ยวข้อง

โดยในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและสถิติที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย ซึ่งจะมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1 การแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution)

กำหนดให้เวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_n]^T$ มีการแจกแจงปกติหลายตัว ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

เมื่อ $-\infty < x_i < \infty,\ i = 1,2,\ldots,n$

ซึ่ง $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ โดยที่ $\boldsymbol{\mu}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าเฉลี่ย $[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]^T$ ซึ่ง $\mu_i = E(X_i),\ i = 1,2,\ldots,n$ และ $\boldsymbol{\Sigma}$ เป็นเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม ขนาด $n \times n$ ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \cdots & \Sigma_{1n} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \cdots & \Sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{n1} & \Sigma_{n2} & \cdots & \Sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

โดยที่ $\Sigma_{ij} = Cov\,(X_i\ , X_j)$ สำหรับ $i \neq j$ และ $\Sigma_{ii} = Var\,(X_i)$

โดยคุณสมบัติของการแจกแจงปกติหลายตัวแปรมีดังนี้

1. ถ้า $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ และจัด $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}^T$ โดยที่ $\mathbf{X}_1$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $n_1 \times 1$ และ $\mathbf{X}_2$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $n_2 \times 1$ เมื่อ $n_1 + n_2 = n$ แล้ว $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 & \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}^T$ และ $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

1.1. การแจกแจงส่วนริม

$$\mathbf{X}_1 \sim N_{n_1}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}) \text{ และ } \mathbf{X}_2 \sim N_{n_2}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_{22})$$

1.2. การแจกแจงที่มีเงื่อนไข

$$\mathbf{X}_1 \mid \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}^* \sim N_{n_1}(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*)$$

โดยที่

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)$$
$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}$$

2. ถ้า $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{B}$ เป็นเมตริกซ์ใดๆ ขนาด $k \times m$ เมื่อ $k < m$ และ $\mathbf{b}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ขนาด $k \times 1$ จะได้ว่า

$$\mathbf{Y} = \mathbf{BX} + \mathbf{b} \sim N_k(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^T)$$

2.2 เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Covariance Matrix : $\boldsymbol{\Sigma}$) และเมตริกซ์สหสัมพันธ์ (Correlation Matrix : $\mathbf{R}$)

กำหนดให้ $\mathbf{X}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มขนาด $n \times 1$ ดังนั้นเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ $\mathbf{X}$ คือ

$$\boldsymbol{\Sigma} = \operatorname{cov}(\mathbf{X}) = \left(\operatorname{cov}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)\right)_{n \times n}$$
$$= E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))^T]$$

และเมตริกซ์ $\boldsymbol{\Sigma}$ จะเป็นเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม ก็ต่อเมื่อมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ส่วนเมตริกซ์สหสัมพันธ์ของ $\mathbf{X}$ คือ

$$\mathbf{R} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$$

โดยที่ ในแต่ละองค์ประกอบของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ จะมีค่าอยู่ในช่วง $[-1,1]$ และเมตริกซ์สหสัมพันธ์จะมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ก็ต่อเมื่อ เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

<u>หมายเหตุ</u>

เมตริกซ์ $\mathbf{A}$ ใดๆ ขนาด $n \times n$ ที่สมมาตรจะมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ถ้า $\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \geq 0$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \in \Re^n$ และจะมีคุณสมบัติ Positive Definite ถ้า $\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} > 0$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \neq 0$

2.3 การประมาณด้วยวิธีของเบส์(Bayesian Estimation)[2]

กำหนดให้ $\mathbf{X}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มขนาด $n \times 1$ มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ หรืออาจเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันความหนาแน่นที่มีเงื่อนไขเมื่อกำหนด $\boldsymbol{\theta}$ ได้ $f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta})$ โดยฟังก์ชันความหนาแน่นนี้จะถูกเรียกว่าฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function)

และให้ Θ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม $h(\boldsymbol{\theta})$ ซึ่งจะถูกเรียกว่าฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่มแรก (Prior density function) โดยที่วิธีของเบส์จะถือว่าค่าพารามิเตอร์ $\boldsymbol{\theta}$ ไม่ใช่ค่าคงที่ แต่เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ

ซึ่งเมื่อนำข้อมูลสองส่วนนี้มาใช้ร่วมกัน ก็จะพบว่าค่าของตัวอย่างสุ่ม $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ สามารถที่จะบ่งบอกถึงค่า $\boldsymbol{\theta}$ ที่ควรจะเป็นได้ ดังนั้นการประมาณค่า $\boldsymbol{\theta}$ จะทำได้จากการพิจารณาฟังก์ชันความหนาแน่นอย่างมีเงื่อนไขของ Θ เมื่อกำหนด $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ ซึ่งจะเรียกฟังก์ชันความหนาแน่นนี้ว่าฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย (Posterior density function) $\pi(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{x})$ โดยที่

$$\pi(\boldsymbol{\theta}\,|\,\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{\theta})}{\sum f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{\theta})} & \text{, กรณีไม่ต่อเนื่อง} \\[2em] \dfrac{f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\theta})h(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}} & \text{, กรณีไม่ต่อเนื่อง} \end{cases}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\pi(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\theta}) h(\boldsymbol{\theta})$$

$$\text{Posterior} \propto \text{Likelihood . Prior}$$

จากการประมาณด้วยวิธีเบส์จะพบว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น และฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่มแรก แต่ถ้ามีวงศ์ของการแจกแจงสำหรับ $\boldsymbol{\theta}$ ซึ่งทำให้การแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียและฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่มแรกอยู่ในวงศ์เดียวกัน โดยจะเรียกวงศ์ของการแจกแจงนี้ว่า วงศ์คู่สังยุค (Conjugate family)

และจากการประมาณด้วยวิธีของเบส์จะพบว่าตัวประมาณด้วยวิธีของเบส์ (δ_B) นี้ จะเป็นตัวประมาณที่ทำให้ค่าคาดหวังของฟังก์ชันความสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข มีค่าน้อยที่สุด

$$E[l(\boldsymbol{\theta} \mid \delta_B) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}] = \int l(\boldsymbol{\theta}, \delta_B) \pi(\boldsymbol{\theta} \mid \mathbf{x}) d\boldsymbol{\theta}$$

โดยที่ตัวประมาณด้วยวิธีของเบส์ จะเป็นแบบใดนั้น จะขึ้นอยู่กับการกำหนดฟังก์ชันความสูญเสีย (Loss Function) ซึ่งในกรณีที่ฟังก์ชันการสูญเสีย เป็นการสูญเสียในรูปของกำลังสองของความแตกต่างระหว่างตัวประมาณและตัวพารามิเตอร์

$$l(\boldsymbol{\theta}, \delta_B) = (\boldsymbol{\theta} - \delta_B)^2$$

จะพบว่า ตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์มักเป็นค่าคาดหวังของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย ($E[k(\boldsymbol{\theta} / \mathbf{x})]$) ส่วนในกรณีที่ฟังก์ชันความสูญเสียอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์ของความแตกต่าง

$$l(\boldsymbol{\theta}, \delta_B) = \left| \boldsymbol{\theta} - \delta_B \right|$$

ตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์มักเป็นมัธยฐานของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย

2.4 วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติคาร์โล (Markov Chain Monte Carlo Method :MCMC)[3]

วิธีมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล (Markov Chain Monte Carlo: MCMC) จะเป็นวิธีที่ใช้ มอนติ คาร์โล อินทิเกรชั่น (Monte Carlo Integration) ด้วยมาร์คอฟ เชน (Markov Chains)

โดยที่ มอนติ คาร์โล อินทิเกรชั่น มีจุดประสงค์เพื่อแก้ปัญหาการคำนวณค่าคาดหวังจากอินทิกรัลที่ซับซ้อนและยุ่งยากโดยการหาค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากฟังก์ชันความหนาแน่นที่ต้องการแทน โดยกำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจง π และ h เป็นฟังก์ชันที่ต้องการประเมิน

$$E[h(x)] = \int h(x)\pi(x)dx$$

และมีแนวคิดมาจากการสุ่มตัวอย่าง ซึ่งทำการจำลองตัวอย่างจากฟังก์ชันความหนาแน่นที่ต้องการ

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \sim \pi$$

เพื่อนำมาหาค่าเฉลี่ยตัวอย่าง

$$\bar{h} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)$$

โดยตัวอย่างสุ่มของมอนติ คาร์โล อินทิเกรชั่น นั้นจะต้องเป็นตัวอย่างสุ่มที่อิสระกัน แต่เนื่องจากการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นที่ต้องการ (π) ไม่ได้เป็นการแจกแจงมาตรฐาน ดังนั้นจึงต้องอาศัยหลักการของ มาร์คอฟ เชน ในการจำลองตัวอย่างสุ่ม จากฟังก์ชันความหนาแน่นที่ต้องการ $\pi(\cdot)$ ซึ่งเป็นการแจกแจงเป้าหมาย (Target distribution) โดยหลักการของ มาร์คอฟ เชน มีจุดประสงค์เพื่อจำลองลำดับตัวอย่างสุ่ม (X_t) เมื่อ $t = 0,1,2,3,\ldots$ จาก Transition Kernel Density $P(x_{t+1}, x_t)$ โดยที่เมื่อ $X_t = x_t$ แล้ว $X_{t+1} \sim P(x_{t+1}, x_t)$

กำหนดให้ x_t เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม X ณ เวลา t และกำหนดให้ State Space เป็นเซตของค่า x_t ที่สามารถเป็นได้, $x_t \in \Omega$ โดยที่กระบวนการมาร์คอฟจะเกิดขึ้นได้ เมื่อความน่าจะเป็นในการเคลื่อนที่ระหว่างค่าที่เป็นไปได้ใน State Space ขึ้นอยู่กับค่าใน state ปัจจุบันเท่านั้น

$$P(x_{t+1} \in A \mid x_0, x_1, \ldots, x_t) = P(x_{t+1} \in A \mid x_t)$$

สำหรับเซต $A \subset \Omega$

=

$\ldots$

โดยที่ $P(x_{t+1} \in A \mid x_t)$ อาจเขียนเป็น $P(x_{t+1} : x_t)$ โดยที่ $\int P(x_{t+1} : x_t)dx_t = 1$
ดังนั้นจะพบว่าความน่าจะเป็นของค่าที่เป็นไปได้ของ X_{t+1} เมื่อทราบ $(X_t, X_{t-1}, \ldots, X_0)$ จะมีค่าเท่ากับความน่าจะเป็นค่าที่เป็นไปได้ของ X_{t+1} เมื่อทราบ X_t

เมื่อกำหนดให้กระบวนการข้างต้นเป็นแบบ Time-Homogeneous แล้ว $P(*:*)$ จะไม่ขึ้นกับ t ใดๆ ดังนั้นการแจกแจงของ X_t เมื่อกำหนด X_0 จะมีค่าเท่ากับ $P^{(t)}(x_t : x_0)$ โดยที่ X_t จะไม่ขึ้นอยู่กับ $(X_1, X_2, \ldots, X_{t-1})$ แต่จะขึ้นอยู่กับ X_0 เพียงเท่านั้น
จากสมการของแชปแมน-โคโมโกรอฟ (Chapman-Komogorov Equation) จะได้ว่า

$$P^{(t+1)}(x_{t+1} : x_0) = \int P^{(t)}(x_t : x_0) P(x_{t+1} : x_t) dx_t$$

และกระบวนการมาร์คอฟ เชน จะเป็นการแจกแจงเสถียรภาพ (Stationary distribution : $\pi(\cdot)$)

$$\pi(x_{t+1}) = \int \pi(x_t) P(x_{t+1} : x_t) dx_t$$

ถ้า กระบวนการ มีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

1. Irreducible
2. Aperiodic
3. Positive recurrent

Theorem[4] ถ้า X มีคุณสมบัติ positive recurrent และ aperiodic แล้ว X เป็นการแจกแจงเสถียรภาพ $\pi(\cdot)$ ที่เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ unique โดยจะเรียก X เป็น ergodic และจะได้ว่า

1. $P^{(t)}(x_{t+1} \in A \mid x_0) \to \pi(A)$ เมื่อ $t \to \infty$ สำหรับทุกค่า
2. (Ergodic theorem) ถ้า $E_\pi\left[h(X)\right] < \infty$ แล้ว
$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} h(X_t) \to E_\pi\left[h(X)\right]\right] = 1$$
เมื่อ $E_\pi[h(X)] = \int h(x)\pi(x)dx_t$

2.5 อัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง(Metropolis-Hasting Algorithm: MH)[5]

อัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้งในเบื้องต้นนั้น มีจุดประสงค์เพื่อต้องการจำลองตัวอย่างจากการแจกแจงของ $\pi(\theta)$ และมีแนวความคิดมาจาก Reversibility ของ มาร์คอฟ เชน ซึ่งสามารถสรุปหลักการดังนี้

1. เริ่มจากการกำหนดให้ $t = 0$ และจุดเริ่มต้น θ_0 โดยที่ $\pi(\theta_0) > 0$
2. ทำการสุ่มตัวแคนดิเดท (Candidate) θ' จากการแจกแจงพรอพโพซอล(Proposal Distri - bution) $Q(\theta' : \theta_t)$
3. คำนวณหาความน่าจะเป็นในการยอมรับ (Acceptance Probability) โดยจะเป็นอัตราส่วนของฟังก์ชันความหนาแน่นระหว่างตัวอย่างปัจจุบัน กับตัวแคนดิเดท

$$\alpha(\theta_t, \theta') = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\pi(\theta')Q(\theta_t : \theta')}{\pi(\theta_t)Q(\theta' : \theta_t)}, 1 \right\} & \text{เมื่อ } \pi(\theta_t)Q(\theta' : \theta_t) > 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } \pi(\theta_t)Q(\theta' : \theta_t) = 0 \end{cases}$$

4. สร้างเลขสุ่มของการยอมรับ $U \sim uniform(0,1)$

$$\theta_{t+1} = \begin{cases} \theta' & \text{เมื่อ } u < \alpha(\theta_t, \theta') \text{ , ด้วยความน่าจะเป็น } \alpha(\theta_t, \theta') \\ \theta_t & \text{เมื่อ } u \ge \alpha(\theta_t, \theta') \text{ , ด้วยความน่าจะเป็น } 1 - \alpha(\theta_t, \theta') \end{cases}$$

<u>หมายเหตุ</u> การกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอล $Q(* : *)$ เป็นแบบใดนั้นจะไม่ส่งผลต่อการแจกแจงที่ต้องการ $\pi(\cdot)$ แต่จะมีผลกับอัตราการลู่เข้าสู่การแจกแจงที่ต้องการ $\pi(\cdot)$ โดยถ้ากำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลเหมาะสมกับการแจกแจงที่ต้องการ $\pi(\cdot)$ แล้วจะทำให้อัตราการลู่เข้าสูง

ซึ่งการกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลนั้นสามารถแบ่งได้หลายประเภท เช่น

1. Symmetric chain โดยจะกำหนดให้ $Q(\theta' : \theta_t) = Q(\theta_t : \theta')$

   ดังนั้นจะได้ว่า $\alpha(\theta_t, \theta') = \min\left(\dfrac{\pi(\theta')}{\pi(\theta_t)}, 1 \right)$

2. Random-Walk chain โดยกำหนดให้ $Q(\theta^{'}:\theta_t) = Q(|\theta_t - \theta^{'}|)$

   ดังนั้นจะได้ว่า $\alpha(\theta_t,\theta^{'}) = \min\left(\dfrac{\pi(\theta^{'})}{\pi(\theta_t)},1\right)$

3. Independence chain โดยกำหนดให้ $Q(\theta^{'}:\theta_t) = Q(\theta^{'})$

   ดังนั้นจะได้ว่า $\alpha(\theta_t,\theta^{'}) = \min\left(\dfrac{w(\theta^{'})}{w(\theta_t)},1\right)$ เมื่อ $w(\theta_t) = \pi(\theta_t)/Q(\theta_t)$

2.6 วิธี Onion (Onion Method)[6]

Ghosh and Henderson (2004) ได้เสนอวิธี Onion เพื่อต้องการจำลองเมตริกซ์สหสัมพันธ์จากการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนเซต Ω_d เมื่อ d คือมิติ และ $\Omega_d \subset \Re^{d(d-1)/2}$

$$\Omega_d = \left\{\mathbf{R} : \mathbf{R} = \mathbf{R}^T, \mathbf{R} \geq 0, \mathbf{R}_{ii} = 1 \text{ เมื่อ } i = 1,2,3\ \right\}$$

ซึ่งเป็นเซตของขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และสมมาตร

โดยวิธีนี้จะมีหลักการคล้ายกับกลีบของหัวหอมที่เรียงตัวซ้อนกันเป็นชั้นๆ ซึ่งจะทำการจำลองเมตริกซ์สหสัมพันธ์จากเมตริกซ์สหสัมพันธ์ย่อยที่มีมิติเล็กที่สุด แล้วขยายมิติออกมาเรื่อยๆ จนมีมิติตามที่ต้องการ โดยอยู่ภายใต้เงื่อนไขเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^T & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\mathbf{R}_k$ คือ เมตริกซ์สหสัมพันธ์ ขนาด $k \times k$

$\mathbf{R}_{k-1}$ คือ เมตริกซ์สหสัมพันธ์ ขนาด $(k-1)\times(k-1)$ โดยที่ $\mathbf{R}_{k-1}$ เป็นเมตริกซ์ย่อยของ $\mathbf{R}_k$

$\mathbf{q}$ คือ เวกเตอร์หลัก (Column Vector) โดยจะถูกเรียกว่าส่วนเติมเต็ม (Completion) ของ $\mathbf{R}_{k-1}$ ใน $\mathbf{R}_k$

โดยสามารถสรุปขั้นตอนการจำลองเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ได้ดังนี้

1. กำหนดให้ $\mathbf{R}_1$ เป็นเมตริกซ์ 1 ขนาด 1×1
2. สำหรับ $k = 2,3$
3. จำลอง $y \sim beta((k-1)/2,(5-k)/2)$
4. ให้ $r = \sqrt{y}$
5. จำลอง $\mathbf{U} \sim N_{k-1}(0,\mathbf{I})$
6. ให้ $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{U}/\|\mathbf{U}\|$
7. ให้ $\mathbf{w} = r\boldsymbol{\theta}$
8. ให้ $\mathbf{q} = \mathbf{R}'^{\frac{1}{2}}_{k-1}\mathbf{w}$ เมื่อ $\mathbf{R}'^{\frac{1}{2}}_{k-1}$ คือเมตริกซ์อินเวอร์สของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนขององค์ประกอบ โชเลสกี้ของ $\mathbf{R}'^{-1}_{k-1}$
9. ให้ $\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^t & 1 \end{bmatrix}$
10. k ต่อไป

2.7 Ball Walk

Lovasz and M. Simonovits (1992) ได้เสนอวิธี Ball Walk เพื่อต้องการจำลองการสุ่มตัวอย่างจากการแจกแจงแบบสม่ำเสมอบนเซต K ซึ่งเป็น Convex Body โดยใช้หลักการสร้างบอลรัศมี δ ขึ้นมา แล้วทำการสุ่มตัวอย่างภายในบอลนั้นเพื่อต้องการให้มีการเคลื่อนที่ไม่ไกลจากจุดเริ่มต้น โดยสามารถสรุปขั้นตอนการจำลองได้ดังนี้

1. สุ่มตัวอย่าง y แจกแจงแบบสม่ำเสมอ บนบอลที่มีรัศมี δ และมีจุดศูนย์กลางที่ x
2. ถ้า $y \in K$ แล้วจะให้ $x = y$

   แต่ถ้า $y \notin K$ แล้วจะให้ $x = x$

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การดำเนินการในการวิจัยนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน

3.1 แผนการดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนการศึกษา มีดังนี้

1. กำหนดโครงสร้างของข้อมูล เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบ เท่ากันภายใต้กรณีศึกษาที่น่าสนใจ ดังนี้
    - 1.1. กรณีความสัมพันธ์ของข้อมูล
        - 1.1.1. ข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน โดยกำหนดให้เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทะแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง ($\mathbf{r}$) เป็น **0.0**
        - 1.1.2. ข้อมูลมีความสัมพันธ์กัน โดยกำหนดให้เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทะแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง ($\mathbf{r}$) เป็น **0.1**, **0.5** และ **0.9**
    - 1.2. กรณีขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ (m) เป็น 3, 10, 30 และ 100
2. หาอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน
3. หาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน ภายใต้การกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกต่างกัน โดยสามารถแบ่งการแจกแจงเริ่มแรกออกเป็น 2 แบบ คือ
    - 3.1. Joint Uniform Distribution
    - 3.2. Marginal Uniform Distribution

    ส่วนการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ในแต่ละแบบนั้น จะอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ภายใต้การกำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอลต่างกัน โดยสามารถแบ่งประเภทของแจกแจงพรอพโพซอลออกเป็น 2 แบบ คือ

3.1. Independence Chain

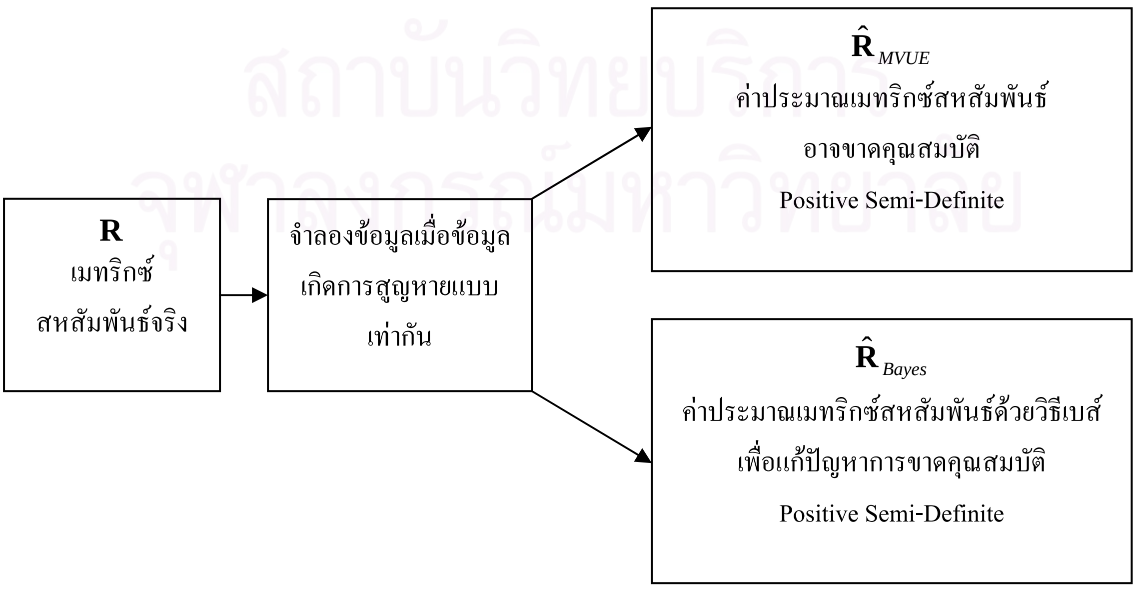
3.2. Ball Walk

3.2 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยมีขั้นตอน ดังนี้

1. จำลองข้อมูล เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน ภายใต้กรณีศึกษาที่กำหนด
2. หาอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน
3. หาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบ เท่ากันโดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล และอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ภายใต้การกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกและการกำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอลต่างกัน
4. วิเคราะห์เปรียบเทียบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกต่างกัน
5. วิเคราะห์เปรียบเทียบความเร็วในการจำลองเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลต่างกัน

โดยขั้นตอนการศึกษาและการดำเนินการวิจัย เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันสามารถอธิบายได้ดังนี้



3.3 การกำหนดโครงสร้างและการจำลองข้อมูล เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน

กำหนดให้มิติ $d = 3$ และเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ มีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร (Multivariate Normal Distribution) ด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ขนาด 3×1 และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}$ ขนาด 3×3 ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และสมมาตร เมื่อ $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & 1 & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & 1 \end{bmatrix}$ ดังนั้นจะสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมได้ดังนี้

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} \right\}$$

เมื่อ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ แต่งานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันดังนั้นเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{X}$ จึงถูกแบ่งออกเป็นสองส่วน คือ $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_{obs}, \mathbf{X}_{loss}]^T$ เมื่อ $\mathbf{X}_{obs}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่สามารถเก็บข้อมูลได้ขนาด 2×1 และ $\mathbf{X}_{loss}$ เป็นเวกเตอร์สุ่มที่ไม่สามารถเก็บข้อมูลได้ขนาด 1×1 และจัดให้ $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_{obs}, \mathbf{X}_{loss}]^T$, $\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_{obs}, \boldsymbol{\mu}_{loss}]^T = \mathbf{0}$ และ $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{obs,obs} & \boldsymbol{\Sigma}_{obs,loss} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{loss,obs} & \boldsymbol{\Sigma}_{loss,loss} \end{bmatrix}$

ดังนั้นจากคุณสมบัติการแจกแจงส่วนริม (Marginal distribution) ของการแจกแจงปกติหลายตัวแปรแล้ว $\mathbf{X}_{obs}$ จะมีการแจกแจงปกติหลายตัวแปร ด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}_{obs} = \mathbf{0}$ และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}_{obs,obs}$ ขนาด 2×2 โดยจะสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของ $\mathbf{X}_{obs}$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_{obs}) &= \int_R f(\mathbf{x}_{obs}, \mathbf{x}_{loss}) d\mathbf{x}_{loss} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}_{obs,obs}|} \right)^{1/2} \int_R \exp\left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x} \right\} d\mathbf{x}_{loss} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}_{obs,obs}|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_{obs})^T \boldsymbol{\Sigma}_{obs,obs}^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right\} \end{aligned}$$

แต่เนื่องจากจุดประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ การหาตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ เพื่อต้องการแยกองค์ความรู้เกี่ยวกับเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมออกเป็นสองส่วน คือ เมตริกซ์สหสัมพันธ์กับเวกเตอร์ของค่าเบี่ยงเบนมาตราฐาน โดยใช้ Separation Strategy ของ Barnard , McCulloch and Meng (2000) ซึ่งกำหนดให้

$$\mathbf{\Sigma} = diag(\mathbf{S})\ \mathbf{R}\ diag(\mathbf{S})$$

เมื่อ $\mathbf{R}$ คือเมตริกซ์สหสัมพันธ์ขนาด $d \times d$ ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และ $\mathbf{S}$ เป็นเวกเตอร์ของค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานขนาด $d \times 1$ ซึ่ง $diag(\mathbf{S})$ คือ เมตริกซ์เส้นทแยงมุมที่มีค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานเป็นองค์ประกอบในเส้นทแยงมุม

โดยงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\mathbf{\Sigma}$ ขนาด 3×3 ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และสมมาตร เมื่อ $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & 1 & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & 1 \end{bmatrix}$ ดังนั้นจะได้

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{\Sigma}$ และ $diag(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$ โดยที่ $\mathbf{S} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ ดังนั้น จะสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมใหม่ได้ดังนี้

$$f(\mathbf{x}_{obs}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{1}{\left| \mathbf{R}_{obs,obs} \right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_{obs})^T \mathbf{R}_{obs,obs}^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right\}$$

<u>สรุปขั้นตอนการจำลองข้อมูล เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน</u>

1. กำหนดระดับความสัมพันธ์ $(\mathbf{r})$

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ $\mathbf{r} = \left[r_{12} \quad r_{13} \quad r_{23} \right]^T$ คือ เวกเตอร์ของงองค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง เมื่อ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$ มีลักษณะสมมาตร โดยที่ $\mathbf{r} \in \Re^3$

2. กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ (m)

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ m คือ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ โดยที่ $m = \dfrac{(d-2)n}{d}$ เมื่อ d คือ มิติ และ n คือ ขนาดตัวอย่าง

3. การจำลองเวกเตอร์สุ่มที่มีความสัมพันธ์กัน

เนื่องจากในงานวิจัยนี้ได้ กำหนดให้มิติ $d = 3$ และเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]^T$ มีการแจกแจงปกติหลายตัว (Multivariate Normal Distribution) ด้วยเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ ขนาด 3×1 และเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\boldsymbol{\Sigma}$ ขนาด 3×3 ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และสมมาตร เมื่อ $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$ ดังนั้นจะสามารถจำลอง เวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{X}$ ตามความสัมพันธ์ที่กำหนด ได้จาก

$$\mathbf{X} = \mathbf{CZ} + \boldsymbol{\mu}$$

เมื่อ

$\mathbf{Z}$ คือ $[Z_1, Z_2, Z_3]^T$ ซึ่ง Z_1, Z_2, Z_3 เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

$\mathbf{C}$ คือ Lower Triangular Matrix ของ $\mathbf{R}$ เมื่อใช้ Cholesky decomposition $(\mathbf{R} = CC^T)$

$\boldsymbol{\mu}$ คือ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $(\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0})$

4. กำหนดการสูญหาย

โดยในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน

<u>ตัวอย่าง</u> รูปแบบของการสูญหายแบบเท่ากันในกรณี 3 มิติ

x_{11}	x_{21}	x_{31}	สูญหาย
x_{12}	x_{22}	x_{32}	
x_{13}	x_{23}	x_{33}	
x_{14}	x_{24}	x_{34}	
x_{15}	x_{25}	x_{35}	
x_{16}	x_{26}	x_{36}	
x_{17}	x_{27}	x_{37}	
x_{18}	x_{28}	x_{38}	
x_{19}	x_{29}	x_{39}	

3.4 การหาอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน

โดยการคำนวณค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันในงานวิจัยนี้ จะไม่นำข้อมูลที่ไม่ทราบค่ามาคำนวณ และกำหนดให้มทริกซ์สหสัมพันธ์จะมีลักษณะสมมาตร ดังนั้นค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) จะสามารถคำนวณได้จาก

$$\hat{\mathbf{R}}_{MVUE} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{12}^* & \hat{r}_{13}^* \\ \hat{r}_{21}^* & 1 & \hat{r}_{23}^* \\ \hat{r}_{31}^* & \hat{r}_{32}^* & 1 \end{bmatrix}$$

โดย

$$\hat{r}_{12}^* = \hat{r}_{21}^* = \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{3}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{2i}-\bar{x}_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{(2m-1)}\sum_{i=1}^{6}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2\right)\left(\frac{1}{(2m-1)}\sum_{i=1}^{6}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2\right)}}$$

$$\hat{r}_{13}^* = \hat{r}_{31}^* = \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{3}(x_{1i}-\bar{x}_1)(x_{3i}-\bar{x}_3)}{\sqrt{\left(\frac{1}{(2m-1)}\sum_{i=1}^{6}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2\right)\left(\frac{1}{(2m-1)}\sum_{i=1}^{6}(x_{3i}-\bar{x}_3)^2\right)}}$$

$$\hat{r}_{23}^* = \hat{r}_{32}^* = \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{3}(x_{2i}-\bar{x}_2)(x_{3i}-\bar{x}_3)}{\sqrt{\left(\frac{1}{(2m-1)}\sum_{i=1}^{6}(x_{2i}-\bar{x}_2)^2\right)\left(\frac{1}{(2m-1)}\sum_{i=1}^{6}(x_{3i}-\bar{x}_3)^2\right)}}$$

เมื่อ m คือ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ $\hat{\mathbf{r}}_{MVUE}{}^{7} = \left[\hat{r}_{12}^* \quad \hat{r}_{13}^* \quad \hat{r}_{23}^*\right]^T$ คือ เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ เมื่อ $\hat{\mathbf{R}}_{MVUE} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{12}^* & \hat{r}_{13}^* \\ \hat{r}_{21}^* & 1 & \hat{r}_{23}^* \\ \hat{r}_{31}^* & \hat{r}_{32}^* & 1 \end{bmatrix}$ มีลักษณะสมมาตร โดยที่ $\hat{\mathbf{r}}_{MVUE} \in \Re^3$

ส่วนการตรวจสอบคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ในงานวิจัยนี้จะใช้หลักการของ Superdiagonalization ในการตรวจสอบคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดให้ D เป็นเมตริกซ์สหสัมพันธ์ขนาด 3×3 ที่ต้องการทดสอบ

   ถ้าองค์ประกอบในแนวเส้นทะแยงมุมของ $D<0$ แล้ว D ไม่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

   แต่ถ้าองค์ประกอบในแนวเส้นทะแยงมุมของ $D=0$ แล้ว แถวและหลักขององค์ประกอบนั้นจะต้องมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด ต่อจากนั้นทำการตัดแถวและหลักขององค์ประกอบนั้นทิ้งไป จากนั้นเรียกเมตริกซ์นี้ใหม่ให้เป็น D ไปขั้นตอนที่ 2

   แต่ถ้าไม่ D ไม่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

2. นำ D มาทำ Row Operations ในแถวที่ 1 โดยจะเรียก D ว่าเป็น D_1

   ถ้าองค์ประกอบในแนวเส้นทะแยงมุมของ $D_1<0$ แล้ว D ไม่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

   แต่ถ้าไม่ กำหนดให้ E_1 เป็นเมตริกซ์ย่อยของ D_1 โดยตัดแถวและหลักที่ 1 ของ D_1 ออก แล้วพิจารณาว่า ถ้าองค์ประกอบในแนวเส้นทะแยงมุมของ $E_1=0$ แล้ว แถวและหลักขององค์ประกอบนั้นจะต้องมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด จากนั้นส่ง D_1 ไปขั้นตอนที่ 3

   แต่ถ้าไม่ D ไม่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

3. นำ D_1 มาทำ Row Operations ในแถวที่ 2 โดยจะเรียก D_1 ว่าเป็น D_2

   ถ้าองค์ประกอบในแนวเส้นทะแยงมุมของ $D_2<0$ แล้ว D ไม่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

   แต่ถ้าไม่ กำหนดให้ E_2 เป็นเมตริกซ์ย่อยของ D_2 โดยตัดแถวและหลักที่ 1 กับ 2 ของ D_2 ออก แล้วพิจารณาว่า ถ้าองค์ประกอบในแนวเส้นทะแยงมุมของ $E_2=0$ แล้ว แถวและหลักขององค์ประกอบนั้นจะต้องมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด จากนั้นสรุปว่า D มีคุณสมบัติ Positive Definite

   แต่ถ้าไม่ D ไม่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

สรุปขั้นตอนการหาอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน

1. กำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.0},\ \mathbf{0.1},\ \mathbf{0.5}$ และ $\mathbf{0.9}$
2. กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบของเมตริกซ์สหสัมพันธ์เป็น $m = 3,4,5,6,7,8,9, 10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,35,40$ $,50,60,70,80,90$ และ 100
3. $rate = 0$
4. สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, 10{,}000$
5. จำลองข้อมูล เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน ตามที่กำหนด
6. คำนวณหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$)
7. ตรวจสอบคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ โดยใช้หลักการของ Superdiagonalization
8. ถ้า ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite
   ให้ $rate = rate + 1$
9. ถ้า $i < 10{,}000$ ไปขั้นตอนที่ 4
10. ให้ $ratio_{\mathbf{r},m} = \dfrac{rate}{10{,}000}$
11. ถ้า $m < 100$ ไปขั้นตอนที่ 2
12. ถ้า $\mathbf{r} < \mathbf{0.9}$ ไปขั้นตอนที่ 1
13. จบการทำงาน

3.5 การหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง

โดยการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ในงานวิจัยนี้จะเริ่มจากการประมาณด้วยวิธีของเบส์ (Bayesian Estimation)

ซึ่งวิธีการของเบส์นี้ จะถือว่าค่าพารามิเตอร์เมตริกซ์สหสัมพันธ์ $(\mathbf{R})$ ในฟังชันความหนาแน่นไม่ใช่ค่าคงที่ แต่เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ โดยที่

$$\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R})h(\mathbf{R})}{\int f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R})h(\mathbf{R})d\mathbf{R}}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R})h(\mathbf{R})$$

$$\text{Posterior} \propto \text{Likelihood . Prior}$$

เมื่อ $h(\mathbf{R})$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นเริ่มแรก (Prior density function)

$f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R})$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function)

$\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x})$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย (Posterior density function)

และตัวประมาณด้วยวิธีของเบส์ (δ_B) นี้ จะเป็นตัวประมาณที่ทำให้ค่าคาดหวังของฟังก์ชันความสูญเสียอย่างมีเงื่อนไข มีค่าน้อยที่สุด

$$E[l(\mathbf{R} \mid \delta_B) \mid \mathbf{X} = \mathbf{x}] = \int l(\mathbf{R}, \delta_B)\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x})d\mathbf{R}$$

โดยที่ตัวประมาณด้วยวิธีของเบส์ จะเป็นแบบใดนั้น จะขึ้นอยู่กับการกำหนดฟังก์ชันความสูญเสีย (Loss Function) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ฟังก์ชันความสูญเสียอยู่ในรูปของกำลังสองความแตกต่างระหว่างตัวประมาณและตัวพารามิเตอร์

$$l(\mathbf{R}, \delta_B) = (\mathbf{R} - \delta_B)^2$$

ดังนั้น ตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ คือ ค่าคาดหวังของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย ($E[\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x})]$)

ซึ่งในงานวิจัยนี้จะสามารถเขียนฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของตัวอย่างได้ดังนี้

$$f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{1}{\left| \mathbf{R}_{obs,obs(i)} \right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_{obs})^T (\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right\} \right)$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}) \propto \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left| \mathbf{R}_{obs,obs(i)} \right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[(\mathbf{x}_{obs})^T (\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right] \right\}$$

แต่เนื่องจากตัวประมาณเบส์จะเป็นแบบใดนั้นจะขึ้นอยู่กับการแจกแจงเริ่มแรก(Prior Distribution)

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้แบ่งการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกของ $\mathbf{R}$ ออกเป็น 2 แบบ คือ

1. Joint Uniform Distribution
2. Marginal Uniform Distribution

ซึ่งสามารถอธิบายรายละเอียดได้ดังนี้

3.5.1 Joint Uniform Distribution

การกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution เนื่องมาจากไม่มีองค์ความรู้เกี่ยวกับเมตริกซ์สหสัมพันธ์เลย แต่ในงานวิจัยนี้มีความต้องการแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ดังนั้นจึงได้กำหนดให้โอกาสที่เมตริกซ์สหสัมพันธ์ จะมีค่าที่เป็นไปได้อยู่ในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite เท่าๆกัน ดังนั้นกำหนดให้ เมตริกซ์สหสัมพันธ์มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ บนเซต Ω_3

$$\Omega_3 = \left\{ \mathbf{R} : \mathbf{R} = \mathbf{R}^T, \mathbf{R}_{ij} \in [-1,1], \mathbf{R}_{ii} = 1 \text{ และ } \mathbf{R} \succeq 0 \text{ เมื่อ } i \neq j \quad i, j = 1,2,3 \right\}$$

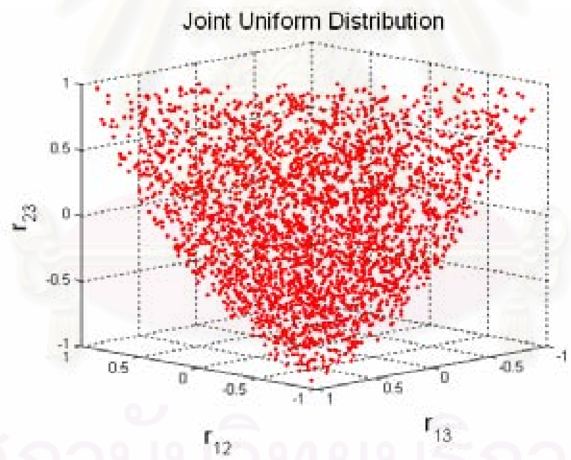
ซึ่งเป็นขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และสมมาตร โดยสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นได้ดังนี้

$$h(\mathbf{R}) = \begin{cases} \dfrac{1}{vol(\Omega_3)} & \text{เมื่อ } \mathbf{R} \in \Omega_3 \\ 0 & \text{เมื่อ } \mathbf{R} \notin \Omega_3 \end{cases}$$

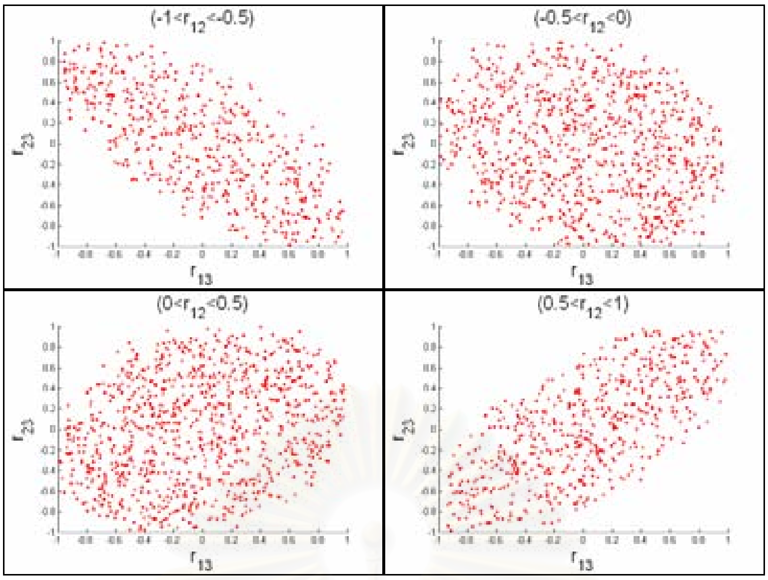
หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$h(\mathbf{R}) \propto 1$$

<u>ตัวอย่าง</u> Scatter Plot ของ **r** 3,000 ค่า เมื่อกำหนดให้เมตริกซ์สหสัมพันธ์มีการแจกแจงเป็น Joint Uniform Distribution ใน 3 มิติ



ภาพที่ 3.1 แสดง Scatter Plot ของ **r** เมื่อกำหนดให้เมตริกซ์สหสัมพันธ์มีการแจกแจงเป็น Joint Uniform Distribution



ภาพที่ 3.2 แสดงภาพตัดขวางของ r_{12} จากภาพที่ 3.1 ในช่วงต่างๆ

ดังนั้นจะสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย (Posterior density function) เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution ได้ดังนี้

$$\pi(\mathbf{R}\mid\mathbf{x})=\frac{f(\mathbf{x}\mid\mathbf{R})h(\mathbf{R})}{\int_{\Omega_3} f(\mathbf{x}\mid\mathbf{R})h(\mathbf{R})d\mathbf{R}}$$

$$=\frac{\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^T(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega_3)}\right)\right\}}{\int_{\Omega_3}\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^T(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega_3)}\right)\right\}d\mathbf{R}}$$

$$=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^T(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)}{\int_{\Omega_3}\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^T(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\right\}d\mathbf{R}}$$

เมื่อ $\int_{\Omega_3}\left\{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^T(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\right\}d\mathbf{R}$ เป็นค่าคงที่

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\pi(\mathbf{R}\mid\mathbf{x}) \propto \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T} (\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right] \right\} \right\}$$

3.5.2 Marginal Uniform Distribution

จาก Barnard , McCulloch and Meng (2000) ได้กำหนดให้องค์ประกอบของเมตริกซ์นอกเส้นทแยงมุมมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform distribution) บนช่วง $[-1,1]$ โดยมีที่มา มาจากการกำหนดให้ เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมมีการแจกแจงแบบอินเวอร์ส วิชาร์ตมาตรฐาน (Standard inverse-Wishart distribution) ด้วย $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathbf{I}$ และ $v \geq d$ เมื่อ v คือองศาความเป็นอิสระภายใต้เงื่อนไขเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วมมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นดังนี้

$$h(\mathbf{\Sigma}\mid v) \propto \left|\mathbf{\Sigma}\right|^{-\frac{1}{2}(d+v+1)} \exp(-\frac{1}{2}tr\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\})$$

เมื่อนำฟังก์ชันความหนาแน่นของอินเวอร์ส วิชาร์ตมาตรฐานของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม มาหาการแจกแจงส่วนริมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\mathbf{R}$) โดยจะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\mathbf{R}$ ดังนี้

$$h(\mathbf{R}\mid v) \propto \left|\mathbf{R}\right|^{\frac{1}{2}(v-1)(d-1)-1} (\prod_{i=1}^{d} \left|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}\right|)^{-\frac{v}{2}}$$

เมื่อ $\mathbf{R}_{\bullet\bullet}$ คือ เมตริกซ์ย่อยที่ i ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์และเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

จากคุณสมบัติของการแจกแจงแบบอินเวอร์ส วิชาร์ตมาตราฐาน จะสามารถสรุปได้ว่าเมตริกซ์ย่อยของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม จะมีการแจกแจงแบบอินเวอร์ส วิชาร์ตมาตราฐานเช่นกัน ดังนั้นจึงกำหนดให้เมตริกซ์ย่อยของเมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม มีมิติ $d_1 = 2$ เพื่อนำมาหาการแจกแจงส่วนริม ขององค์ประกอบของเมตริกซ์โดยจะได้ฟังก์ชันความหนาแน่น ดังนี้

$$h_2(r\mid v) \propto (1-r^2)^{\frac{v-d-1}{2}}$$

โดยที่ r คือ องค์ประกอบของเมตริกซ์ใดใน $\mathbf{r} = [r_{12} \quad r_{13} \quad r_{23}]$ และ $|r| \leq 1$

จากสมการจะพบว่า r มีการแจกแจงเป็นแบบ $Beta(\frac{v-d+1}{2},\frac{v-d+1}{2})$ บนช่วง $[-1,1]$ และจะพบว่าถ้ากำหนดให้ $v=d+1$ แล้ว r จะมีการแจกแจงเป็นแบบสม่ำเสมอบนช่วง $[-1,1]$ ดังนั้นจะสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\mathbf{R}$ เมื่อ $v=d+1$ ได้ดังนี้

$$h(\mathbf{R}\,|\,v=d+1)\propto|\mathbf{R}|^{\frac{d(d-1)}{2}-1}(\prod_{i=1}^{d}|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}|)^{-\frac{(d+1)}{2}}$$

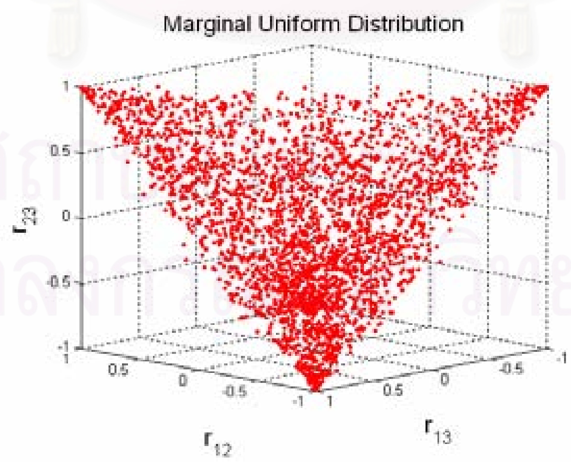
แต่เนื่องจากในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ $d=3$ ดังนั้นจะได้ฟังก์ชันความหนาแน่นของ $\mathbf{R}$ จะกลายเป็น

$$h(\mathbf{R}\,|\,v=4)\propto|\mathbf{R}|^{2}(\prod_{i=1}^{3}|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}|)^{-2}$$

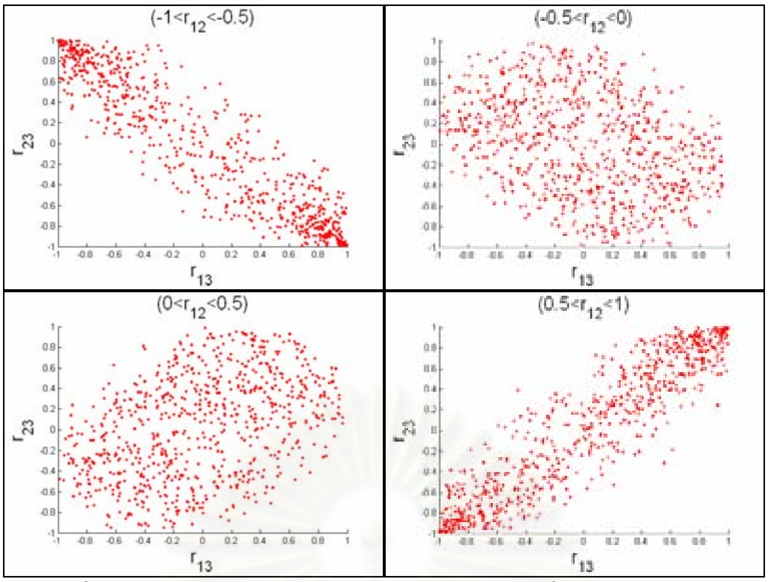
หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$h(\mathbf{R})\propto|\mathbf{R}|^{2}(\prod_{i=1}^{3}|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}|)^{-2}$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> Scatter Plot ของ $\mathbf{r}$ 3,000 ค่า เมื่อกำหนดให้เมตริกซ์สหสัมพันธ์มีการแจกแจงเป็น Marginal Uniform Distribution ใน 3 มิติ



ภาพที่ 3.3 แสดง Scatter Plot ของ $\mathbf{r}$ เมื่อกำหนดให้เมตริกซ์สหสัมพันธ์มีการแจกแจงเป็น Marginal Uniform Distribution



ภาพที่ 3.4 แสดงภาพตัดขวางของ r_{12} จากภาพที่ 3.3 ในช่วงต่างๆ

โดยจากภาพที่ 3.3 และ 3.4 จะพบว่า $\mathbf{r}$ ที่มีการแจกแจงเป็น Marginal Uniform Distribution จะมีลักษณะกระจายตัวอยู่บริเวณมุมของขอบเขตเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-definite

ดังนั้นจะสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย (Posterior density function) ได้ดังนี้

$$\pi(\mathbf{R}\,|\,\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{R})h(\mathbf{R})}{\int_{\Omega_3} f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{R})h(\mathbf{R})d\mathbf{R}}$$

$$= \frac{\left\{ \dfrac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)\right)^{1/2} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}}{\left(\left|\mathbf{R}\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)} \right\}}{\int_{\Omega_3}\left\{ \dfrac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)\right)^{1/2} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}}{\left(\left|\mathbf{R}\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)} \right\} d\mathbf{R}}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\pi(\mathbf{R}\,|\,\mathbf{x}) \propto \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[(\mathbf{x}_{obs})^{T} (\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right] \right\} \right) \left(\left|\mathbf{R}\right|^{2} (\prod_{i=1}^{d} \left|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}\right|)^{-2} \right)$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าในงานวิจัยนี้จะมีการฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย 2 แบบตามการแจกแจงเริ่มแรก คือ

1. Joint Uniform Distribution

$$\pi(\mathbf{R}\,|\,\mathbf{x}) \propto \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[(\mathbf{x}_{obs})^{T} (\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right] \right\} \right\}$$

2. Marginal Uniform Distribution

$$\pi(\mathbf{R}\,|\,\mathbf{x}) \propto \left(\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[(\mathbf{x}_{obs})^{T} (\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right] \right\} \right) \left(\left|\mathbf{R}\right|^{2} (\prod_{i=1}^{d} \left|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}\right|)^{-2} \right)$$

แต่ตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ในงานวิจัยนี้ คือ ค่าคาดหวังของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย

$$E[\mathbf{R}/\mathbf{x}] = \int \mathbf{R}\ \pi(\mathbf{R}/\mathbf{x})d\mathbf{R}$$

จากสมการพบว่าค่าคาดหวังของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียจะต้องทำการอินทิเกรทในหลายมิติ โดยเป็นเรื่องที่ยุ่งยาก

แต่ในงานวิจัยนี้จะใช้เทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล (Markov Chain Monte Carlo: MCMC) ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง (Metropolis-Hastings Algorithm) ในการประมาณค่าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์

โดยทำการสุ่มตัวอย่างจากการแจกแจงเป้าหมาย (Target Distribution) เพื่อนำมาหาค่าเฉลี่ยตัวอย่างแทนการอินทิกรัล (มอนติ คาร์โล อินทิเกรชั่น) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะถือว่า การแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียเป็นการแจกแจงเป้าหมาย

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_n \sim \pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x})$$

เพื่อนำมาหาค่าเฉลี่ยตัวอย่าง

$$\overline{\mathbf{R}} = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i$$

เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{R}$ เป็นค่าของตัวแปรสุ่มเมตริกซ์สหสัมพันธ์ Θ

แต่เนื่องจากการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียในงานวิจัยนี้ ไม่ได้เป็นการแจกแจงมาตราฐาน จึงทำการสุ่มตัวอย่างจากการแจกแจงทำได้ยาก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องอาศัยมาร์คอฟ เชน (Markov Chains) เพื่อจำลองลำดับของ $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots, \Theta_n$ ขึ้นมา จากกระบวนการมาร์คอฟ (Markov Process)

กำหนดให้ $\mathbf{R}_t$ เป็นค่าของตัวแปรสุ่มเมตริกซ์สหสัมพันธ์ Θ ณ เวลา t และกำหนดให้ State Space เป็นเซตของค่า $\mathbf{R}_t$ ที่สามารถเป็นได้, $\mathbf{R}_t \in \Omega$ โดยที่กระบวนการมาร์คอฟจะเกิดขึ้นได้ เมื่อความน่าจะเป็นในการเคลื่อนที่ระหว่างค่าที่เป็นไปได้ใน State Space ขึ้นอยู่กับค่าใน state ปัจจุบันเท่านั้น

$$P(\mathbf{R}_{t+1} \in A \mid \mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_t) = P(\mathbf{R}_{t+1} \in A \mid \mathbf{R}_t)$$

สำหรับเซต $A \subset \Omega$

โดยที่ $P(\mathbf{R}_{t+1} \in A / \mathbf{R}_t)$ อาจเขียนเป็น $P(\mathbf{R}_{t+1} : \mathbf{R}_t)$ โดยที่ $\int P(\mathbf{R}_{t+1} : \mathbf{R}_t) d\mathbf{R}_t = 1$ และจะเรียก $P(\mathbf{R}_{t+1} : \mathbf{R}_t)$ ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นของ Transition Kernel

เมื่อกำหนดให้กระบวนการข้างต้นเป็นแบบ Time-Homogeneous แล้ว $P(* : *)$ จะไม่ขึ้นกับ t ใดๆ ดังนั้นการแจกแจงของ Θ_t เมื่อกำหนด Θ_0 จะมีค่าเท่ากับ $P^{(t)}(\mathbf{R}_t : \mathbf{R}_0)$ โดยที่ Θ_t จะไม่ขึ้นอยู่กับ $(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{t-1})$ แต่จะขึ้นอยู่กับ Θ_0 เพียง

จากสมการของแชปแมน-โคโมโกรอฟ (Chapman-Komogorov Equation) จะได้ว่า

$$P^{(t+1)}(\mathbf{R}_{t+1} : \mathbf{R}_0) = \int P^{(t)}(\mathbf{R}_t : \mathbf{R}_0) P(\mathbf{R}_{t+1} : \mathbf{R}_t) d\mathbf{R}_t$$

และกระบวนการมาร์คอฟ เชน จะเป็นการแจกแจงเสถียรภาพ (Stationary distribution : $\pi(\cdot)$)

$$\pi(\mathbf{R}_{t+1}) = \int \pi(\mathbf{R}_t) P(\mathbf{R}_{t+1} : \mathbf{R}_t) d\mathbf{R}_t$$

ถ้า กระบวนการ มีคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

1. Irreducible
2. Aperiodic
3. Positive recurrent

Theorem[8] ถ้า $\mathbf{R}$ มีคุณสมบัติ positive recurrent และ aperiodic แล้ว $\mathbf{R}$ เป็นการแจกแจงเสถียรภาพ $\pi(\cdot)$ ที่เป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ unique โดยจะเรียก $\mathbf{R}$ เป็น ergodic และจะได้ว่า

1. $P^{(t)}(\mathbf{R}_{t+1} \in A \mid \mathbf{R}_0) \to \pi(A)$ เมื่อ $t \to \infty$ สำหรับทุกค่า
2. (Ergodic theorem) ถ้า $E_\pi[\mathbf{R} \mid \mathbf{x}] < \infty$ แล้ว

$$P\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \mathbf{R}_t \to E_\pi[\mathbf{R} \mid \mathbf{x}]\right] = 1$$

เมื่อ $E_\pi[\mathbf{R} \mid \mathbf{x}] = \int \mathbf{R}\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x}) d\mathbf{R}$

แต่เนื่องจากในงานวิจัยนี้กำหนดให้จำลองจากวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง (Metropolis-Hasting Algorithm: MH) โดยที่อัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้งนั้น จะทำการหาฟังก์ชันความหนาแน่นใหม่ขึ้นมา เพื่อมาแทนฟังก์ชันความหนาแน่นของ Transition Kernel $P(\mathbf{R}_{t+1} : \mathbf{R}_t)$ ซึ่งฟังก์ชันความหนาแน่นใหม่นี้จะเรียกว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นพรอพโพซอล (Proposal Density) $Q(* : \mathbf{R}_t)$ โดยที่สามารถกำหนดการแจกแจงของ $Q(* : \mathbf{R}_t)$ ได้

ซึ่งอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้งในเบื้องต้นนั้น มีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะจำลองตัวอย่างสุ่มจากการแจกแจงของ $\pi(\theta)$ และเมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยนี้ ก็จะพบว่าการแจกแจงของ $\pi(\theta)$ คือการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย $\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x})$ และอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง มีหลักการดังนี้

1. เริ่มจากการกำหนดให้ $t = 0$ และจุดเริ่มต้น $\mathbf{R}_0$ โดยที่ $\pi(\mathbf{R}_0 / \mathbf{x}) > 0$
2. ทำการสุ่มตัวแคนดิเดท (Candidate) $\mathbf{R}^{'}$ จากการแจกแจงของ $Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t)$ โดยจะถือว่าตัวแคนดิเดทนี้เป็นตัวกลางของการเคลื่อนที่จากตัวอย่างปัจจุบัน $\mathbf{R}_t$ ไปตัวอย่างถัดไป $\mathbf{R}^{t+1}$
3. คำนวณหาความน่าจะเป็นในการเคลื่อนที่ (Acceptance Probability) โดยจะเป็นอัตราส่วนของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียกับฟังก์ชันความหนาแน่นพรอพโพซอล ระหว่างตัวอย่างปัจจุบัน กับตัวแคนดิเดท

$$\alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'}) = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\pi(\mathbf{R}^{'} \mid \mathbf{x}) Q(\mathbf{R}_t : \mathbf{R}^{'})}{\pi(\mathbf{R}_t \mid \mathbf{x}) Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t)}, 1 \right\} & \text{เมื่อ } \pi(\mathbf{R}_t \mid \mathbf{x}) Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t) > 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } \pi(\mathbf{R}_t \mid \mathbf{x}) Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t) = 0 \end{cases}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'}) = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}^{'}) h(\mathbf{R}^{'}) Q(\mathbf{R}_t : \mathbf{R}^{'})}{f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}_t) h(\mathbf{R}_t) Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t)}, 1 \right\} & \text{เมื่อ } f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}_t) h(\mathbf{R}_t) Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t) > 0 \\ 1 & \text{เมื่อ } f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}_t) h(\mathbf{R}_t) Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t) = 0 \end{cases}$$

เนื่องจาก $\pi(\mathbf{R} \mid \mathbf{x}) = \dfrac{f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}) h(\mathbf{R})}{\int f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}) h(\mathbf{R}) d\mathbf{R}}$ และจะพบว่าอัตราส่วนนี้จะทำให้ค่าคงที่ $\int f(\mathbf{x} \mid \mathbf{R}) h(\mathbf{R}) d\mathbf{R}$ หายไป

4. สร้างเลขสุ่มของการยอมรับ $U \sim uniform(0,1)$

$$\mathbf{R}_{t+1} = \begin{cases} \mathbf{R}^{'} & \text{เมื่อ } u < \alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'}) \text{ , ด้วยความน่าจะเป็น } \alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'}) \\ \mathbf{R}^{t} & \text{เมื่อ } u \geq \alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'}) \text{ , ด้วยความน่าจะเป็น } 1 - \alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'}) \end{cases}$$

<u>หมายเหตุ</u> การกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอล $Q(*:*)$ เป็นแบบใดนั้นจะไม่ส่งผลต่อการแจกแจงที่ต้องการ $\pi(\cdot)$ แต่จะมีผลกับอัตราการลู่เข้าสู่การแจกแจงที่ต้องการ $\pi(\cdot)$ โดยถ้ากำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลเหมาะสมกับการแจกแจงที่ต้องการ $\pi(\cdot)$ แล้วจะทำให้อัตราการลู่เข้าสูง

จากอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง จะพบว่าต้องมีการกำหนดการแจกแจงมาตราฐานให้กับฟังก์ชันความหนาแน่นพรอพโพซอล $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t)$ โดยในงานวิจัยนี้ได้แบ่งประเภทการแจกแจงพรอพโพซอล (Proposal Distribution) ของตัวแคนดิเดท $\mathbf{R}^{'}$ ออกเป็น 2 แบบ คือ

1. Independence Chain
2. Ball Walk

3.5.3 Independence Chain

การเลือกประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain นั้น จะหมายความถึงว่า ความน่าจะเป็นของการเคลื่อนที่จากตัวอย่างปัจจุบัน $\mathbf{R}^{t}$ ไปที่ตัวแคนดิเดท $\mathbf{R}^{'}$ มีความเป็นอิสระกัน นั่นก็คือ $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t)=g(\mathbf{R}^{'})$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\alpha(\mathbf{R}_t,\mathbf{R}^{'})=\min\left(\frac{w(\mathbf{R}^{'})}{w(\mathbf{R}_t)},1\right)$$

เมื่อ $w(\mathbf{R}_t)=f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{R}_t)h(\mathbf{R}_t)/g(\mathbf{R}_t)$

โดยในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ $g(\mathbf{R}^{'})$ มีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอ บนเซต $\Omega^{'}_3$

$$\Omega^{'}_3=\left\{\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}^{'}=\mathbf{R}^{'T},\mathbf{R}^{'}\geq 0,\mathbf{R}^{'}_{ii}=1 \text{ เมื่อ } i=1,2,3\right\}$$

ซึ่งเป็นขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และสมมาตร ดังนั้นจะสามารถเขียนฟังก์ชันความหนาแน่นได้ดังนี้

$$g(\mathbf{R}^{'})=\begin{cases}\dfrac{1}{vol(\Omega^{'}_3)} & \text{เมื่อ } \mathbf{R}^{'}\in\Omega^{'}_3\\[2ex] 0 & \text{เมื่อ } \mathbf{R}^{'}\notin\Omega^{'}_3\end{cases}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$g(\mathbf{R}^{'})\propto 1$$

และจะทำสุ่มตัวอย่าง $\mathbf{R}^{'}$ ด้วยวิธี Onion ของ Ghosh and Henderson(2004) โดยมีหลักการดังนี้

1. กำหนดให้ $\mathbf{R}^{'}_{1}$ เป็นเมตริกซ์ 1 ขนาด 1×1
2. สำหรับ $k = 2,3$
3. จำลอง $y \sim beta((k-1)/2,(5-k)/2)$
4. ให้ $r = \sqrt{y}$
5. จำลอง $\mathbf{U} \sim N_{k-1}(0,\mathbf{I})$
6. ให้ $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{U}/\|\mathbf{U}\|$
7. ให้ $\mathbf{w} = r\boldsymbol{\theta}$
8. ให้ $\mathbf{q} = \mathbf{R}^{'\frac{1}{2}}_{k-1}\mathbf{w}$ เมื่อ $\mathbf{R}^{'\frac{1}{2}}_{k-1}$ คือเมตริกซ์อินเวอร์สของเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนขององค์ประกอบ โชเลสกี้ของ $\mathbf{R}^{'-1}_{k-1}$
9. ให้ $\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{k-1} & \mathbf{q} \\ \mathbf{q}^t & 1 \end{bmatrix}$
10. k ต่อไป

3.5.4 Ball Walk

จากการเลือกประเภทการแจกแจงพรอพโพซอล เป็นแบบ Ball Walk โดย Lovasz and M. Simonovits (1992) นั้น จะหมายความถึงว่า ความน่าจะเป็นของการเคลื่อนที่จากตัวอย่างปัจจุบัน $\mathbf{R}_t$ ไปที่ตัวแคนดิเดท $\mathbf{R}^{'}$ มีค่าเท่ากับ ความน่าจะเป็นของการเคลื่อนที่จากตัวแคนดิเดท $\mathbf{R}^{'}$ ไปที่ตัวอย่างปัจจุบัน $\mathbf{R}_t$ นั่นก็คือ $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t) = Q(\mathbf{R}_t:\mathbf{R}^{'})$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\alpha(\mathbf{R}_t,\mathbf{R}^{'}) = \min\left(\frac{f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{R}^{'})h(\mathbf{R}^{'})}{f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{R}_t)h(\mathbf{R}_t)},1\right)$$

โดยในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}^{t})$ มีแจกแจงแบบสม่ำเสมอ บนบอลที่มีรัศมี $\delta = 0.125$ และมีจุดศูนย์กลางที่ $\mathbf{R}_t$ ซึ่งจะมีหลักการดังนี้

1. สุ่มตัวอย่าง $\mathbf{R}^{'}$ แจกแจงแบบสม่ำเสมอ บนบอลที่มีรัศมี $\delta = 0.125$ และมีจุดศูนย์กลางที่ $\mathbf{R}_t$ โดยมีวิธีการสุ่มดังนี้
    1. จำลอง $\mathbf{U} \sim N_d(0,\mathbf{I})$
    2. จำลอง $\eta \sim U(0,1)$
    3. ให้ $\mathbf{U}^{'} = (0.125 * \eta^{1/(n-1)})(\mathbf{U}/\|\mathbf{U}\|)$
    4. $\mathbf{R}^{'} = \mathbf{U}^{'} - \mathbf{R}^{t}$

2. ถ้า $\mathbf{R}^{'} \in \Omega_3$ แล้วจะให้ $\mathbf{R}^{'} = \mathbf{R}^{'}$

แต่ถ้า $\mathbf{R}^{'} \notin \Omega_3$ แล้วจะให้ $\mathbf{R}^{'} = \mathbf{R}_t$

เมื่อ $\Omega_3 = \left\{\mathbf{R} : \mathbf{R} = \mathbf{R}^T, \mathbf{R} \geq 0, \mathbf{R}_{ii} = 1 \text{ เมื่อ } i = 1,2,3\right\}$ ซึ่งเป็นขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และสมมาตร

สรุปขั้นตอนการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง

จากขั้นตอนการศึกษาที่กล่าวมา พบว่าในงานวิจัยนี้ได้แบ่งวิธีการหาตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล และอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ออกเป็น 4 วิธี ตามการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกและการกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอล ได้ดังนี้

1. Joint Uniform Distribution / Independence Chain
2. Joint Uniform Distribution / Ball Walk
3. Marginal Uniform Distribution / Independence Chain
4. Marginal Uniform Distribution / Ball Walk

โดยในแต่ละวิธีนั้นจะมีขั้นตอนในการหาตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล และอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ดังนี้

1. กำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.0},\ \mathbf{0.1},\ \mathbf{0.5}$ และ $\mathbf{0.9}$
2. กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบของเมตริกซ์สหสัมพันธ์เป็น $m = 3, 10, 30$ และ 100
3. สำหรับ $iteration = 1, 2, \ldots, 30$
4. จำลองข้อมูล เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบ เท่ากัน ตามที่กำหนด
5. กำหนดจุดเริ่มต้น $\mathbf{R}_0 = \mathbf{I}$
6. สุ่มตัวแคนดิเดท $\mathbf{R}^{'}$ จากการแจกแจงของ $Q(\mathbf{R}^{'} : \mathbf{R}_t)$ ตามการกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอล
    - แบบ Independence Chain ใช้วิธี Onion
    - แบบ Ball Walk ใช้วิธี Ball Walk
7. คำนวณหาความน่าจะเป็นในการเคลื่อนที่ $\alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'})$ ตามวิธีที่กำหนด

8. จำลองเลขสุ่มของการยอมรับ $U \sim uniform(0,1)$
9. ถ้า $u < \alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'})$ แล้วให้ $\mathbf{R}_{t+1} = \mathbf{R}^{'}$
   แต่ถ้า $u \geq \alpha(\mathbf{R}_t, \mathbf{R}^{'})$ แล้วให้ $\mathbf{R}_{t+1} = \mathbf{R}_t$
10. แปลง $\mathbf{R}$ ให้เป็นเวกเตอร์องค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $\mathbf{r}$
11. กำหนดการ Burn-in 1,000 ค่า
12. ตรวจสอบการหยุดการจำลองจากระยะทางยูคลีเดียน เมื่อ $c = 1,2,\ldots 100$
   ถ้า $\left\|\mathbf{r}^{t-c} - \mathbf{r}^{t}\right\| \leq 0.0001$ แล้ว ไปขั้นตอนที่ 14
   แต่ถ้า $\left\|\mathbf{r}^{t-c} - \mathbf{r}^{t}\right\| > 0.0001$ แล้ว ไปขั้นตอนที่ 7
13. ให้ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes} = \dfrac{\sum_{i=1}^{t} \mathbf{r}_i}{t}$
14. ถ้า $iteration < 30$ ไปขั้นตอนที่ 3
15. ถ้า $m < 100$ ไปขั้นตอนที่ 2
16. ถ้า $\mathbf{r} < \mathbf{0.9}$ ไปขั้นตอนที่ 1
17. จบการทำงาน

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

เนื่องจากในงานวิจัยนี้ มุ่งเน้นไปที่การประมาณค่าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันซึ่งมีวัตถุประสงค์หลักเพื่อแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ โดยจะศึกษาในกรณีที่ข้อมูลมี 3 มิติ และเพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์ข้อมูล ผู้วิจัยจึงทำการแปลงเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $(\mathbf{R})$ ในกรณีต่างๆ ดังนี้

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_{12} & r_{13} & r_{23} \end{bmatrix}^T$ คือ เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง เมื่อ $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix}$ มีลักษณะสมมาตร โดยที่ $\mathbf{r} \in \Re^3$

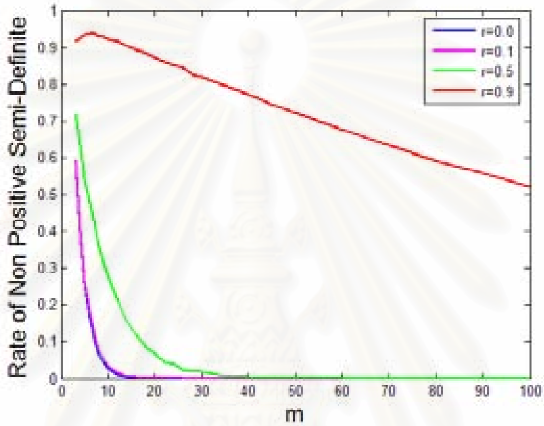
<u>นิยาม</u> กำหนดให้ $\hat{\mathbf{r}}_{MVUE} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{12}^* & \hat{r}_{13}^* & \hat{r}_{23}^* \end{bmatrix}^T$ คือ เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ เมื่อ $\hat{\mathbf{R}}_{MVUE} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{12}^* & \hat{r}_{13}^* \\ \hat{r}_{21}^* & 1 & \hat{r}_{23}^* \\ \hat{r}_{31}^* & \hat{r}_{32}^* & 1 \end{bmatrix}$ มีลักษณะสมมาตร โดยที่ $\hat{\mathbf{r}}_{MVUE} \in \Re^3$

<u>นิยาม</u> กำหนดให้ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes} = \begin{bmatrix} \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13} & \hat{r}_{23} \end{bmatrix}^T$ คือ เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อ $\hat{\mathbf{R}}_{Bayes} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_{12} & \hat{r}_{13} \\ \hat{r}_{21} & 1 & \hat{r}_{23} \\ \hat{r}_{31} & \hat{r}_{32} & 1 \end{bmatrix}$ มีลักษณะสมมาตร โดยที่ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes} \in \Re^3$

เพื่อลดจำนวนการวิเคราะห์ข้อมูลลง ดังนั้นการวิเคราะห์ข้อมูลจะสามารถแบ่งออกได้เป็นหัวข้อใหญ่ๆดังนี้

4.1 อัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{r}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน

ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้หลักการของ Superdiagonalization ในการตรวจสอบคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{r}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยจะทำการจำลอง 10,000 รอบ ตามขั้นตอนในบทที่ 3 (หน้า 23)



ภาพที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{r}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยกำหนดให้ $\mathbf{r}$ เป็น **0.0, 0.1, 0.5** และ **0.9**

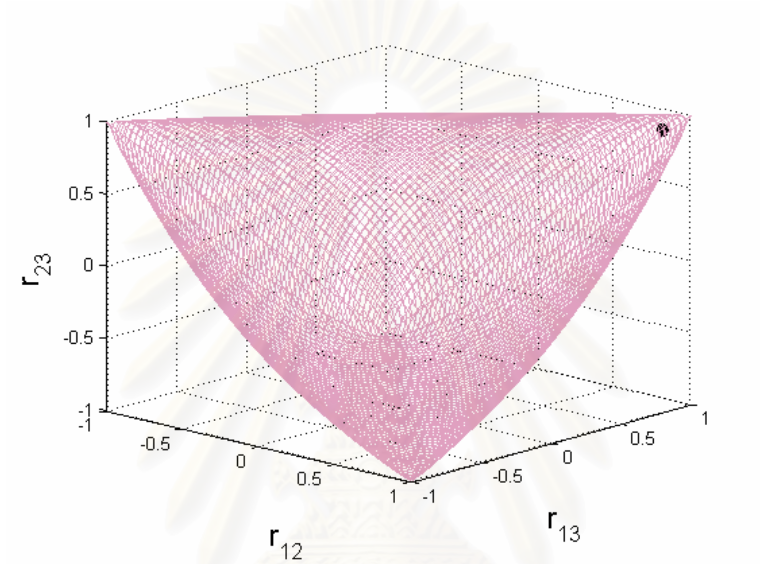
เมื่อ m คือ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์

จากภาพที่ 4.1 พบว่าเมื่อกำหนดให้ข้อมูลมีความสัมพันธ์กันในระดับสูง ($\mathbf{r}$ เป็น **0.9**) ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{r}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันจะมีอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite สูงที่สุด รองลงมา คือการกำหนดให้ $\mathbf{r}$ เป็น **0.5**, **0.1** และ **0.0** ตามลำดับ โดยที่อัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite จะมีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ (m) มากขึ้น

แต่มีสิ่งที่น่าสังเกตอย่างหนึ่ง คือ เมื่อกำหนดให้ $\mathbf{r}$ เป็น **0.9** แล้ว อัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite มีค่าอยู่ในเกณฑ์ที่ค่อนข้างสูงมาก โดยไม่ว่า m จะมากขึ้นก็ตาม เช่น เมื่อ $m = 3$ จะมีอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite เป็น 0.915 (โดยตารางแสดงอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite แสดงอยู่ในภาคผนวก) ส่วนเมื่อ $m = 100$ แล้ว อัตรา

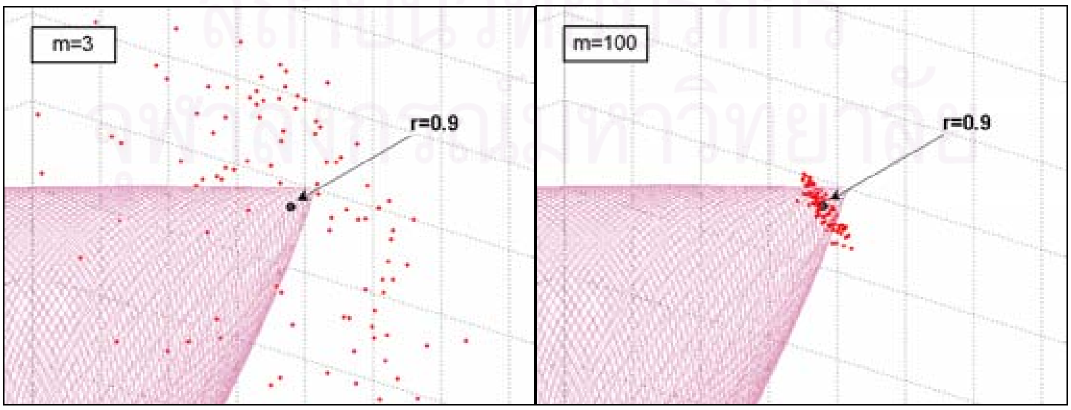
การขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite จะลดลงเป็น 0.520 โดยจะต่างกับการกำหนดให้ $\mathbf{r}$ เป็น $\mathbf{0.5}$, $\mathbf{0.1}$ และ $\mathbf{0.0}$ ที่เมื่อ $m = 14, 16,$ และ 40 ตามลำดับ แล้วอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite จะมีค่าประมาณ 0.00

เมื่อพิจารณาสาเหตุที่ทำให้ การกำหนด $\mathbf{r}$ เป็น $\mathbf{0.9}$ แล้ว อัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ถึงมีค่าค่อนข้างสูง เนื่องมาจากตำแหน่งของ $\mathbf{r}$ จะอยู่บริเวณส่วนมุมของขอบเขตเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ดังนั้นเมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายก็จะทำให้ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{r}}_{MVUE}$) มีโอกาสออกนอกขอบเขตได้มาก ดังภาพที่ 4.2



ภาพที่ 4.2 แสดงตำแหน่งของ $\mathbf{r}$ เมื่อ $\mathbf{r}$ เป็น $\mathbf{0.9}$ ในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

ส่วนสาเหตุที่ทำให้อัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มากขึ้น เนื่องจากความผิดพลาดในการประมาณจะมีค่าลดลงเมื่อข้อมูลมีจำนวนมากขึ้น ดังภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบการกระจายของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบ Equal Loss โดยกำหนดให้ $\mathbf{r}$ เป็น $\mathbf{0.9}$ และ $m = 3$ กับ $m = 100$

4.2 ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง

ในงานวิจัยนี้ได้แบ่งวิธีการหาตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง ออกเป็น 4 วิธี ตามการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกและการกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอล ดังนี้

1. Joint Uniform Distribution / Independence Chain
2. Joint Uniform Distribution / Ball Walk
3. Marginal Uniform Distribution / Independence Chain
4. Marginal Uniform Distribution / Ball Walk

โดยในงานวิจัยนี้ จะศึกษาในกรณีที่ข้อมูลมี 3 มิติ ภายใต้การกำหนดโครงสร้างของข้อมูล ดังนี้

1. ความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยกำหนดให้เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง (**r**) เป็น **0.0, 0.1, 0.5** และ **0.9**
2. ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ (m) เป็น 3, 10, 30 และ 100

ซึ่งในแต่ละสถานการณ์จะทำการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบ เท่ากันตามขั้นตอนที่แสดงในบทที่ 3 (หน้า 37) โดยกำหนดให้ในแต่ละวิธีนั้น ตัดการจำลองเบื้องต้น (Burn-in) ออกไป 1,000 ตัวแรก และจะหยุดการจำลองเมื่อระยะทางยูคลีเดียนของการจำลอง 100 ค่าสุดท้ายมีความแตกต่างกันน้อยกว่า 0.0001 ซึ่งจะทำการจำลองทั้งหมด 30 รอบ โดยสามารถแสดงตารางสรุปผลการจำลองในสถานการณ์ ต่างๆได้ดังนี้ (ผลการจำลองทั้งหมดจะแสดงเป็นตารางในภาคผนวก)

ตารางที่ 4.1 แสดงตารางสรุปค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution ในสถานการณ์ต่างๆ

Ture Correlation		**m**		**Joint Uniform Distribution**							
				Independence Chain				**Ball Walk**			
				Baye's Estimator			**Iteration**	**Baye's Estimator**			**Iteration**
				r_{12}	**r_{13}**	**r_{23}**		**r_{12}**	**r_{13}**	**r_{23}**	
Independence	**0.0**	3	Mean	-0.010	0.060	0.008	54,528.7	-0.015	0.062	0.016	88,852.9
			Std	0.275	0.238	0.256		0.273	0.241	0.249	
		10	Mean	0.042	0.000	0.045	46,954.8	0.045	0.000	0.045	63,374.3
			Std	0.217	0.272	0.216		0.218	0.272	0.217	
		30	Mean	0.051	0.015	0.006	37,181.2	0.050	0.014	0.005	39,521.4
			Std	0.153	0.169	0.172		0.154	0.169	0.172	
		100	Mean	0.023	-0.020	-0.012	32,287.7	0.024	-0.017	-0.013	20,807.3
			Std	0.079	0.105	0.100		0.078	0.106	0.103	
Dependence	**0.1**	3	Mean	0.024	0.036	0.008	54,627.1	0.022	0.028	0.006	88,339.3
			Std	0.304	0.262	0.261		0.305	0.266	0.269	
		10	Mean	0.069	0.016	0.088	49,361.9	0.072	0.017	0.089	62,895.9
			Std	0.226	0.184	0.283		0.227	0.189	0.284	
		30	Mean	0.148	0.109	0.065	40,083.9	0.146	0.109	0.065	38,995.3
			Std	0.151	0.159	0.166		0.152	0.158	0.166	
		100	Mean	0.093	0.104	0.081	31,406.1	0.093	0.104	0.082	21,337.0
			Std	0.104	0.087	0.142		0.108	0.084	0.143	
	0.5	3	Mean	0.192	0.227	0.285	55,900.3	0.194	0.231	0.291	85,441.3
			Std	0.207	0.254	0.252		0.215	0.257	0.250	
		10	Mean	0.339	0.309	0.323	47,941.0	0.337	0.309	0.321	60,216.7
			Std	0.205	0.185	0.231		0.204	0.184	0.229	
		30	Mean	0.459	0.416	0.443	38,165.4	0.459	0.414	0.444	33,055.8
			Std	0.119	0.100	0.089		0.120	0.100	0.088	
		100	Mean	0.493	0.497	0.478	31,715.7	0.492	0.496	0.476	14,297.7
			Std	0.079	0.085	0.084		0.079	0.084	0.083	
	0.9	3	Mean	0.680	0.612	0.635	62,983.0	0.679	0.608	0.633	67,269.0
			Std	0.108	0.186	0.167		0.106	0.184	0.178	
		10	Mean	0.843	0.849	0.849	29,444.5	0.848	0.847	0.847	18,895.2
			Std	0.055	0.069	0.065		0.053	0.062	0.062	
		30	Mean	0.882	0.874	0.872	26,660.6	0.883	0.876	0.877	10,391.7
			Std	0.023	0.033	0.040		0.020	0.034	0.036	
		100	Mean	0.878	0.893	0.890	18,485.8	0.892	0.898	0.893	10,143.3
			Std	0.029	0.022	0.017		0.015	0.019	0.014	

ตารางที่ 4.2 แสดงตารางสรุปค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution ในสถานการณ์ต่างๆ

Ture Correlation		m		Marginal Uniform Distribution							
				Independence Chain				Ball Walk			
				Baye's Estimator			Iteration	Baye's Estimator			Iteration
				r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}	
Independence	**0.0**	3	Mean	-0.013	0.021	0.019	44,646.5	-0.014	0.025	0.017	53,573.2
			Std	0.102	0.086	0.107		0.103	0.086	0.107	
		10	Mean	0.015	0.001	0.021	38,689.7	0.016	-0.001	0.020	38,957.4
			Std	0.088	0.096	0.083		0.087	0.095	0.080	
		30	Mean	0.016	0.002	0.001	32,560.7	0.017	0.003	0.001	24,008.8
			Std	0.054	0.060	0.063		0.055	0.057	0.061	
		100	Mean	0.008	-0.007	-0.005	28,821.0	0.008	-0.006	-0.004	12,128.7
			Std	0.028	0.039	0.034		0.026	0.036	0.034	
Dependence	**0.1**	3	Mean	0.017	0.021	0.012	47,265.2	0.018	0.020	0.011	59,588.4
			Std	0.117	0.101	0.091		0.121	0.098	0.089	
		10	Mean	0.025	0.008	0.040	40,550.9	0.023	0.009	0.039	41,960.4
			Std	0.080	0.063	0.110		0.079	0.061	0.111	
		30	Mean	0.049	0.035	0.025	30,734.9	0.051	0.039	0.024	22,582.3
			Std	0.056	0.055	0.057		0.055	0.054	0.057	
		100	Mean	0.032	0.037	0.028	28,635.7	0.032	0.034	0.029	11,953.3
			Std	0.034	0.031	0.046		0.035	0.028	0.045	
	0.5	3	Mean	0.067	0.087	0.103	46,625.0	0.065	0.086	0.101	60,705.6
			Std	0.086	0.105	0.100		0.090	0.107	0.100	
		10	Mean	0.127	0.114	0.113	42,292.2	0.128	0.113	0.115	39,712.5
			Std	0.090	0.070	0.076		0.087	0.072	0.074	
		30	Mean	0.171	0.146	0.152	33,414.7	0.171	0.145	0.153	23,412.4
			Std	0.063	0.048	0.046		0.063	0.047	0.041	
		100	Mean	0.173	0.175	0.170	29,772.9	0.173	0.175	0.167	12,136.8
			Std	0.032	0.034	0.036		0.029	0.033	0.034	
	0.9	3	Mean	0.211	0.177	0.184	46,046.3	0.208	0.175	0.179	60,003.3
			Std	0.104	0.088	0.080		0.105	0.084	0.081	
		10	Mean	0.291	0.294	0.283	38,305.8	0.290	0.293	0.283	41,746.2
			Std	0.065	0.090	0.063		0.067	0.090	0.066	
		30	Mean	0.326	0.307	0.322	31,596.4	0.326	0.306	0.323	23,269.5
			Std	0.053	0.040	0.060		0.052	0.043	0.059	
		100	Mean	0.341	0.340	0.346	28,690.1	0.342	0.340	0.347	12,669.5
			Std	0.026	0.022	0.032		0.026	0.022	0.031	

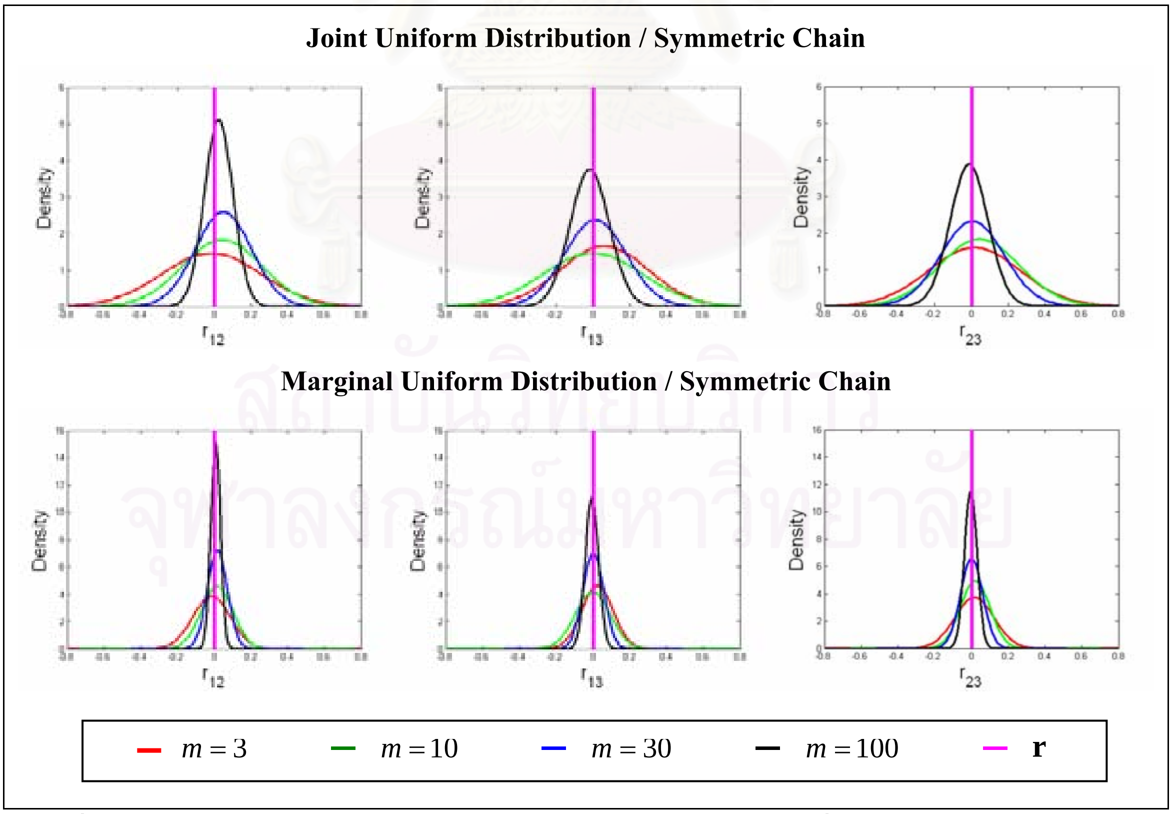
4.2.1 การวิเคราะห์เปรียบเทียบค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกต่างกัน

เนื่องจากในงานวิจัยนี้ ได้แบ่งการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรก ออกเป็น 2 แบบ คือ

1. Joint Uniform Distribution
2. Marginal Uniform Distribution

ซึ่งการวิเคราะห์เปรียบเทียบค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกนี้ จะทำภายใต้การกำหนดประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Ball Walk เนื่องจากตามหลักการของอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง (Metropolis-Hasting Algorithm: MH) แล้ว พบว่า ไม่ว่าจะกำหนดประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบใดก็ตามค่าประมาณที่ได้จากการจำลองจะลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันเสมอ (ซึ่งผลการจำลองในตารางที่ 4.1 และ 4.2 ก็จะให้ค่าประมาณใกล้เคียงกัน โดยไม่ว่าจะเป็นแบบ Independence Chain หรือ Ball Walk) โดยจะได้ผลการวิเคราะห์ดังนี้

เวกเตอร์ขององค์ประกอบเหนือเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง (r) เป็น 0.0



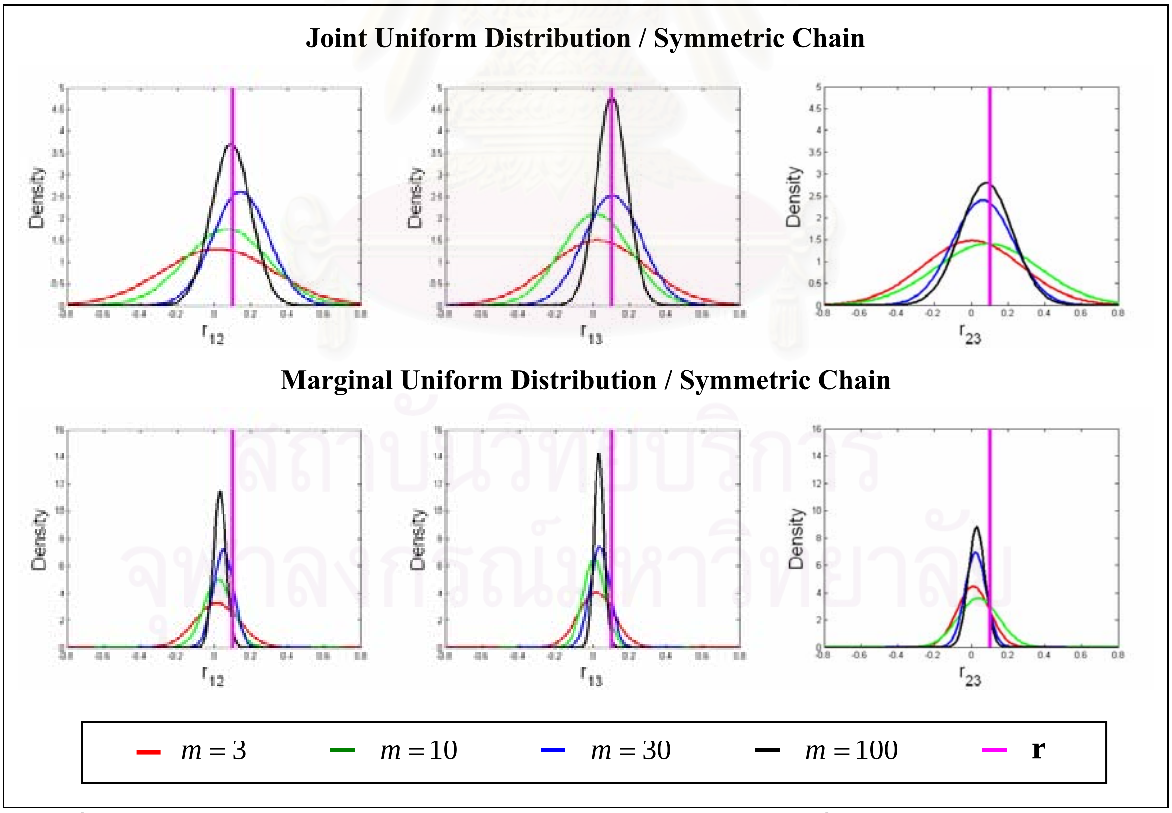
ภาพที่ 4.4 แสดงลักษณะการแจกแจงในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = 0.0$

เมื่อกำหนดให้โครงสร้างของข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน จากภาพที่ 4.4 พบว่าในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution หรือ Marginal Uniform Distribution จะมีความถูกต้อง (Accuracy) ในการประมาณค่า ใกล้เคียงกับ $\mathbf{r}$ พอๆกัน โดยไม่ว่าจะกำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัม- พันธ์ (m) จำนวนเท่าใดก็ตาม

และเมื่อพิจารณาช่วงการกระจายในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ หรือพิจารณาที่ค่าเบี่ยงเบนมาตราฐาน จากตารางที่ 4.1และ 4.2 จะพบว่าค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution มีค่าน้อยกว่า เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution โดยไม่ว่า m มีจำนวนเท่าใดก็ตาม

นั่นหมายความว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะมีความแม่นยำ (Precision) ในการประมาณค่า มากกว่าการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution

กำหนดให้เวกเตอร์ขององค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่อยู่เหนือเส้นทะแยงมุม (r) เป็น 0.1



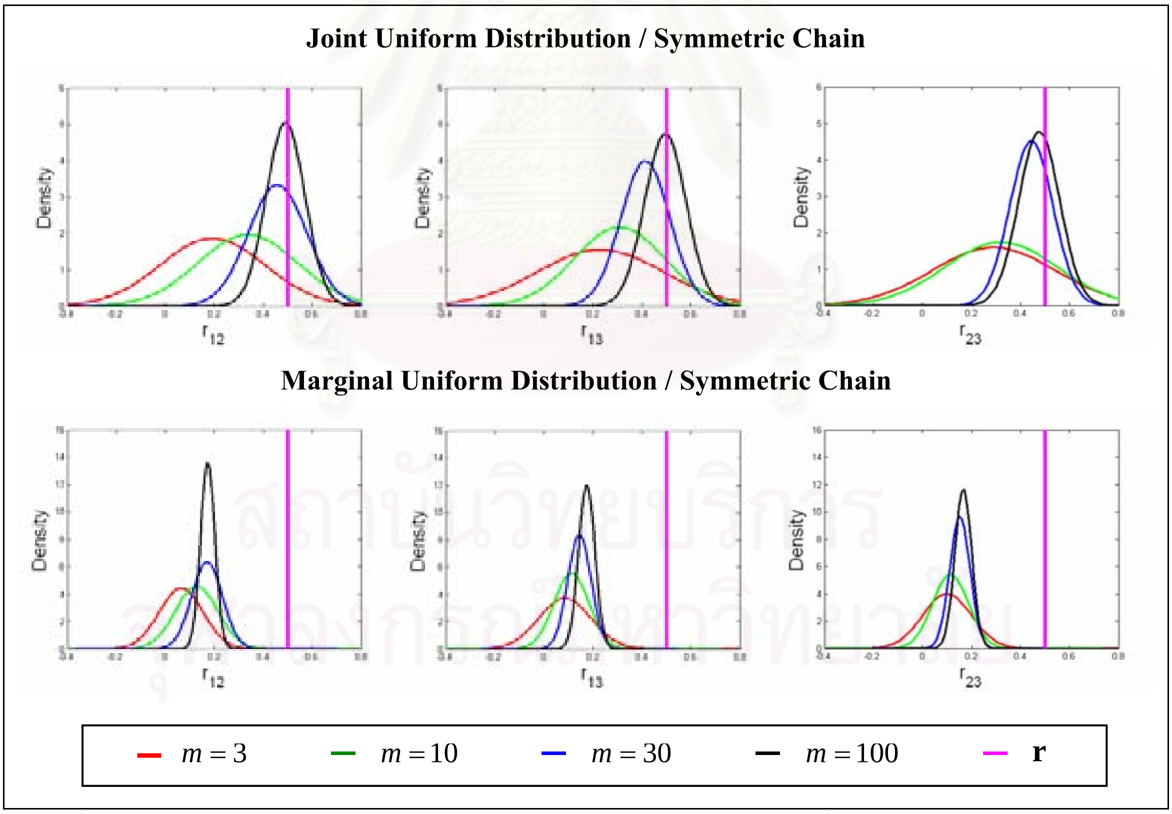
ภาพที่ 4.5 แสดงลักษณะการแจกแจงในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.1}$

เมื่อกำหนดให้โครงสร้างของข้อมูลมีความสัมพันธ์กันในระดับน้อย จากภาพที่ 4.5 พบว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution จะมีความถูกต้องในการประมาณค่า ใกล้เคียงกับ $\mathbf{r}$ มากกว่า เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution เล็กน้อย

และเมื่อพิจารณาช่วงของการกระจายก็จะพบว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะมีการกระจายในช่วงที่แคบกว่า (ค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานน้อยกว่า) เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution โดยไม่ว่าจะกำหนด m มีจำนวนเท่าใดก็ตาม

นั่นจะหมายความว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะมีความแม่นยำ (Precision) ในการประมาณค่า มากกว่าการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution

กำหนดให้เวกเตอร์ขององค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่อยู่เหนือเส้นทะแยงมุม (r) เป็น 0.5



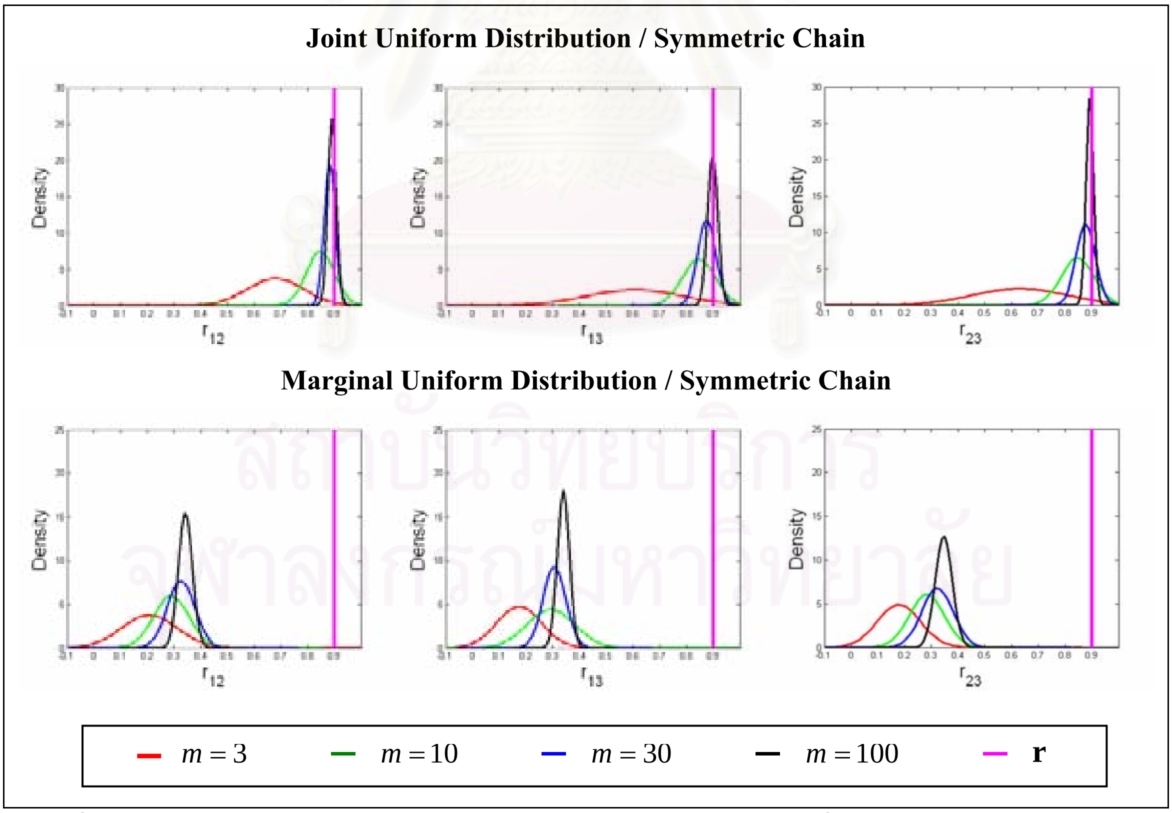
ภาพที่ 4.6 แสดงลักษณะการแจกแจงในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.5}$

เมื่อกำหนดให้โครงสร้างของข้อมูลมีความสัมพันธ์กันในระดับปานกลาง จากภาพที่ 4.6 พบว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution จะมีความถูกต้องในการประมาณค่า ใกล้เคียงกับ $\mathbf{r}$ เมื่อ m มีจำนวนมากขึ้น ส่วนในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะไม่มีความถูกต้องในการประมาณค่า ใกล้เคียงกับ $\mathbf{r}$ เลย โดยไม่ว่า m มีจำนวนเท่าใดก็ตาม

และเมื่อพิจารณาช่วงของการกระจายก็จะพบว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะมีการกระจายในช่วงที่แคบกว่า (ค่าเบี่ยงเบนมาตราฐานน้อยกว่า) เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution โดยไม่ว่า m มีจำนวนเท่าไรก็ตาม

นั่นจะหมายความว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution มีความแม่นยำ (Precision) ในการประมาณค่า มากกว่าการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution

กำหนดให้เวกเตอร์ขององค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่อยู่เหนือเส้นทะแยงมุม ($\mathbf{r}$) เป็น 0.9



ภาพที่ 4.7 แสดงลักษณะการแจกแจงในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$

เมื่อกำหนดให้โครงสร้างของข้อมูลมีความสัมพันธ์กันในระดับสูง จากภาพที่ 4.7 พบว่า ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution จะมีความถูกต้องในการประมาณค่า ใกล้เคียงกับ $\mathbf{r}$ เมื่อ m มีจำนวนมากขึ้น ส่วนในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะไม่มีความถูกต้องในการประมาณค่า ใกล้เคียงกับ $\mathbf{r}$ เลย โดยไม่ว่า m มีจำนวนเท่าใดก็ตาม

และเมื่อพิจารณาช่วงของการกระจาย จะพบว่าในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution และ Marginal Uniform Distribution จะมีการกระจายอยู่ในช่วงพอๆกัน (ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าใกล้เคียงกัน) โดยไม่ว่า m มีจำนวนเท่าใดก็ตาม

นั่นจะหมายความว่าในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution และMarginal Uniform Distribution จะมีความแม่นยำ (Precision) ในการประมาณค่าพอๆกัน

แต่จากการวิเคราะห์ที่กล่าวมานั้น อาจยังไม่สามารถสรุปได้ว่า $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็นแบบใดจะดีกว่ากัน เนื่องจากต้องพิจารณาแยกในแต่ละองค์ประกอบเปรียบเทียบกัน ดังนั้นในงานวิจัยนี้ จะใช้เกณฑ์ของระยะทางยูคลีเดียน (Euclidean Distance) เทียบกับ $\mathbf{r}$ เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ แบบต่างๆ โดยที่

$$\overline{\text{Euclidean Distance}} = \frac{\sum_{i=1}^{30} \sqrt{(\hat{\mathbf{r}}_{Bayes(i)} - \mathbf{r}_i)^T (\hat{\mathbf{r}}_{Bayes(i)} - \mathbf{r}_i)}}{30}$$

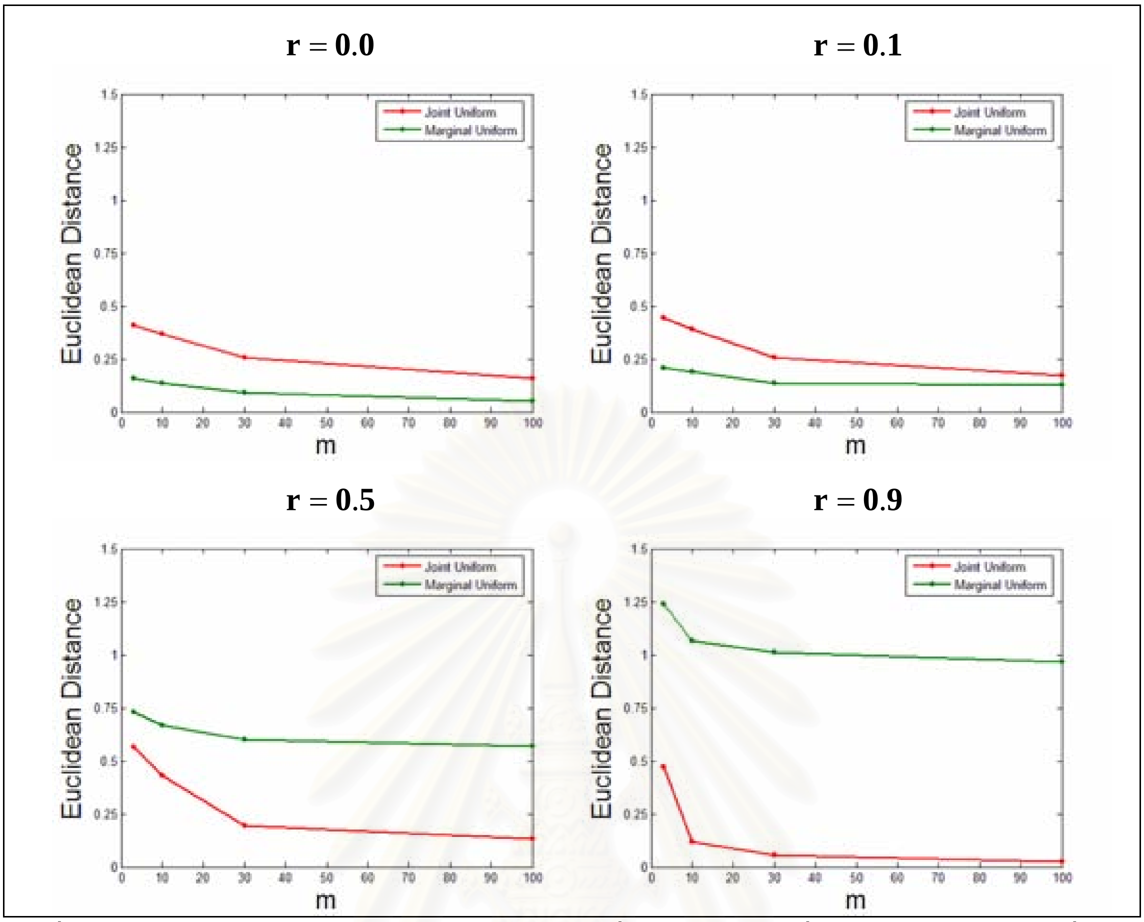
เมื่อ

$\hat{\mathbf{r}}_{Bayes} = [\hat{r}_{12} \quad \hat{r}_{13} \quad \hat{r}_{23}]^T$

คือ เวกเตอร์องค์ประกอบของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์

$\mathbf{r} = [r_{12} \quad r_{13} \quad r_{23}]^T$

คือ เวกเตอร์องค์ประกอบของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริง



ภาพที่ 4.8 แสดงการเปรียบเทียบระยะทางยูคลีเดียนเฉลี่ยของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution และ Marginal Uniform Distribution โดยกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.0}$, $\mathbf{0.1}$, $\mathbf{0.5}$ และ $\mathbf{0.9}$

จากภาพที่ 4.8 จะพบว่าเมื่อข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน $(\mathbf{r} = \mathbf{0.0})$ และความสัมพันธ์กันในระดับน้อย $(\mathbf{r} = \mathbf{0.1})$ แล้ว $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะมีระยะทางยูคลีเดียนเฉลี่ยสั้นกว่า (ประมาณค่าได้ใกล้เคียงกว่า) $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution โดยไม่ว่าขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ (m) มีจำนวนเท่าใดก็ตาม และระยะทางยูคลีเดียนเฉลี่ยก็จะมีแนวโน้มสั้นลง เมื่อ m มีจำนวนมากขึ้น

ส่วนเมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กันในระดับปานกลาง $(\mathbf{r} = \mathbf{0.5})$ และความสัมพันธ์ในระดับสูง $(\mathbf{r} = \mathbf{0.9})$ แล้ว จะพบว่า $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution จะมีระยะทางยูคลีเดียนเฉลี่ยสั้นกว่า (ประมาณค่าได้ใกล้เคียงกว่า) $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution โดยไม่ว่า m มีจำนวนเท่าไรก็ตาม

ดังนั้นจะสามารถสรุปการวิเคราะห์เปรียบเทียบ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบ Equal Loss โดยที่กำหนดการแจกแจงเริ่มแรกต่างกันได้ดังนี้

ตารางที่ 4.3 สรุปความถูกต้องในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$, ความแม่นยำในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ และระยะทางยูคลีเดียนของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อเทียบกับ $\mathbf{r}$ โดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution และ Marginal Uniform Distribution

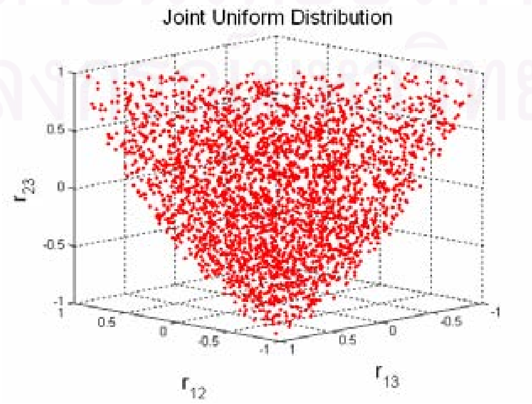
Ture Correlation	ระยะทางยูคลีเดียน (Euclidean Distance)	ความถูกต้อง ในแต่ละองค์ประกอบ (Accuracy)	ความแม่นยำ ในแต่ละองค์ประกอบ (Precision)
0.0	Marginal สั้นกว่า Joint	Joint/Marginal พอๆกัน	Marginal มากกว่า Joint
0.1	Marginal สั้นกว่า Joint	Joint ดีกว่า Marginal เล็กน้อย	Marginal มากกว่า Joint
0.5	Joint สั้นกว่า Marginal	Joint ดีกว่า Marginal มาก	Marginal มากกว่า Joint
0.9	Joint สั้นกว่า Marginal	Joint ดีกว่า Marginal มาก	Joint/Marginal พอๆกัน

<u>หมายเหตุ</u> Joint หมายถึง Joint Uniform Distribution

Marginal หมายถึง Marginal Uniform Distribution

<u>การวิเคราะห์หาสาเหตุของผลการวิจัยที่ได้</u>

โดยจะเริ่มพิจารณาจากเหตุผลของการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกในงานวิจัยนี้ก่อน ซึ่งจะพบว่าการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็นแบบ Joint Uniform Distribution นั้น เนื่องมาจากว่าเราไม่มีองค์ความรู้เกี่ยวกับเมตริกซ์สหสัมพันธ์เลย แต่ในงานวิจัยนี้ต้องการแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ดังนั้นจึงได้กำหนดให้โอกาสที่เมตริกซ์สหสัมพันธ์ จะมีค่าที่เป็นไปได้อยู่ในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite มีค่าเท่าๆกัน



ภาพที่ 4.9 แสดง Joint Uniform Distribution

แต่เนื่องจากตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ในงานวิจัยนี้ คือ ค่าคาดหวังของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย ดังนั้นเมื่อพิจารณาฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย

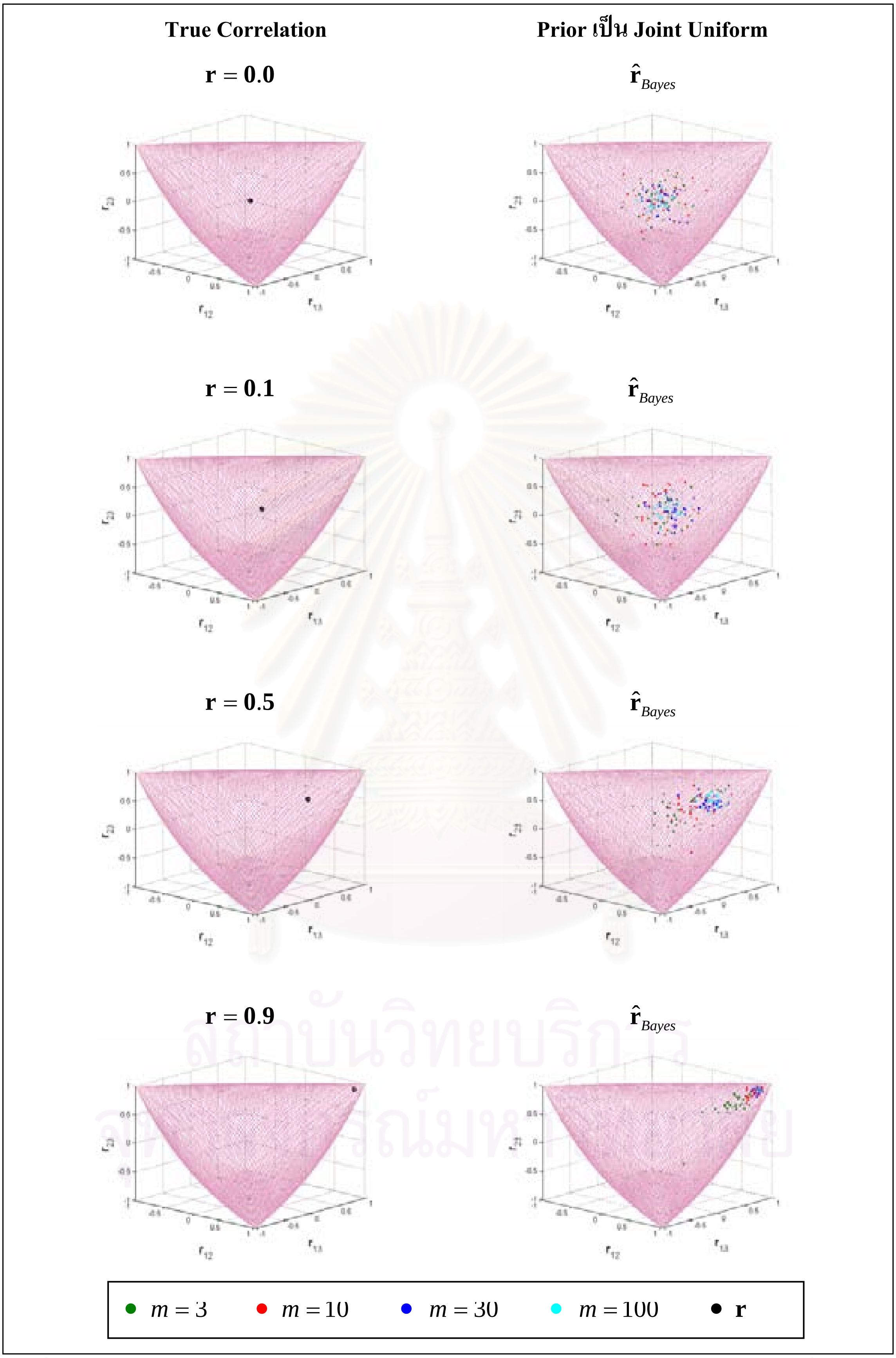
$$\pi(\mathbf{R}/\mathbf{x}) \propto \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|} \right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[(\mathbf{x}_{obs})^{T} (\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1} (\mathbf{x}_{obs}) \right] \right\} \right\}$$

จะพบว่าการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกในกรณีนี้จะไม่ส่งผลต่อฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย หรืออาจกล่าวได้ว่าเป็น Non Informative Prior ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียนี้จึงขึ้นอยู่กับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นอย่างเดียว (Likelihood Function) หรือขึ้นอยู่กับภาวะข้อมูลนั่นเอง

ซึ่งจะเป็นสาเหตุที่ทำให้ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ มีความถูกต้องในการประมาณค่า โดยไม่ว่าข้อมูลจะมีโครงสร้างความสัมพันธ์เป็นแบบใด แต่จะมีข้อเสียตรงที่ เกิดความผิดพลาดในการประมาณค่าค่อนข้างสูง เมื่อมีข้อมูลน้อยๆ ดังนั้นจึงทำให้ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ จึงไม่ค่อยมีความแม่นยำในการประมาณค่า โดยเฉพาะขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มี จำนวนน้อยๆ ดังภาพที่ 4.10

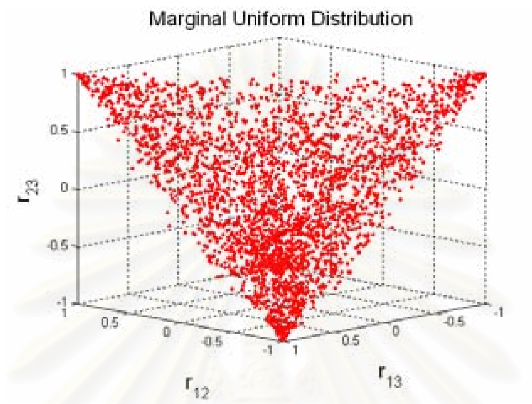
แต่จากผลการวิเคราะห์ที่กล่าวมา มีสิ่งที่น่าสังเกตอย่างหนึ่ง คือ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$ แล้ว $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ ที่ได้นั้นจะมีระยะทางยูคลีเดียนเมื่อเทียบกับ $\mathbf{r}$ มีค่าเข้าใกล้ $\mathbf{0}$ นั่นแสดงว่า $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ มีค่าใกล้เคียงกับ $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$ มาก ซึ่งเมื่อพิจารณาภาพที่ 4.10 พบว่าพื้นที่ภายในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ในบริเวณที่ $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$ มีพื้นที่น้อย ดังนั้นจึงมีผลทำให้ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ มีค่าที่เป็นไปได้น้อยด้วย นั่นจึงเป็นสาเหตุที่ทำให้ค่าประมาณที่ได้มีความใกล้เคียงกับค่าจริง

ดังนั้นจึงสามารถสรุปได้ว่าค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$) เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution นั้น จะประมาณค่าได้ดี เมื่อข้อมูลที่มีโครงสร้างความสัมพันธ์กันโดยเฉพาะเมื่อข้อมูลมีโครงสร้างความสัมพันธ์กันในระดับสูงๆ และจะมีความถูกต้องและความแม่นยำในการประมาณค่า ดียิ่งขึ้นถ้าขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มีจำนวนมากๆ



ภาพที่ 4.10 แสดงการเปรียบเทียบตำแหน่งของ $\mathbf{r} = \mathbf{0.0},\ \mathbf{0.1},\ \mathbf{0.5}$ และ $\mathbf{0.9}$ กับ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution

ส่วนการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution นั้น เนื่องจากว่าโดยทั่วไปแล้วเราทราบว่าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ จะมีค่าอยู่ในช่วง [−1 1] ดังนั้น Marginal Uniform Distribution จึงต้องการหาการแจกแจงร่วมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ทำให้องค์ประกอบนอกเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ทุกองค์ประกอบ มีการแจกแจงสม่ำเสมอบนช่วง [−1 1] และอยู่ภายใต้เงื่อนไขการมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite



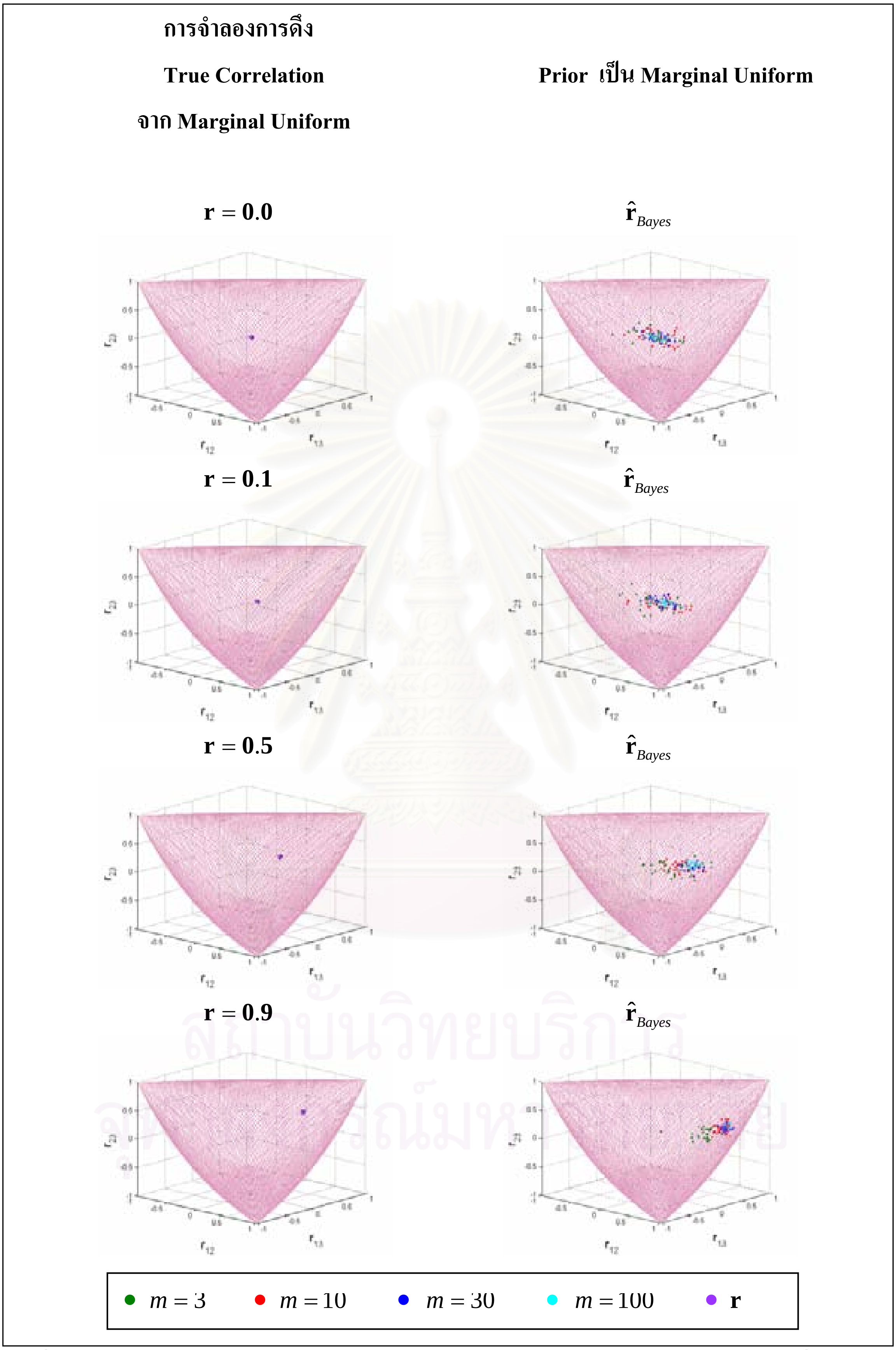
ภาพที่ 4.11 แสดง Marginal Uniform Distribution

โดยจากภาพที่ 4.11 พบว่า Marginal Uniform Distribution จะมีลักษณะกระจุกตัวอยู่ที่บริเวณมุมของขอบเขตเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite เพื่อที่จะรักษาสภาพองค์ประกอบของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ให้มีการแจกแจงสม่ำเสมอบนช่วง [−1 1] โดยที่ทุกองค์ประกอบจะมีค่าเฉลี่ยเป็น 0

และเมื่อพิจารณาฟังก์ชันโพสทีเรีย ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution

$$\pi(\mathbf{R}/\mathbf{x}) \propto \left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\left|\mathbf{R}\right|^{2}\left(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}_{\bullet\bullet}\right|\right)^{-2}\right)$$

จากสมการจะพบว่าการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution นั้น จะมีผลต่อฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย ดังนั้นเพื่อการอธิบายผลการวิจัยที่ได้นั้นจึงได้ทำการจำลองลักษณะการดึง **r** (เป็นตัวแทนของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น หรือ ภาวะข้อมูล) จาก Marginal Uniform Distribution ดังภาพที่ 4.12



ภาพที่ 4.12 แสดงการเปรียบเทียบตำแหน่งของ $\mathbf{r} = \mathbf{0.0},\ \mathbf{0.1},\ \mathbf{0.5}$ และ $\mathbf{0.9}$ กับ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อกำหนดแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution

จากภาพที่ 4.12 จะพบว่าตำแหน่งของ $\mathbf{r}$ เมื่อถูกดึงด้วย Marginal Uniform Distribution นั้นจะพยายามดึง $\mathbf{r}$ ให้เข้าสู่ศูนย์กลาง เพื่อพยายามรักษาสภาพของการแจกแจงของตัวมันเองไว้ โดยจะมีลักษณะเช่นเดียวกับผลการวิเคราะห์ที่ได้ คือ ในแต่ละองค์ประกอบของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ จะมีความถูกต้องในประมาณค่าได้ดี เมื่อข้อมูลไม่มีความสัมพันธ์กัน หรือมีความสัมพันธ์น้อยๆ โดยที่การประมาณค่านั้นจะมีความแม่นยำสูงด้วย

ดังนั้นจะสามารถสรุปได้ว่าเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะประมาณค่าได้ดี เมื่อข้อมูลที่ไม่มีโครงสร้างความสัมพันธ์กันหรือมีโครงสร้างความสัมพันธ์ในระดับน้อยๆ

4.2.2 การวิเคราะห์เปรียบเทียบความเร็วในการจำลองค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$) เมื่อกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลต่างกัน

โดยในงานวิจัยนี้จะอาศัยเทคนิคการจำลองของมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล (MCMC) ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง (Metropolis-Hasting Algorithm: MH) ในการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์

ซึ่งสามารถสรุปหลักการอย่างคร่าวๆ ได้ดังนี้ เนื่องจากตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ในงานวิจัยนี้คือ ค่าคาดหวังของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย แต่เนื่องจากในทางปฏิบัติการอินทิกรัลเพื่อหาค่าคาดหวังมีความซับซ้อนมาก ดังนั้นจึงจะใช้ มอนติ คาร์โล อินทิเกรชั่น (Monte Carlo Integration) ในการแก้ปัญหา โดยการสุ่มเมตริกซ์สหสัมพันธ์ขึ้นการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรีย แล้วนำมาหาค่าเฉลี่ยตัวอย่างแทนการอินทิกรัล แต่ว่าการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นโพสทีเรียในงานวิจัยนี้ไม่ใช่การแจกแจงมาตรฐานจึงไม่สามารถสุ่มตัวอย่างได้ ดังนั้นจึงต้องอาศัยมาร์คอฟ เชน (Markov Chains) โดยมองว่าลำดับของตัวอย่างสุ่มนี้มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งแต่ละลำดับของตัวอย่างสุ่มมีแจกแจงมาจากฟังก์ชันความหนาแน่นของ Transition Kernel $P(\mathbf{R}_{t+1}:\mathbf{R}_t)$ โดยการสุ่มลำดับของตัวอย่างนี้จะใช้อัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง (Metropolis-Hasting Algorithm) และถูกขับเคลื่อนด้วยตัวแคนดิเดท (Candidate) ที่มีการแจกแจงพรอพโพซอล (Proposal Distribution) $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t)$ โดยสามารถสร้างได้ง่าย

ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้แบ่งวิธีการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$) ตามการกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอล ออกเป็น 2 แบบ

1. Independence Chain โดยที่ $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t)=g(\mathbf{R}^{'})$ ซึ่งจะมีการเคลื่อนที่เป็นไปอย่างอิสระ และกำหนดให้ $g(\mathbf{R}^{'})$ มีการแจกแจงสม่ำเสมอบนขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

2. Ball Walk โดยที่ $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t)=Q(\mathbf{R}_t:\mathbf{R}^{'})$ ซึ่งกำหนดให้ $Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t)$ มีการแจกแจงสม่ำเสมอในบอล

ซึ่งการเปรียบเทียบความเร็วในการจำลองข้อมูลนี้ จะใช้จำนวนรอบเฉลี่ยในการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบ โดยจะได้ผลการวิเคราะห์ดังนี้

ตารางที่ 4.4 แสดงจำนวนรอบเฉลี่ยในการหาค่าประมาณตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์

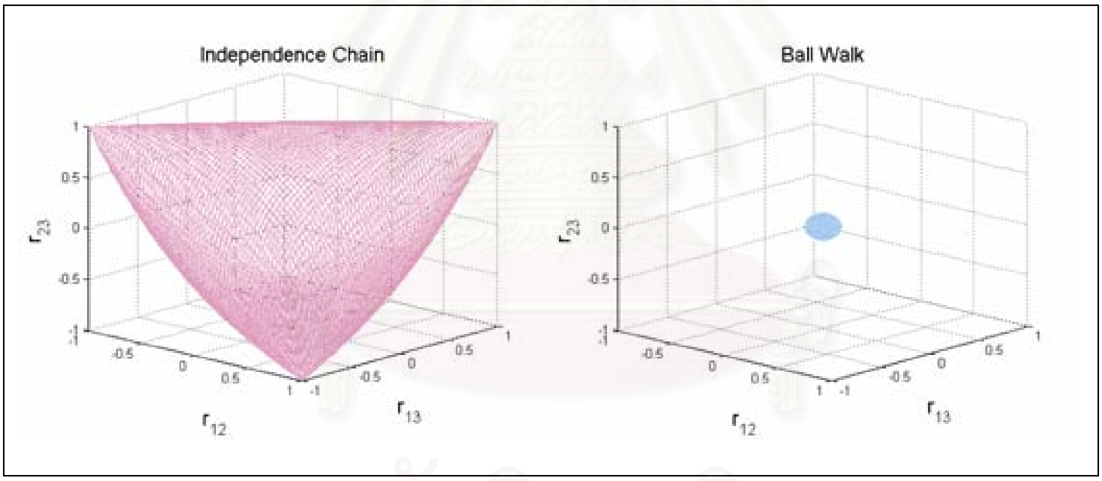
Ture Correlation		m	Joint Uniform		Marginal Uniform	
			Independence Chain	Ball Walk	Independence Chain	Ball Walk
Independence	0.0	3	**54,528.7**	88,852.9	**44,646.5**	53,573.2
		10	**46,954.8**	63,374.3	**38,689.7**	38,957.4
		30	**37,181.2**	39,521.4	32,560.7	**24,008.8**
		100	32,287.7	**20,807.3**	28,821.0	**12,128.7**
Dependence	0.1	3	**54,627.1**	88,339.3	**47,265.2**	59,588.4
		10	**49,361.9**	62,895.9	**40,550.9**	41,960.4
		30	40,083.9	**38,995.3**	30,734.9	**22,582.3**
		100	31,406.1	**21,337.0**	28,635.7	**11,953.3**
	0.5	3	**55,900.3**	85,441.3	**46,625.0**	60,705.6
		10	**47,941.0**	60,216.7	**42,292.2**	39,712.5
		30	38,165.4	**33,055.8**	33,414.7	**23,412.4**
		100	31,715.7	**14,297.7**	29,772.9	**12,136.8**
	0.9	3	**62,983.0**	67,269.0	**46,046.3**	60,003.3
		10	29,444.5	**18,895.2**	**38,305.8**	41,746.2
		30	26,660.6	**10,391.7**	31,596.4	**23,269.5**
		100	18,485.8	**10,143.3**	28,690.1	**12,669.5**

จากตารางที่ 4.4 พบว่าการจำลองค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ โดยไม่ว่าจะกำหนด การแจกแจงเริ่มแรก และ โครงสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล เป็นแบบใดก็ตาม ถ้ากำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลให้เป็นแบบ Independence Chain แล้ว จำนวนรอบเฉลี่ยที่ใช้ในการจำลอง จะน้อยกว่า แบบ Ball Walk เมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีจำนวนน้อย แต่ถ้าขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีจำนวนมากขึ้น จำนวนรอบเฉลี่ยที่ใช้ในการจำลองแบบ Ball Walk จะน้อยกว่า แบบ Independence Chain

<u>การวิเคราะห์หาสาเหตุของผลการวิจัยที่ได้</u>

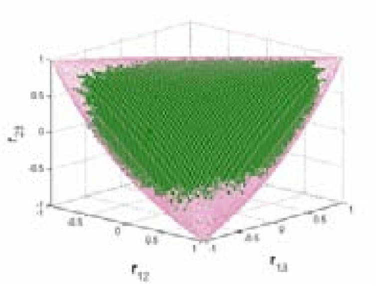
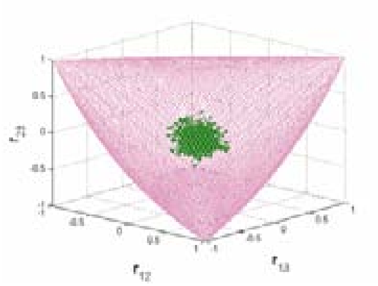
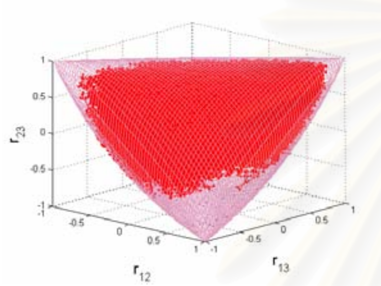
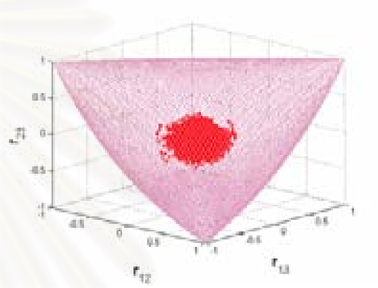
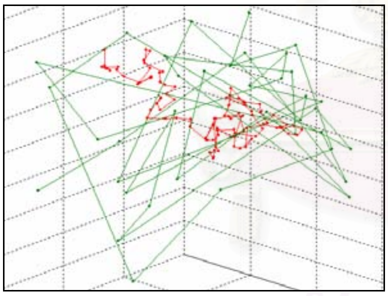
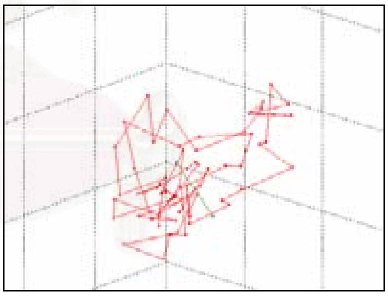
ซึ่งจะเริ่มจากเหตุผลในการกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบต่างๆ ก่อน โดยในงานวิจัยนี้ได้กำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain เนื่องมาจากว่าผู้วิจัยสามารถทำการสุ่มเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีแจกแจงแบบสม่ำเสมอในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ได้ ด้วยวิธี Onion ของ Ghosh and Henderson (2004) ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการจำลองตัวอย่างจึงเลือกประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain โดยกำหนดให้ตัวแคนดิเดทมีแจกแจงแบบสม่ำเสมอในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite และจะทำให้ค่าที่เป็นไปได้ของตัวเคนดิเดทอยู่ภายในขอบเขตคุณสมบัติ Positive Semi-Definite

ส่วนเหตุผลในการกำหนดให้ประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Ball Walk เนื่องจากไม่ต้องการให้ตัวของตัวแคนดิเดทมีค่าที่เป็นไปได้มากจนเกินไป จึงกำหนดให้ตัวแคนดิเดทมีการเคลื่อนที่แบบ Ball Walk โดยที่ตัวแคนดิเดทนี้จะมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในบอล ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้กำหนดรัศมีของบอลเป็น 0.125



ภาพที่ 4.13 แสดงการเปรียบเทียบขอบเขตของตัวแคนดิเดทเมื่อกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain กับ Ball Walk

จากผลการวิเคราะห์พบว่า โดยไม่ว่าจะกำหนดการแจกแจงเริ่มแรก และ โครงสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล เป็นแบบใดก็ตาม เมื่อกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลต่างกันแล้ว ความเร็วของการจำลองจะขึ้นอยู่กับขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประ -กอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ดังนั้นการวิเคราะห์หาสาเหตุนี้ จะพิจารณาจากวิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่าง (Sample Path) ของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อ $\mathbf{r} = \mathbf{0.0}$ และ $m = 3$ กับ $m = 100$ โดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution เป็นตัวอย่างในการพิจารณาหาสาเหตุ

Sample Path/ $m=3$	**Sample Path** / $m=100$
Independence Chain 	Independence Chain 
Ball Walk 	Ball Walk 
การเปรียบเทียบ Sample Path ของ 100 ค่าสุดท้าย 	การเปรียบเทียบ Sample Path ของ 100 ค่าสุดท้าย 

ภาพที่ 4.14 แสดงการเปรียบเทียบวิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่าง (Sample Path) ของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เมื่อ $\mathbf{r}=\mathbf{0.0}$ และ $m=3$ กับ $m=100$ โดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution

จากภาพที่ 4.14 จะพบว่าเมื่อกำหนดให้ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีจำนวนน้อย $(m=3)$ วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ จะกระจายตัวอยู่ในวงกว้าง โดยเมื่อกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain และตัวแคนดิเดทมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite แล้ว จะพบว่าขอบเขตของค่าที่เป็นไปได้ของตัวเคนดิเดทจะครอบคลุม วิถี

การเคลื่อนที่ตัวอย่างของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ ได้อย่างเหมาะสม ดังนั้นตัวแคนดิเดทจะมีโอกาสถูกยอมรับมาก และเคลื่อนที่เป็นไปอย่างอิสระ จึงทำให้จำนวนรอบเฉลี่ยที่ใช้ในการจำลองน้อย

แต่ถ้ากำหนดให้ตัวแคนดิเดทมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในบอล (Ball Walk) แล้ว จะพบว่าขอบเขตของค่าที่เป็นไปได้ของตัวเคนดิเดทมีขนาดเล็กกว่าวิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ ดังนั้นจึงทำให้การเคลื่อนที่เป็นไปอย่างช้าๆ ซึ่งเป็นสาเหตุทำให้การจำลองใช้จำนวนรอบมาก

ส่วนเมื่อกำหนดให้ขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีจำนวนมากขึ้น $(m = 100)$ วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ จะมีลักษณะการกระจายเป็นบริเวณแคบ และเมื่อกำหนดให้ตัวเคนดิเดทมีการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ก็จะพบว่าขอบเขตของค่าที่เป็นไปได้ของตัวเคนดิเดทขนาดใหญ่กว่าวิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ เป็นอย่างมาก ดังนั้นตัวแคนดิเดทจึงมีโอกาสถูกยอมรับได้น้อย และจะทำให้ไม่เกิดการเคลื่อนที่ จึงเป็นสาเหตุทำให้การจำลองใช้จำนวนรอบมาก

ซึ่งจะต่างกับการกำหนดให้ตัวแคนดิเดทมีการแจกแจงสม่ำเสมอในบอล ที่ขอบเขตค่าที่เป็นไปได้ของตัวเคนดิเดทมีเล็กกว่าวิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างของ $\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$ ไม่มากนัก ดังนั้นตัวแคนดิเดทจึงมีโอกาสถูกยอมรับได้มาก จึงทำให้การจำลองมีจำนวนรอบน้อย

ดังนั้นจะสามารถสรุปได้ว่าความเร็วในการจำลองนี้ จะขึ้นอยู่กับการกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลให้เหมาะสมกับวิถีการเคลื่อนที่ของตัวอย่าง โดยไม่ได้ขึ้นอยู่กับการกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอล โดยที่ในงานวิจัยนี้ จะพบว่าเมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มีจำนวนน้อยๆ วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างจะกว้าง ดังนั้นการจำลองจะมีความเร็ว เมื่อประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain และกำหนดให้การแจกแจงพรอพโพซอลเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ส่วนเมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มีจำนวนมากๆ วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างจะแคบ ดังนั้นการจำลองจะมีความเร็ว เมื่อประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Ball Walk และกำหนดให้การแจกแจงพรอพโพซอลเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในบอล

4.3 การประยุกต์ใช้ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{r}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันกับ Gaussian Copula

เนื่องจากงานวิจัยนี้ มุ่งเน้นไปที่การหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันและสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับ Gaussian Copula เพื่อนำไปสู่การจำลองข้อมูลตามการแจกแจงที่ต้องการ โดยที่ยังคงโครงสร้างความสัมพันธ์เดิมอยู่

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการจำลอง $\mathbf{Y}$ ใน 3 มิติ เมื่อกำหนด $Y_1 \sim Gamma(2,2)$, $Y_2 \sim t(10)$ และ $Y_3 \sim Expo(0.2)$ ตามลำดับ โดยที่ต้องคงความสัมพันธ์จากข้อมูลดังต่อไปนี้

-0.750	-1.042	–
0.496	0.902	–
0.411	0.123	–
-1.000	–	-0.486
0.847	–	0.555
1.331	–	1.028
–	1.398	0.756
–	-0.503	-0.455
–	0.515	-0.302

จากข้อมูลจะได้

$$\hat{\mathbf{R}}_{MVUE} = \begin{bmatrix} 1.00 & 1.18 & 0.81 \\ 1.18 & 1.00 & 0.61 \\ 0.81 & 0.61 & 1.00 \end{bmatrix}$$

โดยพบว่า $\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$ ขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite [1]แต่เมื่อนำข้อมูลนี้มาหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution และกำหนดประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain จะได้

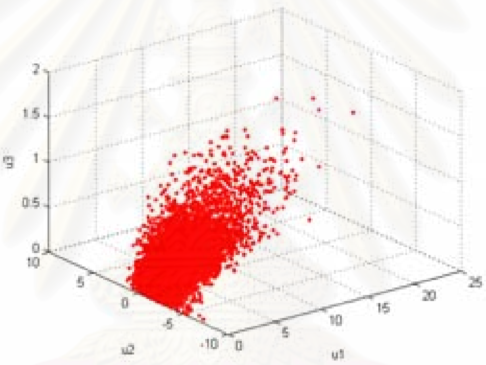
$$\hat{\mathbf{R}}_{Bayes} = \begin{bmatrix} 1 & 0.53 & 0.70 \\ 0.53 & 1 & 0.59 \\ 0.70 & 0.59 & 1 \end{bmatrix}$$

และนำค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์นี้ มาสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบปกติ (Gaussian Copula) โดย

1. สร้างเลขสุ่ม $\mathbf{X} \sim N_3(0, \hat{\mathbf{R}}_{Bayes})$
2. นำเลขสุ่มที่ได้แปลงให้เป็น $U_i = F(X_i)$

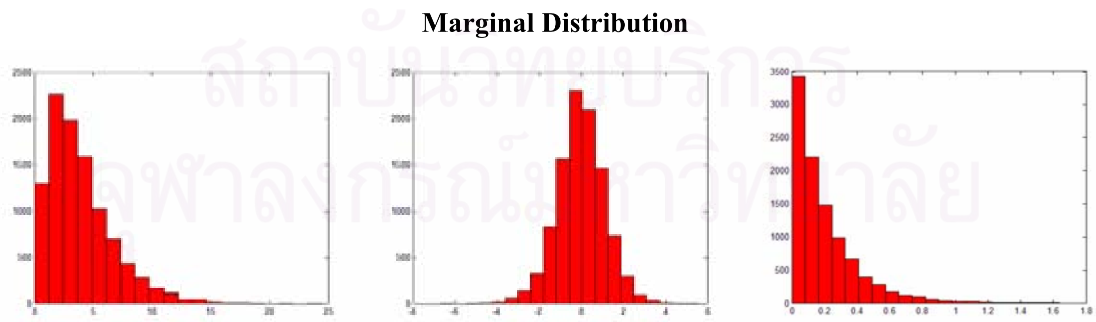
เมื่อ F เป็นฟังก์ชันสะสมที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (CDF)

โดยทำการจำลอง 10,000 รอบ แล้วนำ U_i แต่ละตัวมาแปลงให้เป็นฟังก์ชันสะสมตามการแจกแจงที่ต้องการแล้วทำการอินเวิร์สกลับให้เป็นตัวอย่างสุ่ม โดยจะได้



ภาพที่ 4.15 แสดง Scatter Plot ของ $\mathbf{Y}$ เมื่อกำหนด

$Y_1 \sim Gamma(2,2)$, $Y_2 \sim t(10)$ และ $Y_3 \sim Expo(0.2)$



$Y_1 \sim Gamma(2,2)$ $Y_2 \sim t(10)$ $Y_3 \sim Expo(0.2)$

ภาพที่ 4.16 แสดงฮิสโตแกรมของการแจกแจงส่วนริม เมื่อกำหนด $Y_1 \sim Gamma(2,2)$, $Y_2 \sim t(10)$ และ $Y_3 \sim Expo(0.2)$

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

เนื่องจากจุดเริ่มต้นของงานวิจัยนี้ คือ การแก้ไขปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน และจากผลการวิเคราะห์พบว่า อัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน จะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นตามระดับโครงสร้างความสัมพันธ์ของข้อมูล โดยเฉพาะเมื่อข้อมูลมีโครงสร้างความสัมพันธ์ในระดับสูง เนื่องจากตำแหน่งของเมตริกซ์สหสัมพันธ์จริงอยู่บริเวณส่วนมุมของขอบเขตเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ดังนั้นเมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายจึงทำให้ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) มีโอกาสขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ได้มาก และอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) นี้ จะมีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มากขึ้นด้วย

ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการศึกษาตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันโดยมีจุดประสงค์เพื่อแก้ปัญหาการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ ($\hat{\mathbf{R}}_{MVUE}$) ซึ่งค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) ในงานวิจัยนี้ แบ่งออกเป็น 2 แบบตามการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรก คือ Joint Uniform Distribution และ Marginal Uniform Distribution

โดยมีเหตุผลในการกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกดังนี้ เนื่องจากเราไม่มีองค์ความรู้เกี่ยวกับเมตริกซ์สหสัมพันธ์เลย จึงได้กำหนดให้โอกาสที่เมตริกซ์สหสัมพันธ์ จะมีค่าที่เป็นไปได้อยู่ในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite มีค่าเท่าๆกัน ซึ่งจะเรียกการแจกแจงเริ่มแรกนี้ว่า Joint Uniform Distribution

ส่วนการกำหนดให้การแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution เนื่องจากโดยทั่วไปเราทราบว่าค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ มีค่าอยู่ในช่วง $[-1 \quad 1]$ ดังนั้น Marginal Uniform Distribution จึงเป็นการแจกแจงร่วมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่ทำให้องค์ประกอบนอกเส้นทแยงมุมของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ทุกองค์ประกอบ มีการแจกแจงสม่ำเสมอบนช่วง $[-1 \quad 1]$ และเมตริกซ์สหสัมพันธ์นี้อยู่ภายใต้เงื่อนไขการมีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ด้วย

โดยจากผลการวิเคราะห์พบว่า ค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยกำหนดการแจกแจงเริ่มแรกเป็น Joint Uniform Distribution นั้น จะประมาณค่าได้ดี เมื่อข้อมูลมีความสัมพันธ์กันในระดับสูงๆ ซึ่งจะมีความถูกต้องและความแม่นยำในการประมาณค่า ดียิ่งขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์มากขึ้น ส่วนค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อกำหนดให้การแจกแจงเริ่มแรกเป็น Marginal Uniform Distribution จะประมาณค่าได้ดี เมื่อข้อมูลที่ไม่มีความสัมพันธ์กันหรือมีความสัมพันธ์กันน้อยๆ

ส่วนวิธีการในการหาค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) ในงานวิจัยนี้จะอาศัยเทคนิคการจำลองด้วยวิธีมาร์คอฟ เชน มอนติ คาร์โล ด้วยอัลกอริธึมของเมโทรโปลิส-เฮสติ้ง โดยแบ่งวิธีการจำลองออกเป็น 2 วิธี ตามประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอล คือ Independence Chain และ Ball Walk โดยในงานวิจัยนี้จะมีสมมติฐานว่า การกำหนดประเภทของแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Ball Walk จะมีความเร็วในการจำลองมากกว่า แบบ Independence Chain

แต่จากผลการวิเคราะห์สามารถสรุปได้ว่าความเร็วในการจำลองนี้ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอล แต่จะขึ้นอยู่กับการกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลให้ความเหมาะสมกับวิถีการเคลื่อนที่ของตัวอย่าง

โดยในงานวิจัยนี้ จะพบว่าเมื่อกำหนดประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Independence Chain และกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในขอบเขตของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ที่มีคุณสมบัติ Positive Semi-Definite แล้ว การจำลองจะมีความเร็ว เมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มีจำนวนน้อยๆ (วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างจะกว้าง) ส่วนเมื่อกำหนดประเภทการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นแบบ Ball Walk และกำหนดการแจกแจงพรอพโพซอลเป็นการแจกแจงแบบสม่ำเสมอในบอลแล้ว การจำลองจะมีความเร็ว เมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ มีจำนวนมากๆ (วิถีการเคลื่อนที่ตัวอย่างจะแคบ)

และค่าประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ ($\hat{\mathbf{R}}_{Bayes}$) เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน นี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับ Gaussian Copula เพื่อนำไปสู่การจำลองข้อมูลตามการแจกแจงที่ต้องการ โดยที่ยังคงความสัมพันธ์เดิม

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. ขยายการศึกษา เมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากันในกรณีมิติสูงขึ้น
2. ศึกษาประเภทของการแจกแจงพรอพโพซอลแบบ Hit and Run เพิ่ม

รายการอ้างอิง

ภาษาไทย

ธีระพร วีระถาวร. การอนุมานเชิงสถิติขั้นกลาง : โครงสร้างและความหมาย. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2536.

ธีระพร วีระถาวร. ตัวแบบเชิงเส้นทฤษฎีและการประยุกต์. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : บริษัทพิมพ์ดีจำกัด, 2541.

มานพ วราภักดิ์. การจำลองเบื้องต้น. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร : ศูนย์ผลิตตำราเรียนสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, 2547.

สุชาดา กีระนันทน์. การอนุมานเชิงสถิติ : ทฤษฎีขั้นต้น. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

ภาษาอังกฤษ

Barnard, J., McCulloch, R. and Meng, X. Modeling Covariance Matrices in Terms of Standard Deviations and Correrelations, with Application to Shrinkage. Statistica Sinica 10, 2000.

Ghosh, S. Dependence in Stochastic Simulation Models. Thesis, Cornell University, 2004.

Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J. Markov Chain Monte Carlo in Practice. (n.p.): Chapman & Hall, 1996.

Kiatsupaibul, S. Mending Flaws of An Estimated Variance-Covariance Matrix. การประชุมวิชาการสถิติประยุกต์ระดับชาติประจำปี 2549 “การจัดการองค์ความรู้ในองค์กร”, 2006.

Liechty, C. J., Liechty, W. M. and Muller P. Bayesian Correlation Estimation. (n.p.,n.d.).

Lovasz, L. and Vampala, S. The Geometry of Logconcave Functions and Sampling Algorithms. 2003.

Robert, P. Christian and Casella George. Monte Carlo Statistical Methods. (n.p.): Springer, 2004.

Rousseeuw, J. P. and Molenberghs, G. The Shape of Correlation Matrices. Vol 48. (n.p.): The American Statistician, 1994.

Vempala, S. Geometric Random Walks : A Survey. Vol 52. (n.p.): MSRI Publications, 2005.

Zeithammer, R. and Lenk, P. Bayesian Estimation of Covariance Matrices when Dimensions are Absent. 2005.

ภาคผนวก

ตาราง แสดงการเปรียบเทียบอัตราการขาดคุณสมบัติ Positive Semi-Definite ของเมตริกซ์สหสัมพันธ์ เมื่อข้อมูลเกิดการสูญหายแบบเท่ากัน โดยกำหนดให้ **r** เป็น **0.0, 0.1, 0.5** และ **0.9**

m	**Ture Correlation**			
	0.0	**0.1**	**0.5**	**0.9**
3	0.587	0.593	0.719	0.915
4	0.401	0.403	0.635	0.925
5	0.259	0.266	0.543	0.934
6	0.167	0.183	0.478	0.938
7	0.109	0.126	0.427	0.936
8	0.068	0.080	0.366	0.933
9	0.043	0.053	0.313	0.927
10	0.029	0.033	0.278	0.923
12	0.010	0.016	0.209	0.917
14	0.004	0.007	0.158	0.906
16	0.002	0.004	0.119	0.893
18	0.001	0.001	0.088	0.884
20	0.000	0.001	0.068	0.872
22	0.000	0.000	0.046	0.861
24	0.000	0.000	0.039	0.853
26	0.000	0.000	0.025	0.848
28	0.000	0.000	0.019	0.824
30	0.000	0.000	0.018	0.820
35	0.000	0.000	0.006	0.795
40	0.000	0.000	0.003	0.772
45	0.000	0.000	0.003	0.744
50	0.000	0.000	0.001	0.723
60	0.000	0.000	0.000	0.677
70	0.000	0.000	0.000	0.634
80	0.000	0.000	0.000	0.592
90	0.000	0.000	0.000	0.560
100	0.000	0.000	0.000	0.520

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.0}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 3$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.089	-0.434	1.202	'no'	-0.033	0.187	0.286	0.344	48,840	-0.051	0.193	0.290	0.352	74,902	-0.009	0.104	0.145	0.178	48,721	-0.025	0.107	0.131	0.171	46,563
2	0.213	0.681	-0.718	'no'	0.025	0.250	-0.015	0.252	47,155	0.083	0.229	0.011	0.243	78,693	0.004	0.110	0.002	0.111	47,564	0.030	0.103	-0.011	0.107	51,555
3	-0.444	-0.192	0.462	'yes'	-0.173	-0.065	0.092	0.207	51,459	-0.207	-0.095	0.090	0.245	60,732	-0.081	-0.033	0.042	0.097	45,709	-0.080	-0.020	0.020	0.084	48,221
4	-0.734	0.480	0.480	'no'	-0.010	-0.040	0.137	0.143	51,014	-0.037	0.007	0.108	0.114	106,019	-0.006	-0.009	0.067	0.067	51,262	-0.006	-0.001	0.057	0.057	53,365
5	0.627	0.818	0.194	'yes'	0.001	0.209	0.455	0.501	53,929	0.003	0.196	0.476	0.515	103,331	-0.027	0.066	0.133	0.151	39,697	-0.007	0.051	0.127	0.138	38,177
6	-0.110	0.405	-0.321	'yes'	-0.078	-0.054	0.161	0.187	48,567	-0.120	-0.043	0.172	0.214	88,839	-0.012	-0.018	0.087	0.090	45,330	-0.011	-0.005	0.086	0.087	55,775
7	-0.115	0.311	0.826	'yes'	-0.026	0.053	0.234	0.241	47,826	-0.032	0.055	0.233	0.241	103,237	-0.010	0.027	0.108	0.111	48,878	-0.027	0.035	0.101	0.110	55,721
8	-0.347	1.587	0.034	'no'	-0.154	0.533	-0.228	0.599	50,225	-0.144	0.555	-0.226	0.616	114,210	-0.052	0.197	-0.058	0.212	47,621	-0.057	0.209	-0.077	0.230	35,587
9	-1.051	0.013	0.485	'no'	-0.329	0.115	0.209	0.406	51,277	-0.325	0.056	0.199	0.385	75,987	-0.145	0.029	0.118	0.189	40,921	-0.148	0.027	0.122	0.194	73,442
10	-0.452	-0.574	-1.699	'no'	-0.068	-0.128	-0.693	0.708	64,738	-0.105	-0.132	-0.671	0.692	75,925	-0.069	-0.100	-0.225	0.256	46,590	-0.071	-0.101	-0.217	0.250	74,865
11	-0.263	0.199	-1.449	'no'	-0.220	0.038	-0.417	0.473	50,556	-0.203	0.033	-0.399	0.449	75,658	-0.065	0.010	-0.229	0.238	33,355	-0.064	0.016	-0.231	0.240	59,742
12	0.830	0.081	1.147	'no'	0.200	0.229	0.261	0.401	56,313	0.211	0.263	0.244	0.416	98,057	0.087	0.020	0.127	0.155	51,449	0.079	0.020	0.126	0.150	45,672
13	-1.232	0.272	0.072	'no'	-0.347	0.329	-0.189	0.514	56,954	-0.364	0.288	-0.189	0.501	62,043	-0.137	0.083	-0.117	0.198	36,717	-0.144	0.103	-0.114	0.210	54,171
14	0.591	-0.109	0.830	'no'	0.309	-0.169	0.032	0.354	65,358	0.275	-0.134	0.056	0.311	93,500	0.051	-0.037	0.027	0.069	46,305	0.040	-0.035	0.035	0.064	39,095
15	0.419	-0.413	-0.174	'yes'	0.305	-0.087	-0.053	0.322	45,510	0.280	-0.093	-0.022	0.296	94,402	0.079	-0.026	-0.012	0.084	46,388	0.069	-0.032	-0.020	0.079	78,371
16	0.291	1.067	-0.430	'no'	0.203	0.320	-0.169	0.415	48,427	0.201	0.307	-0.165	0.402	93,314	0.083	0.148	-0.106	0.200	48,684	0.083	0.162	-0.123	0.220	58,704
17	1.449	-0.160	-0.240	'no'	0.383	-0.533	-0.223	0.693	57,423	0.374	-0.522	-0.230	0.683	91,451	0.160	-0.137	-0.064	0.220	51,676	0.174	-0.124	-0.059	0.221	35,328
18	0.212	0.036	0.037	'yes'	0.411	-0.065	0.320	0.525	60,730	0.394	-0.075	0.320	0.513	55,840	0.142	-0.059	0.174	0.232	41,063	0.149	-0.052	0.180	0.239	67,250
19	-0.251	0.402	-0.505	'yes'	0.005	0.102	-0.433	0.445	52,149	0.000	0.110	-0.375	0.391	77,535	0.004	0.042	-0.089	0.098	51,755	0.009	0.039	-0.074	0.084	62,292
20	0.030	-1.609	0.614	'no'	0.071	-0.136	0.155	0.218	48,409	0.034	-0.143	0.163	0.219	113,812	0.009	-0.085	0.071	0.111	47,952	0.000	-0.069	0.078	0.104	65,422
21	0.544	-0.103	-0.106	'yes'	0.121	0.081	-0.077	0.165	63,704	0.129	0.080	-0.095	0.180	91,789	0.055	0.042	-0.007	0.070	39,088	0.073	0.035	-0.008	0.081	35,113
22	-0.076	-0.268	-0.980	'no'	0.069	-0.395	-0.141	0.425	63,024	0.090	-0.430	-0.145	0.463	111,743	0.017	-0.075	-0.032	0.083	36,900	0.023	-0.060	-0.031	0.071	48,247
23	-1.520	0.892	-0.620	'no'	-0.411	-0.014	0.102	0.424	53,872	-0.389	-0.004	0.095	0.400	102,802	-0.152	0.002	0.049	0.160	48,388	-0.139	-0.012	0.052	0.149	28,336
24	-0.017	0.824	0.372	'yes'	-0.450	0.248	0.074	0.519	48,016	-0.451	0.235	0.072	0.514	57,646	-0.192	0.114	0.039	0.227	33,763	-0.186	0.137	0.041	0.235	50,416
25	-0.777	1.299	-0.143	'no'	-0.323	0.491	-0.031	0.589	56,419	-0.328	0.506	-0.034	0.604	97,011	-0.111	0.185	0.022	0.217	49,424	-0.131	0.181	-0.004	0.223	57,702
26	0.793	0.177	-0.294	'yes'	0.208	0.042	0.047	0.218	54,208	0.221	0.036	0.066	0.233	84,804	0.100	0.021	0.016	0.103	47,638	0.089	0.023	0.031	0.097	41,977
27	1.107	0.013	0.785	'no'	0.674	-0.086	0.058	0.682	70,020	0.652	-0.060	0.092	0.661	97,840	0.176	-0.058	0.043	0.190	35,040	0.158	-0.058	0.047	0.175	58,300
28	1.023	0.125	-0.159	'no'	0.078	0.158	0.363	0.404	56,704	0.090	0.250	0.361	0.449	93,677	0.053	0.019	0.208	0.215	36,388	0.046	0.015	0.201	0.207	70,229
29	-0.773	0.929	-0.049	'no'	-0.327	0.363	0.149	0.510	52,521	-0.303	0.381	0.155	0.511	102,505	-0.126	0.138	0.121	0.223	48,101	-0.116	0.138	0.117	0.215	56,852
30	-1.047	-0.610	-0.350	'no'	-0.405	-0.172	-0.218	0.491	60,514	-0.430	-0.178	-0.182	0.500	88,282	-0.213	-0.100	-0.076	0.247	47,027	-0.226	-0.097	-0.082	0.259	60,705
Mean	-0.033	0.205	-0.023		-0.010	0.060	0.008	0.412	54,528.7	-0.015	0.062	0.016	0.410	88,852.9	-0.013	0.021	0.019	0.160	44,646.5	-0.014	0.025	0.017	0.158	53,573.2
Std	0.731	0.648	0.688		0.275	0.238	0.256	0.160		0.273	0.241	0.249	0.157		0.102	0.086	0.107	0.063		0.103	0.086	0.107	0.067	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.0}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 10$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.322	0.325	0.408	'yes'	0.195	0.151	0.120	0.274	39,168	0.200	0.158	0.126	0.284	46,485	0.073	0.080	0.066	0.127	20,791	0.076	0.069	0.056	0.117	28,636
2	0.348	-0.511	0.278	'yes'	0.265	-0.325	0.173	0.454	52,009	0.259	-0.330	0.180	0.457	63,282	0.102	-0.145	0.068	0.190	30,361	0.115	-0.157	0.070	0.207	41,333
3	0.179	-0.399	0.049	'yes'	0.020	-0.212	0.077	0.227	49,245	0.015	-0.205	0.054	0.213	68,869	0.011	-0.094	0.019	0.096	21,825	0.009	-0.090	0.017	0.092	27,289
4	-0.430	-0.433	0.175	'yes'	-0.152	-0.381	0.192	0.453	51,020	-0.149	-0.376	0.182	0.444	63,193	-0.052	-0.126	0.058	0.148	40,833	-0.049	-0.122	0.059	0.144	46,886
5	-0.565	-0.214	0.138	'yes'	-0.202	-0.403	0.038	0.453	39,695	-0.201	-0.408	0.032	0.456	57,197	-0.105	-0.122	0.028	0.164	40,935	-0.098	-0.122	0.028	0.159	44,414
6	0.378	0.121	-0.456	'yes'	0.395	0.150	-0.195	0.466	49,810	0.383	0.158	-0.196	0.459	62,740	0.121	0.072	-0.117	0.183	37,945	0.123	0.069	-0.105	0.175	39,161
7	-0.110	0.046	-0.144	'yes'	0.033	0.071	-0.051	0.093	52,064	0.038	0.054	-0.050	0.083	66,575	0.018	0.026	-0.036	0.048	44,212	0.009	0.019	-0.025	0.033	34,868
8	0.676	0.060	0.019	'yes'	0.278	0.190	-0.073	0.345	34,530	0.278	0.201	-0.060	0.348	77,525	0.131	0.042	-0.032	0.141	31,015	0.124	0.037	-0.041	0.136	32,567
9	0.566	0.226	0.319	'yes'	0.251	0.245	0.205	0.406	53,960	0.261	0.222	0.192	0.393	82,153	0.126	0.068	0.082	0.166	30,583	0.121	0.060	0.093	0.164	42,367
10	-0.580	0.903	0.066	'no'	-0.304	0.653	-0.025	0.721	45,855	-0.294	0.643	-0.014	0.707	62,287	-0.127	0.193	0.026	0.233	36,286	-0.131	0.187	0.019	0.229	29,224
11	-0.147	-0.230	-0.307	'yes'	-0.124	-0.149	-0.225	0.296	40,986	-0.115	-0.131	-0.234	0.292	63,890	-0.046	-0.049	-0.057	0.088	51,804	-0.046	-0.034	-0.049	0.076	45,346
12	-0.377	0.643	0.197	'yes'	-0.348	0.326	0.049	0.479	44,530	-0.339	0.318	0.046	0.468	46,851	-0.124	0.166	0.018	0.208	41,220	-0.136	0.173	0.020	0.221	26,426
13	0.309	-0.005	-0.383	'yes'	0.069	0.004	0.002	0.069	44,633	0.084	0.011	0.009	0.085	53,860	0.033	0.006	0.000	0.033	42,265	0.029	0.009	0.000	0.030	46,495
14	0.501	0.078	-0.276	'yes'	0.254	0.038	-0.276	0.377	43,289	0.259	0.027	-0.304	0.400	69,585	0.119	0.007	-0.078	0.142	48,509	0.112	0.004	-0.085	0.140	34,900
15	0.289	-0.505	0.435	'yes'	0.267	-0.231	0.276	0.448	34,751	0.291	-0.227	0.281	0.464	47,973	0.100	-0.127	0.144	0.217	31,872	0.100	-0.126	0.131	0.208	41,489
16	-0.706	-0.267	0.330	'yes'	-0.305	-0.272	0.424	0.589	54,114	-0.315	-0.270	0.447	0.610	45,479	-0.154	-0.077	0.094	0.196	41,283	-0.147	-0.061	0.089	0.182	36,538
17	0.177	-0.537	-0.378	'yes'	0.031	-0.216	-0.242	0.326	54,510	0.051	-0.209	-0.230	0.315	61,759	0.007	-0.090	-0.111	0.143	28,407	0.016	-0.098	-0.103	0.143	42,270
18	0.715	0.699	0.163	'yes'	0.460	0.396	0.194	0.637	52,507	0.469	0.393	0.189	0.640	64,616	0.173	0.168	0.056	0.248	54,255	0.178	0.167	0.060	0.251	36,653
19	-0.112	-0.289	-0.049	'yes'	0.008	-0.069	-0.024	0.074	39,500	0.026	-0.082	-0.033	0.092	91,821	0.000	-0.017	-0.010	0.020	49,601	-0.002	-0.019	-0.015	0.024	39,715
20	-0.311	0.117	-0.264	'yes'	-0.280	0.133	-0.130	0.336	48,880	-0.276	0.159	-0.121	0.341	61,898	-0.099	0.033	-0.044	0.113	45,194	-0.087	0.026	-0.055	0.107	42,690
21	0.005	-0.090	0.287	'yes'	0.256	-0.081	0.163	0.314	49,524	0.269	-0.082	0.177	0.332	84,471	0.052	-0.025	0.061	0.084	39,959	0.047	-0.036	0.053	0.080	44,008
22	-0.273	0.145	0.049	'yes'	-0.015	0.022	-0.015	0.030	50,956	-0.009	0.020	-0.007	0.023	61,939	-0.002	0.014	0.007	0.016	45,523	-0.008	0.014	-0.007	0.018	38,191
23	0.247	-0.097	-0.257	'yes'	0.136	-0.037	-0.121	0.186	42,026	0.141	-0.040	-0.131	0.197	53,566	0.055	-0.002	-0.047	0.073	41,152	0.055	-0.006	-0.042	0.069	37,773
24	-0.064	0.424	0.536	'yes'	0.098	0.523	0.282	0.602	57,420	0.099	0.534	0.278	0.610	57,681	0.047	0.162	0.123	0.209	39,318	0.050	0.168	0.132	0.220	35,867
25	-0.123	0.114	0.037	'yes'	-0.027	0.099	0.094	0.140	49,020	-0.037	0.101	0.100	0.147	74,413	-0.012	0.039	0.036	0.054	46,457	-0.014	0.029	0.046	0.056	41,056
26	0.192	-0.205	0.274	'yes'	0.029	-0.422	0.210	0.472	42,735	0.027	-0.426	0.208	0.475	75,455	0.018	-0.114	0.063	0.131	34,113	0.020	-0.112	0.064	0.130	42,883
27	-0.082	-0.300	-0.556	'yes'	-0.052	-0.208	-0.509	0.552	61,785	-0.059	-0.224	-0.506	0.556	49,850	-0.020	-0.072	-0.141	0.160	18,242	-0.022	-0.078	-0.139	0.161	45,694
28	-0.397	-0.026	0.704	'yes'	-0.251	-0.039	0.336	0.421	42,439	-0.248	-0.031	0.340	0.422	59,528	-0.116	-0.011	0.175	0.210	35,909	-0.106	-0.021	0.160	0.193	41,318
29	0.269	0.274	0.811	'yes'	0.118	0.257	0.432	0.517	46,405	0.093	0.262	0.425	0.508	53,320	0.052	0.084	0.202	0.225	49,750	0.058	0.091	0.198	0.225	51,013
30	-0.081	-0.272	-0.072	'yes'	0.159	-0.210	-0.036	0.266	41,277	0.153	-0.217	-0.032	0.267	72,968	0.073	-0.067	-0.015	0.101	41,073	0.072	-0.063	-0.012	0.097	31,652
Mean	0.027	-0.007	0.071		0.042	0.000	0.045	0.367	46,954.8	0.045	0.000	0.045	0.370	63,374.3	0.015	0.001	0.021	0.139	38,689.7	0.016	-0.001	0.020	0.136	38,957.4
Std	0.380	0.363	0.340		0.217	0.272	0.216	0.178		0.218	0.272	0.217	0.177		0.088	0.096	0.083	0.067		0.087	0.095	0.080	0.068	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.0}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 30$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	-0.077	-0.191	0.268	'yes'	-0.089	0.010	0.237	0.253	52,448	-0.095	0.021	0.245	0.264	48,762	-0.021	0.012	0.090	0.093	47,885	-0.027	0.010	0.087	0.092	22,326
2	-0.098	-0.032	-0.268	'yes'	-0.079	-0.033	-0.195	0.213	37,619	-0.084	-0.032	-0.200	0.220	42,151	-0.041	-0.031	-0.087	0.101	28,828	-0.026	-0.009	-0.084	0.088	23,936
3	0.242	0.069	-0.680	'yes'	0.203	0.341	-0.424	0.581	24,246	0.207	0.322	-0.429	0.575	53,255	0.064	0.052	-0.180	0.198	33,461	0.069	0.044	-0.173	0.191	26,003
4	-0.085	-0.141	0.026	'yes'	-0.034	-0.125	0.024	0.132	45,306	-0.040	-0.120	0.024	0.129	36,840	-0.015	-0.038	0.014	0.043	37,873	-0.014	-0.049	0.013	0.053	22,439
5	0.165	0.033	-0.141	'yes'	0.152	0.020	-0.109	0.188	32,429	0.143	0.023	-0.111	0.182	29,617	0.066	0.009	-0.035	0.075	40,053	0.059	0.011	-0.039	0.072	25,421
6	0.159	-0.026	0.290	'yes'	0.080	-0.037	0.296	0.308	24,304	0.081	-0.045	0.293	0.307	38,022	0.036	-0.017	0.105	0.112	41,980	0.037	-0.016	0.090	0.098	21,351
7	0.270	-0.327	-0.257	'yes'	0.268	-0.278	-0.127	0.406	39,985	0.256	-0.272	-0.131	0.396	32,569	0.078	-0.103	-0.050	0.139	31,946	0.085	-0.109	-0.047	0.146	23,932
8	0.193	0.228	0.120	'yes'	0.150	0.251	0.170	0.338	24,774	0.151	0.257	0.159	0.338	34,790	0.051	0.078	0.052	0.107	30,469	0.050	0.068	0.042	0.094	25,301
9	0.188	-0.105	0.166	'yes'	0.176	-0.073	0.187	0.267	20,341	0.193	-0.079	0.192	0.284	41,368	0.044	-0.037	0.065	0.087	27,576	0.046	-0.030	0.058	0.080	24,172
10	0.498	-0.138	-0.221	'yes'	0.456	-0.090	-0.241	0.524	43,526	0.467	-0.095	-0.246	0.536	34,826	0.168	-0.038	-0.072	0.187	28,949	0.169	-0.041	-0.069	0.188	23,165
11	0.361	-0.282	0.101	'yes'	0.276	-0.226	0.105	0.372	41,302	0.275	-0.221	0.094	0.365	40,381	0.112	-0.089	0.030	0.146	34,773	0.110	-0.082	0.023	0.139	21,510
12	0.125	0.026	0.001	'yes'	0.102	0.017	-0.002	0.103	41,412	0.111	0.012	0.000	0.111	41,574	0.022	0.002	-0.004	0.023	28,647	0.038	0.007	0.005	0.039	23,862
13	-0.006	-0.037	-0.074	'yes'	-0.130	-0.014	-0.040	0.137	36,138	-0.133	-0.015	-0.044	0.141	41,185	-0.048	-0.007	-0.013	0.050	21,750	-0.047	0.003	-0.015	0.050	20,715
14	-0.035	-0.216	0.240	'yes'	-0.026	-0.253	0.122	0.282	39,985	-0.031	-0.251	0.116	0.278	37,684	-0.005	-0.068	0.057	0.089	28,840	-0.013	-0.081	0.059	0.101	26,994
15	-0.009	0.161	-0.017	'yes'	-0.034	0.124	-0.062	0.143	37,776	-0.033	0.113	-0.061	0.133	51,810	-0.020	0.030	-0.023	0.043	28,753	-0.001	0.052	-0.022	0.057	22,238
16	-0.142	-0.157	-0.127	'yes'	-0.109	-0.079	-0.136	0.192	42,891	-0.122	-0.095	-0.140	0.209	36,065	-0.037	-0.046	-0.056	0.081	34,238	-0.043	-0.041	-0.048	0.077	24,964
17	0.102	0.303	0.088	'yes'	0.088	0.183	0.061	0.212	21,574	0.084	0.182	0.060	0.209	35,602	0.023	0.100	0.021	0.105	27,462	0.036	0.089	0.023	0.098	20,945
18	0.215	-0.006	-0.193	'yes'	0.189	0.031	-0.303	0.358	39,230	0.189	0.025	-0.294	0.350	45,715	0.047	0.012	-0.080	0.094	35,333	0.060	0.014	-0.084	0.104	30,171
19	-0.018	0.084	0.168	'yes'	-0.009	0.072	0.158	0.174	19,042	0.005	0.068	0.155	0.169	31,341	0.006	0.037	0.045	0.059	32,829	-0.003	0.031	0.055	0.063	22,988
20	-0.015	0.148	0.189	'yes'	-0.003	0.090	0.171	0.193	39,325	-0.007	0.093	0.166	0.191	31,592	0.001	0.046	0.056	0.073	29,352	-0.002	0.049	0.065	0.081	21,667
21	0.082	-0.027	-0.085	'yes'	0.086	-0.049	-0.054	0.113	55,525	0.063	-0.045	-0.055	0.095	35,611	0.019	-0.015	-0.030	0.039	31,675	0.026	-0.015	-0.028	0.041	26,485
22	-0.250	0.362	-0.036	'yes'	-0.159	0.521	-0.075	0.550	44,395	-0.154	0.527	-0.067	0.553	35,042	-0.067	0.169	-0.015	0.182	38,537	-0.066	0.156	-0.026	0.172	27,049
23	0.067	0.146	0.120	'yes'	0.048	0.131	0.068	0.155	32,777	0.063	0.128	0.072	0.160	33,033	0.017	0.063	0.030	0.072	31,736	0.021	0.052	0.033	0.065	23,801
24	0.090	0.211	0.164	'yes'	0.190	0.134	0.168	0.286	45,530	0.168	0.134	0.164	0.270	57,878	0.036	0.057	0.061	0.091	29,757	0.038	0.054	0.055	0.086	22,634
25	-0.301	-0.051	-0.054	'yes'	-0.212	-0.065	-0.047	0.226	44,234	-0.200	-0.063	-0.038	0.213	29,709	-0.086	-0.036	-0.010	0.094	18,655	-0.082	-0.025	-0.014	0.087	21,857
26	0.147	0.090	0.077	'yes'	0.080	0.058	0.111	0.149	35,154	0.082	0.065	0.116	0.156	38,212	0.037	0.029	0.035	0.059	24,613	0.039	0.027	0.041	0.063	23,678
27	0.207	-0.020	-0.212	'yes'	0.139	0.056	-0.162	0.220	34,565	0.144	0.053	-0.155	0.218	42,789	0.060	0.007	-0.066	0.089	43,370	0.060	0.021	-0.066	0.092	26,677
28	-0.071	-0.279	0.188	'yes'	-0.056	-0.196	0.232	0.309	28,840	-0.055	-0.201	0.233	0.313	46,585	-0.019	-0.103	0.073	0.128	26,495	-0.023	-0.088	0.064	0.111	24,485
29	-0.217	0.009	0.147	'yes'	-0.182	0.006	0.107	0.211	50,896	-0.194	0.014	0.102	0.220	38,278	-0.057	0.013	0.042	0.072	43,785	-0.061	0.009	0.045	0.076	26,790
30	-0.043	-0.178	-0.045	'yes'	-0.032	-0.082	-0.053	0.103	39,866	-0.027	-0.082	-0.057	0.104	43,356	-0.003	-0.036	-0.019	0.040	37,200	-0.012	-0.035	-0.025	0.044	22,709
Mean	0.058	-0.011	-0.002		0.051	0.015	0.006	0.257	37,181.2	0.050	0.014	0.005	0.256	39,521.4	0.016	0.002	0.001	0.092	32,560.7	0.017	0.003	0.001	0.092	24,008.8
Std	0.180	0.173	0.206		0.153	0.169	0.172	0.129		0.154	0.169	0.172	0.129		0.054	0.060	0.063	0.044		0.055	0.057	0.061	0.040	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.0}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 100$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	-0.005	-0.044	-0.035	'yes'	0.001	-0.068	-0.025	0.073	32,436	-0.001	-0.067	-0.036	0.076	16,949	0.005	-0.028	0.002	0.028	14,127	0.000	-0.023	-0.009	0.025	10,573
2	-0.056	0.028	-0.008	'yes'	-0.053	0.025	0.005	0.059	40,948	-0.050	0.031	-0.007	0.059	22,727	-0.023	0.010	-0.004	0.026	34,746	-0.026	0.008	-0.004	0.028	12,420
3	0.116	-0.164	-0.155	'yes'	0.084	-0.123	-0.221	0.266	37,728	0.090	-0.124	-0.234	0.279	18,330	0.027	-0.047	-0.066	0.086	28,613	0.029	-0.047	-0.057	0.080	12,101
4	0.096	0.151	0.000	'yes'	0.070	0.135	0.018	0.153	27,106	0.082	0.144	0.011	0.166	22,946	0.032	0.046	0.008	0.056	29,479	0.030	0.049	0.002	0.058	12,088
5	0.013	0.003	0.129	'yes'	0.024	0.003	0.129	0.131	26,215	0.015	0.000	0.148	0.149	23,689	0.020	-0.001	0.033	0.039	34,329	0.001	0.004	0.039	0.040	13,509
6	0.186	0.067	0.086	'yes'	0.151	0.099	0.073	0.195	37,744	0.160	0.100	0.079	0.204	20,903	0.063	0.031	0.031	0.077	40,214	0.057	0.034	0.029	0.072	10,662
7	-0.035	0.057	0.023	'yes'	-0.029	0.057	0.020	0.067	42,606	-0.035	0.062	0.021	0.074	18,039	-0.004	0.033	-0.004	0.034	19,363	-0.008	0.019	0.006	0.022	10,601
8	0.089	0.056	-0.115	'yes'	0.078	0.072	-0.088	0.138	32,324	0.080	0.079	-0.087	0.142	16,456	0.037	0.040	-0.036	0.065	36,069	0.029	0.027	-0.034	0.052	12,061
9	0.121	-0.076	0.040	'yes'	0.095	-0.063	0.030	0.118	21,189	0.096	-0.074	0.034	0.126	20,395	0.038	-0.018	0.006	0.043	26,443	0.035	-0.026	0.013	0.045	13,481
10	0.006	0.058	0.053	'yes'	0.012	0.077	0.058	0.098	34,817	0.009	0.069	0.053	0.087	19,104	0.001	0.018	0.030	0.035	29,950	0.001	0.027	0.018	0.033	13,228
11	0.109	-0.013	-0.085	'yes'	0.138	-0.012	-0.070	0.155	32,163	0.139	-0.018	-0.067	0.155	17,633	0.034	0.011	-0.027	0.045	31,862	0.036	-0.008	-0.026	0.045	14,724
12	0.038	0.005	0.130	'yes'	0.045	0.003	0.115	0.123	25,223	0.034	0.010	0.122	0.127	22,967	0.025	0.002	0.026	0.036	27,039	0.012	0.003	0.040	0.042	10,286
13	0.013	0.094	-0.087	'yes'	0.012	0.123	-0.084	0.150	32,068	0.011	0.115	-0.093	0.148	26,990	0.015	0.034	-0.036	0.052	43,337	0.005	0.026	-0.027	0.038	14,220
14	-0.040	-0.117	-0.083	'yes'	-0.046	-0.114	-0.107	0.162	32,957	-0.035	-0.110	-0.089	0.145	19,003	-0.011	-0.039	-0.031	0.052	30,702	-0.012	-0.035	-0.027	0.046	12,666
15	-0.051	-0.161	-0.169	'yes'	-0.063	-0.127	-0.165	0.217	17,907	-0.042	-0.131	-0.176	0.223	20,081	-0.023	-0.058	-0.076	0.098	24,365	-0.016	-0.054	-0.061	0.083	11,063
16	0.102	-0.084	-0.086	'yes'	0.073	-0.101	-0.075	0.146	28,030	0.079	-0.076	-0.085	0.139	22,561	0.025	-0.038	-0.035	0.057	31,082	0.030	-0.027	-0.030	0.050	11,982
17	-0.110	-0.156	0.043	'yes'	-0.102	-0.151	0.035	0.185	31,880	-0.101	-0.156	0.031	0.188	21,376	-0.049	-0.055	0.034	0.081	24,030	-0.037	-0.050	0.013	0.063	11,982
18	-0.005	-0.029	0.165	'yes'	0.019	-0.031	0.160	0.164	30,111	-0.001	-0.025	0.150	0.152	22,584	-0.021	0.005	0.036	0.042	22,341	0.001	-0.007	0.057	0.058	13,143
19	0.112	-0.125	-0.149	'yes'	0.101	-0.109	-0.133	0.200	44,809	0.104	-0.114	-0.135	0.205	20,341	0.054	-0.057	-0.052	0.094	12,295	0.036	-0.041	-0.049	0.073	11,027
20	-0.073	0.140	0.217	'yes'	-0.060	0.142	0.179	0.237	34,112	-0.058	0.154	0.189	0.250	15,034	0.006	0.054	0.053	0.076	11,247	-0.019	0.046	0.072	0.087	11,809
21	0.011	-0.137	0.130	'yes'	0.018	-0.142	0.114	0.183	40,598	0.010	-0.146	0.109	0.183	23,501	-0.001	-0.046	0.040	0.061	31,233	0.004	-0.041	0.037	0.055	12,374
22	-0.065	0.146	-0.130	'yes'	-0.081	0.131	-0.136	0.206	41,415	-0.069	0.139	-0.140	0.209	20,139	-0.023	0.034	-0.034	0.053	25,755	-0.020	0.049	-0.043	0.068	11,254
23	0.038	0.060	0.036	'yes'	0.035	0.053	0.033	0.072	27,564	0.037	0.056	0.034	0.075	26,026	0.015	0.011	0.002	0.019	44,397	0.015	0.027	0.009	0.032	10,944
24	0.042	0.135	-0.031	'yes'	0.062	0.106	-0.043	0.130	35,434	0.058	0.109	-0.044	0.131	25,525	-0.010	0.064	-0.020	0.068	23,107	0.016	0.043	-0.012	0.047	11,472
25	-0.006	-0.062	-0.097	'yes'	-0.005	-0.067	-0.077	0.102	28,571	0.007	-0.059	-0.077	0.097	13,380	-0.007	-0.023	-0.017	0.029	20,595	0.001	-0.026	-0.030	0.040	11,918
26	0.015	-0.098	-0.085	'yes'	-0.002	-0.102	-0.076	0.127	31,570	0.011	-0.101	-0.072	0.124	15,401	0.014	-0.057	-0.010	0.059	40,802	0.000	-0.036	-0.026	0.045	11,342
27	0.055	-0.137	-0.121	'yes'	0.102	-0.168	-0.083	0.214	24,909	0.081	-0.173	-0.086	0.209	26,380	0.006	-0.054	-0.039	0.066	32,191	0.022	-0.052	-0.040	0.069	13,267
28	-0.013	-0.117	-0.060	'yes'	-0.034	-0.118	-0.049	0.132	26,187	-0.015	-0.109	-0.054	0.122	19,072	-0.013	-0.036	-0.019	0.043	31,005	-0.007	-0.038	-0.018	0.043	11,453
29	0.185	0.102	0.082	'yes'	0.199	0.075	0.093	0.232	42,829	0.197	0.082	0.089	0.231	21,783	0.052	0.026	0.042	0.072	27,392	0.062	0.035	0.030	0.077	13,376
30	-0.153	-0.185	0.023	'yes'	-0.155	-0.203	0.022	0.256	27,182	-0.159	-0.190	0.023	0.249	24,905	-0.045	-0.060	0.000	0.075	36,519	-0.050	-0.059	0.006	0.078	12,836
Mean	0.024	-0.020	-0.011		0.023	-0.020	-0.012	0.156	32,287.7	0.024	-0.017	-0.013	0.158	20,807.3	0.008	-0.007	-0.005	0.056	28,821.0	0.008	-0.006	-0.004	0.053	12,128.7
Std	0.082	0.106	0.104		0.079	0.105	0.100	0.056		0.078	0.106	0.103	0.058		0.028	0.039	0.034	0.021		0.026	0.036	0.034	0.018	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.1}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 3$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.512	0.264	0.295	'yes'	0.086	-0.060	-0.108	0.263	49,614	0.071	-0.095	-0.105	0.285	79,751	0.030	-0.017	-0.034	0.191	49,454	0.024	-0.017	-0.014	0.180	53,870
2	-0.142	1.117	-0.381	'no'	-0.277	0.221	-0.113	0.450	56,902	-0.246	0.201	-0.099	0.412	99,347	-0.045	0.119	-0.053	0.212	50,644	-0.047	0.100	-0.042	0.205	54,597
3	-0.953	0.876	0.448	'no'	0.001	0.163	0.246	0.187	48,049	0.008	0.168	0.253	0.191	55,361	0.004	0.100	0.148	0.107	36,299	0.017	0.081	0.154	0.101	38,223
4	-0.274	0.205	-0.454	'yes'	-0.066	0.282	-0.110	0.323	56,639	-0.064	0.270	-0.126	0.327	112,420	-0.008	0.116	-0.022	0.163	50,004	0.003	0.116	-0.015	0.152	97,011
5	0.644	0.470	1.265	'no'	0.340	0.251	0.471	0.467	63,008	0.345	0.244	0.498	0.489	105,075	0.114	0.068	0.177	0.084	51,162	0.111	0.063	0.172	0.082	68,225
6	-0.133	-0.169	-0.156	'yes'	0.036	0.114	-0.130	0.240	49,672	0.066	0.103	-0.142	0.244	80,205	0.026	0.057	-0.035	0.160	51,379	0.019	0.047	-0.013	0.149	31,806
7	0.467	0.492	0.531	'yes'	0.207	0.044	0.298	0.232	50,791	0.189	0.044	0.320	0.244	91,314	0.086	0.026	0.114	0.077	45,901	0.105	0.028	0.104	0.072	45,657
8	0.737	-0.956	0.831	'no'	0.199	-0.072	0.361	0.328	54,159	0.198	-0.065	0.293	0.272	67,778	0.128	-0.039	0.064	0.146	49,468	0.140	-0.043	0.057	0.155	41,870
9	0.719	0.053	-0.557	'yes'	0.209	-0.154	-0.111	0.348	49,916	0.191	-0.147	-0.127	0.348	92,363	0.072	-0.060	-0.038	0.214	40,951	0.096	-0.041	-0.048	0.204	45,020
10	0.046	-0.441	-0.208	'yes'	0.597	-0.076	-0.038	0.545	56,617	0.599	-0.094	-0.036	0.552	88,113	0.214	-0.034	-0.005	0.206	49,053	0.219	-0.036	-0.003	0.208	55,287
11	0.098	-0.182	0.099	'yes'	-0.335	-0.087	0.235	0.492	60,939	-0.319	-0.099	0.245	0.486	69,997	-0.140	-0.027	0.030	0.280	51,255	-0.156	-0.016	0.017	0.293	69,146
12	-0.484	-0.261	1.173	'no'	-0.109	-0.141	0.146	0.322	57,430	-0.159	-0.172	0.157	0.379	110,784	-0.020	-0.031	0.082	0.179	49,485	0.000	-0.030	0.081	0.165	69,006
13	-0.771	0.044	-0.660	'yes'	-0.420	-0.267	-0.127	0.676	64,969	-0.399	-0.319	-0.117	0.687	73,787	-0.158	-0.064	-0.090	0.360	56,176	-0.162	-0.084	-0.080	0.367	72,791
14	0.863	0.416	0.590	'yes'	0.155	0.169	0.283	0.203	53,661	0.182	0.166	0.280	0.208	109,051	0.076	0.032	0.135	0.080	46,010	0.067	0.049	0.137	0.071	69,844
15	-0.297	0.948	0.207	'no'	0.063	0.279	0.093	0.183	50,204	0.071	0.281	0.102	0.183	86,675	0.026	0.119	0.051	0.091	50,331	0.012	0.112	0.050	0.102	58,461
16	0.356	0.289	0.083	'yes'	0.044	0.160	-0.043	0.165	38,916	0.033	0.177	-0.022	0.159	65,376	0.032	0.038	-0.019	0.151	41,992	0.017	0.031	-0.022	0.163	58,142
17	0.932	0.006	0.701	'no'	0.294	0.196	0.073	0.218	48,529	0.255	0.159	0.068	0.169	103,123	0.078	0.031	0.024	0.105	48,023	0.097	0.043	0.013	0.104	64,489
18	-0.148	-0.156	-0.329	'yes'	0.205	-0.092	-0.061	0.272	44,692	0.203	-0.105	-0.071	0.286	100,998	0.074	-0.011	-0.030	0.173	43,007	0.074	-0.026	-0.030	0.183	63,168
19	-0.524	-0.049	-0.361	'yes'	-0.312	-0.014	-0.152	0.496	44,335	-0.334	-0.006	-0.128	0.502	95,589	-0.140	-0.013	-0.055	0.307	36,247	-0.138	-0.010	-0.053	0.303	54,014
20	-0.260	1.215	1.135	'no'	0.085	0.520	0.364	0.497	57,852	0.114	0.491	0.394	0.490	77,829	-0.018	0.232	0.171	0.190	46,030	-0.026	0.225	0.171	0.191	46,115
21	1.121	0.034	-1.098	'no'	0.457	0.103	0.029	0.364	58,907	0.446	0.107	0.049	0.349	107,996	0.165	0.020	0.007	0.139	53,824	0.172	0.024	-0.003	0.147	59,651
22	-0.651	0.251	-0.723	'yes'	-0.594	0.466	-0.340	0.900	51,873	-0.606	0.495	-0.355	0.928	77,793	-0.219	0.173	-0.162	0.419	41,958	-0.218	0.167	-0.162	0.417	71,735
23	-0.686	-0.162	-0.449	'yes'	-0.389	-0.285	-0.027	0.635	52,495	-0.396	-0.292	-0.026	0.645	60,434	-0.180	-0.152	-0.018	0.395	54,301	-0.183	-0.169	-0.021	0.409	59,222
24	0.914	-0.171	-0.859	'no'	0.479	-0.239	-0.582	0.851	62,639	0.479	-0.218	-0.584	0.844	85,717	0.276	-0.037	-0.164	0.346	54,423	0.279	-0.045	-0.161	0.349	63,436
25	-0.145	-0.144	0.934	'yes'	-0.261	-0.572	0.356	0.805	81,842	-0.267	-0.600	0.351	0.829	81,942	-0.064	-0.081	0.135	0.247	41,260	-0.059	-0.052	0.129	0.222	58,780
26	-0.603	1.158	-0.461	'no'	-0.048	0.515	-0.409	0.673	65,079	-0.059	0.511	-0.435	0.693	89,881	0.019	0.253	-0.101	0.266	36,614	0.030	0.236	-0.086	0.241	65,188
27	-0.308	0.879	0.602	'no'	0.027	0.205	0.227	0.180	35,785	0.008	0.200	0.211	0.175	87,336	0.010	0.090	0.110	0.091	45,818	0.006	0.094	0.113	0.095	60,990
28	1.399	-0.571	-0.003	'no'	0.516	-0.314	-0.105	0.621	57,349	0.536	-0.321	-0.108	0.641	94,065	0.185	-0.124	-0.006	0.262	44,822	0.184	-0.128	-0.017	0.270	69,700
29	-0.031	0.955	-0.173	'yes'	-0.078	0.068	-0.501	0.627	73,247	-0.068	0.072	-0.567	0.689	98,469	-0.032	0.020	-0.048	0.214	49,208	-0.041	0.029	-0.076	0.237	70,349
30	-0.932	-0.722	-0.410	'no'	-0.401	-0.317	0.020	0.657	42,702	-0.413	-0.318	0.007	0.669	101,610	-0.096	-0.167	-0.015	0.350	52,857	-0.104	-0.162	-0.019	0.353	51,859
Mean	0.049	0.190	0.054		0.024	0.036	0.008	0.441	54,627.1	0.022	0.028	0.006	0.446	88,339.3	0.017	0.021	0.012	0.207	47,265.2	0.018	0.020	0.011	0.206	59,588.4
Std	0.649	0.570	0.645		0.304	0.262	0.261	0.218		0.305	0.266	0.269	0.226		0.117	0.101	0.091	0.098		0.121	0.098	0.089	0.100	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.1}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 10$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.152	0.065	0.673	'yes'	0.117	0.002	0.466	0.380	45,843	0.125	0.016	0.455	0.366	49,698	0.063	0.000	0.190	0.139	21,285	0.060	0.014	0.188	0.130	44,714
2	-0.276	-0.211	-0.377	'yes'	-0.281	-0.140	-0.404	0.675	36,357	-0.279	-0.133	-0.385	0.658	59,498	-0.107	-0.063	-0.128	0.349	40,553	-0.098	-0.072	-0.135	0.352	48,069
3	0.558	-0.215	0.477	'yes'	0.299	0.005	0.266	0.276	49,581	0.290	-0.009	0.262	0.272	59,304	0.130	-0.007	0.126	0.114	32,202	0.133	0.000	0.122	0.108	38,821
4	0.987	-0.234	-0.223	'yes'	0.597	-0.409	-0.268	0.802	53,601	0.596	-0.405	-0.267	0.797	60,184	0.210	-0.079	-0.044	0.254	43,351	0.205	-0.070	-0.048	0.249	48,225
5	-0.312	0.319	0.094	'yes'	-0.111	0.188	0.125	0.230	52,434	-0.132	0.192	0.139	0.253	76,871	-0.053	0.084	0.033	0.167	40,427	-0.053	0.074	0.012	0.178	39,870
6	0.327	-0.106	-0.158	'yes'	0.363	-0.090	-0.063	0.363	48,269	0.383	-0.098	-0.059	0.380	65,264	0.095	-0.024	-0.016	0.170	41,451	0.081	-0.024	-0.030	0.180	39,271
7	0.426	-0.281	-0.192	'yes'	0.238	-0.293	-0.024	0.434	50,633	0.229	-0.293	-0.013	0.429	63,454	0.106	-0.106	-0.013	0.235	29,761	0.109	-0.096	-0.011	0.225	34,116
8	-0.323	0.133	-0.066	'yes'	-0.195	0.061	0.094	0.297	50,882	-0.189	0.054	0.086	0.293	81,828	-0.078	0.027	0.021	0.208	38,928	-0.078	0.021	0.019	0.211	36,318
9	0.335	0.270	-0.488	'yes'	0.241	0.309	-0.233	0.418	44,653	0.230	0.298	-0.238	0.413	47,415	0.074	0.123	-0.128	0.231	48,605	0.071	0.116	-0.120	0.222	41,580
10	-0.283	0.198	0.326	'yes'	-0.286	0.094	0.405	0.492	60,222	-0.290	0.124	0.406	0.496	67,818	-0.095	0.033	0.182	0.222	42,137	-0.089	0.021	0.188	0.223	46,238
11	0.213	0.259	-0.335	'yes'	0.143	0.010	-0.230	0.345	44,487	0.140	0.028	-0.240	0.350	62,558	0.074	0.000	-0.107	0.231	35,627	0.075	0.004	-0.095	0.219	30,751
12	0.139	0.245	0.934	'yes'	0.096	0.060	0.546	0.448	58,901	0.110	0.075	0.555	0.455	48,449	0.031	0.034	0.217	0.151	39,849	0.030	0.027	0.214	0.152	47,385
13	0.588	0.305	0.208	'yes'	0.406	0.231	0.113	0.334	48,407	0.398	0.232	0.116	0.326	51,530	0.131	0.086	0.055	0.056	35,446	0.132	0.093	0.055	0.056	45,945
14	-0.008	0.123	-0.011	'yes'	-0.092	0.219	-0.012	0.252	59,587	-0.068	0.247	-0.020	0.254	96,588	-0.016	0.027	-0.002	0.171	34,024	-0.017	0.020	0.006	0.171	39,924
15	0.027	0.252	0.217	'yes'	-0.101	0.232	-0.036	0.276	47,566	-0.094	0.251	-0.032	0.279	76,369	-0.028	0.080	-0.009	0.169	44,451	-0.030	0.080	-0.020	0.178	48,758
16	0.097	0.084	0.988	'yes'	0.019	-0.029	0.351	0.294	46,113	0.011	-0.043	0.342	0.295	77,858	0.003	-0.011	0.166	0.161	38,831	-0.005	-0.012	0.174	0.171	36,123
17	-0.287	-0.082	0.618	'yes'	-0.160	-0.047	0.483	0.486	54,004	-0.165	-0.066	0.498	0.506	54,871	-0.049	-0.015	0.170	0.201	32,038	-0.051	-0.008	0.180	0.202	56,303
18	-0.228	-0.108	-0.095	'yes'	-0.124	-0.106	-0.040	0.335	47,719	-0.131	-0.132	-0.051	0.361	52,495	-0.050	-0.046	-0.016	0.240	51,456	-0.051	-0.044	-0.019	0.240	42,100
19	0.040	-0.160	0.497	'yes'	0.027	-0.102	0.396	0.366	49,257	0.012	-0.088	0.395	0.361	58,131	0.008	-0.041	0.144	0.174	46,530	-0.002	-0.046	0.137	0.182	40,967
20	0.448	0.585	0.085	'yes'	0.429	0.293	0.030	0.387	52,208	0.425	0.298	0.049	0.384	69,110	0.167	0.132	0.007	0.120	45,306	0.175	0.133	0.011	0.121	43,680
21	0.434	-0.211	0.191	'yes'	0.221	-0.128	0.137	0.260	47,657	0.228	-0.127	0.133	0.263	58,561	0.080	-0.057	0.049	0.166	49,882	0.067	-0.062	0.044	0.175	44,555
22	-0.223	-0.205	-0.034	'yes'	-0.120	-0.137	-0.113	0.387	46,686	-0.118	-0.146	-0.089	0.379	66,486	-0.044	-0.050	-0.029	0.244	48,220	-0.044	-0.054	-0.041	0.254	43,616
23	0.004	-0.151	-0.312	'yes'	0.042	-0.089	-0.117	0.294	51,761	0.052	-0.090	-0.131	0.303	52,570	0.009	-0.032	-0.052	0.220	33,463	0.003	-0.024	-0.048	0.216	48,453
24	0.039	0.358	0.551	'yes'	0.190	0.298	0.540	0.491	51,809	0.193	0.298	0.537	0.489	73,049	0.063	0.081	0.196	0.105	45,318	0.071	0.069	0.212	0.120	25,259
25	0.043	0.234	0.705	'yes'	0.036	0.195	0.477	0.394	43,158	0.038	0.190	0.477	0.393	47,993	0.022	0.084	0.240	0.161	42,573	0.022	0.087	0.236	0.158	33,214
26	0.208	0.124	-0.211	'yes'	0.138	0.089	-0.023	0.129	51,204	0.161	0.082	-0.006	0.124	48,607	0.049	0.040	-0.010	0.135	44,288	0.046	0.041	0.001	0.127	42,900
27	-0.245	0.039	0.135	'yes'	-0.215	-0.026	0.155	0.344	51,195	-0.196	-0.031	0.167	0.331	64,649	-0.063	-0.021	0.065	0.206	38,160	-0.064	-0.002	0.057	0.198	38,937
28	0.007	-0.351	-0.146	'yes'	0.004	-0.205	-0.443	0.630	44,439	0.006	-0.215	-0.466	0.655	62,683	-0.009	-0.060	-0.125	0.297	51,186	-0.001	-0.060	-0.130	0.297	36,612
29	-0.216	0.114	0.414	'yes'	-0.136	0.198	0.263	0.304	52,597	-0.144	0.225	0.274	0.324	59,764	-0.056	0.069	0.092	0.159	44,901	-0.056	0.069	0.089	0.159	46,083
30	0.219	-0.129	-0.581	'yes'	0.298	-0.190	-0.202	0.463	39,627	0.333	-0.211	-0.211	0.498	73,222	0.072	-0.049	-0.080	0.235	36,278	0.062	-0.040	-0.085	0.235	50,024
Mean	0.096	0.042	0.129		0.069	0.016	0.088	0.386	49,361.9	0.072	0.017	0.089	0.389	62,895.9	0.025	0.008	0.040	0.190	40,550.9	0.023	0.009	0.039	0.190	41,960.4
Std	0.321	0.233	0.416		0.226	0.184	0.283	0.138		0.227	0.189	0.284	0.138		0.080	0.063	0.110	0.060		0.079	0.061	0.111	0.059	

<u>ตาราง</u> แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.1}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 30$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.226	0.175	-0.143	'yes'	0.194	0.326	-0.057	0.291	48,474	0.180	0.315	-0.044	0.271	31,738	0.057	0.056	-0.016	0.131	14,807	0.065	0.054	-0.029	0.141	19,249
2	0.180	0.150	0.027	'yes'	0.193	0.079	0.063	0.102	41,862	0.196	0.075	0.075	0.103	48,268	0.058	0.018	0.021	0.122	32,512	0.057	0.022	0.026	0.116	25,455
3	0.232	0.130	0.159	'yes'	0.203	0.107	0.110	0.104	46,128	0.201	0.105	0.109	0.101	42,707	0.072	0.029	0.031	0.103	34,371	0.075	0.032	0.038	0.096	25,538
4	0.385	0.203	0.115	'yes'	0.248	0.239	0.087	0.203	40,797	0.245	0.246	0.077	0.207	31,132	0.104	0.098	0.030	0.070	43,287	0.109	0.093	0.040	0.061	21,048
5	0.081	0.215	-0.010	'yes'	0.065	0.100	0.035	0.074	46,538	0.052	0.113	0.032	0.084	43,950	0.022	0.021	0.015	0.140	27,258	0.014	0.038	0.009	0.140	23,913
6	0.042	0.555	0.144	'yes'	0.034	0.633	0.123	0.537	40,908	0.037	0.633	0.125	0.538	43,418	0.007	0.173	0.048	0.130	36,202	0.012	0.173	0.043	0.128	21,090
7	0.294	0.021	0.121	'yes'	0.261	0.036	0.096	0.173	41,569	0.256	0.043	0.087	0.167	43,198	0.098	0.015	0.041	0.104	32,209	0.096	0.013	0.030	0.112	20,405
8	0.007	0.058	0.273	'yes'	-0.027	0.054	0.334	0.270	38,679	-0.034	0.060	0.339	0.277	42,712	-0.018	0.016	0.086	0.146	30,206	-0.011	0.023	0.095	0.135	23,042
9	0.098	0.017	-0.315	'yes'	0.088	-0.060	-0.288	0.419	47,174	0.072	-0.063	-0.288	0.422	26,802	0.032	-0.019	-0.087	0.232	32,800	0.032	-0.022	-0.097	0.242	28,742
10	0.350	0.547	0.115	'yes'	0.377	0.360	0.100	0.380	35,630	0.365	0.358	0.105	0.370	32,811	0.124	0.157	0.048	0.081	29,393	0.127	0.163	0.038	0.093	18,638
11	-0.135	-0.065	0.139	'yes'	-0.087	-0.061	0.111	0.247	35,253	-0.089	-0.053	0.119	0.244	38,181	-0.040	-0.022	0.042	0.194	36,103	-0.041	-0.015	0.032	0.194	23,035
12	0.098	0.379	-0.096	'yes'	0.359	0.227	-0.072	0.335	46,121	0.374	0.229	-0.070	0.347	42,545	0.073	0.103	-0.028	0.131	43,581	0.076	0.102	-0.029	0.132	25,776
13	-0.349	0.013	0.175	'yes'	-0.184	-0.007	0.201	0.320	29,503	-0.182	-0.020	0.188	0.319	42,772	-0.081	-0.014	0.084	0.215	34,758	-0.079	0.001	0.076	0.206	20,650
14	0.341	0.106	-0.234	'yes'	0.271	0.037	-0.259	0.403	34,525	0.260	0.029	-0.262	0.402	25,640	0.097	0.011	-0.063	0.186	21,839	0.106	0.015	-0.058	0.180	16,641
15	0.050	0.351	-0.101	'yes'	0.074	0.198	-0.099	0.223	39,390	0.075	0.189	-0.101	0.222	37,029	0.028	0.094	-0.046	0.163	32,378	0.025	0.093	-0.035	0.155	23,775
16	0.251	0.064	0.355	'yes'	0.172	0.057	0.274	0.193	34,209	0.172	0.074	0.282	0.197	37,511	0.064	0.023	0.105	0.085	27,257	0.067	0.021	0.108	0.086	22,340
17	-0.125	-0.197	0.152	'yes'	-0.113	-0.086	0.153	0.288	45,314	-0.122	-0.086	0.152	0.294	38,345	-0.048	-0.059	0.062	0.221	24,009	-0.046	-0.043	0.055	0.209	17,372
18	0.110	0.250	-0.183	'yes'	0.078	0.262	-0.121	0.275	39,486	0.079	0.246	-0.128	0.271	30,144	0.028	0.086	-0.062	0.178	39,926	0.033	0.090	-0.060	0.174	22,916
19	0.372	0.111	0.165	'yes'	0.215	0.091	0.140	0.122	39,771	0.209	0.090	0.144	0.118	32,109	0.098	0.029	0.068	0.079	13,498	0.088	0.040	0.057	0.075	22,200
20	0.015	0.228	0.473	'yes'	-0.007	0.178	0.334	0.269	23,776	-0.008	0.169	0.335	0.268	35,340	-0.008	0.071	0.118	0.113	22,366	0.005	0.065	0.127	0.105	20,067
21	0.403	0.080	-0.131	'yes'	0.242	0.077	-0.146	0.285	42,518	0.244	0.081	-0.153	0.292	40,637	0.115	0.018	-0.053	0.174	35,820	0.117	0.027	-0.051	0.169	23,213
22	-0.189	0.305	0.135	'yes'	-0.141	0.221	0.057	0.273	39,182	-0.149	0.216	0.059	0.277	37,044	-0.052	0.084	0.018	0.173	34,504	-0.049	0.091	0.027	0.166	26,439
23	0.432	-0.167	0.237	'yes'	0.335	-0.177	0.198	0.376	51,824	0.334	-0.170	0.191	0.369	45,531	0.123	-0.058	0.080	0.161	20,747	0.117	-0.064	0.065	0.169	22,806
24	0.290	0.100	0.163	'yes'	0.228	0.100	0.209	0.168	41,231	0.230	0.099	0.214	0.173	37,247	0.093	0.025	0.054	0.089	26,788	0.086	0.031	0.045	0.089	26,004
25	0.088	0.059	0.404	'yes'	0.119	0.049	0.286	0.194	55,284	0.130	0.049	0.284	0.193	44,990	0.031	0.016	0.111	0.109	31,275	0.038	0.019	0.110	0.103	27,619
26	0.267	0.032	0.222	'yes'	0.297	0.035	0.145	0.213	46,959	0.291	0.030	0.145	0.209	45,238	0.062	0.012	0.046	0.110	43,530	0.081	0.008	0.049	0.107	22,004
27	0.251	0.109	-0.248	'yes'	0.247	0.060	-0.185	0.323	38,838	0.242	0.058	-0.179	0.316	37,722	0.077	0.021	-0.076	0.194	33,180	0.079	0.024	-0.073	0.190	19,991
28	0.389	-0.023	-0.126	'yes'	0.285	-0.024	-0.122	0.314	20,219	0.289	-0.025	-0.115	0.312	45,692	0.113	-0.013	-0.022	0.167	15,560	0.118	-0.002	-0.030	0.166	24,316
29	0.231	0.220	0.177	'yes'	0.244	0.216	0.119	0.186	37,359	0.252	0.214	0.114	0.191	46,985	0.069	0.083	0.051	0.061	40,084	0.064	0.076	0.051	0.066	24,515
30	0.230	-0.037	0.120	'yes'	0.159	-0.041	0.115	0.154	33,995	0.166	-0.040	0.115	0.156	42,422	0.083	-0.012	0.036	0.131	31,799	0.074	-0.007	0.049	0.121	18,669
Mean	0.164	0.133	0.076		0.148	0.109	0.065	0.257	40,083.9	0.146	0.109	0.065	0.257	38,995.3	0.049	0.035	0.025	0.140	30,734.9	0.051	0.039	0.024	0.137	22,582.3
Std	0.192	0.176	0.196		0.151	0.159	0.166	0.105		0.152	0.158	0.166	0.104		0.056	0.055	0.057	0.047		0.055	0.054	0.057	0.046	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.1}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 100$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.081	0.263	-0.083	'yes'	0.066	0.259	-0.065	0.232	26,047	0.072	0.257	-0.075	0.237	20,571	0.014	0.088	-0.043	0.168	36,707	0.020	0.093	-0.025	0.149	11,435
2	0.000	0.076	-0.076	'yes'	0.006	0.110	-0.052	0.179	30,119	0.004	0.105	-0.061	0.188	20,580	0.004	0.014	-0.008	0.168	23,865	0.002	0.024	-0.025	0.176	11,281
3	0.120	0.166	0.036	'yes'	0.095	0.196	0.032	0.117	29,077	0.110	0.204	0.032	0.125	21,802	0.041	0.052	0.004	0.122	33,629	0.042	0.053	0.012	0.115	12,300
4	0.040	0.084	0.044	'yes'	0.019	0.072	0.027	0.113	23,257	0.032	0.077	0.028	0.101	23,420	0.011	0.045	0.003	0.142	25,750	0.014	0.031	0.010	0.142	12,981
5	0.001	0.076	-0.219	'yes'	-0.001	0.063	-0.284	0.399	30,455	0.002	0.054	-0.264	0.379	22,084	0.002	0.029	-0.055	0.196	31,570	0.000	0.021	-0.071	0.213	12,906
6	0.074	0.077	0.100	'yes'	0.050	0.085	0.096	0.052	29,392	0.061	0.078	0.109	0.046	24,913	0.010	0.025	0.025	0.139	31,330	0.016	0.029	0.031	0.130	11,538
7	0.114	0.062	0.106	'yes'	0.102	0.061	0.140	0.056	33,810	0.102	0.066	0.129	0.045	19,256	0.032	0.030	0.012	0.131	39,983	0.032	0.028	0.033	0.120	12,169
8	0.085	0.089	0.194	'yes'	0.059	0.091	0.159	0.072	37,397	0.049	0.090	0.165	0.083	19,617	0.023	0.027	0.052	0.117	36,943	0.020	0.030	0.066	0.112	11,905
9	0.124	0.101	0.215	'yes'	0.105	0.117	0.198	0.100	20,960	0.092	0.122	0.211	0.114	18,262	0.038	0.072	0.060	0.079	21,888	0.036	0.040	0.075	0.091	11,610
10	-0.008	0.045	-0.021	'yes'	-0.009	0.052	0.004	0.153	40,589	-0.020	0.040	-0.011	0.174	17,696	0.005	0.008	0.008	0.161	31,457	-0.004	0.015	-0.004	0.170	12,404
11	0.202	0.095	0.153	'yes'	0.183	0.087	0.186	0.120	26,442	0.197	0.091	0.188	0.132	20,141	0.047	0.033	0.045	0.101	32,448	0.054	0.030	0.050	0.097	12,558
12	0.294	0.096	0.095	'yes'	0.259	0.137	0.058	0.169	31,865	0.266	0.134	0.077	0.171	21,317	0.111	0.045	0.027	0.092	33,450	0.098	0.036	0.025	0.098	11,712
13	-0.040	0.163	0.167	'yes'	-0.067	0.145	0.154	0.181	47,363	-0.070	0.152	0.151	0.185	23,408	-0.004	0.060	0.040	0.127	27,746	-0.017	0.052	0.053	0.135	13,409
14	0.099	0.152	0.202	'yes'	0.080	0.196	0.204	0.143	28,906	0.081	0.184	0.217	0.145	19,213	0.037	0.044	0.082	0.086	12,326	0.026	0.053	0.064	0.095	10,331
15	0.126	0.125	0.131	'yes'	0.123	0.094	0.133	0.040	31,313	0.142	0.091	0.130	0.052	19,846	0.035	0.049	0.006	0.125	17,941	0.046	0.038	0.048	0.097	12,496
16	0.249	-0.006	-0.152	'yes'	0.190	-0.009	-0.233	0.362	41,966	0.207	-0.011	-0.236	0.369	22,198	0.074	0.011	-0.057	0.183	26,313	0.076	-0.007	-0.058	0.192	11,884
17	0.175	0.116	0.366	'yes'	0.140	0.097	0.386	0.289	24,845	0.148	0.116	0.406	0.310	20,417	0.036	0.040	0.121	0.090	31,992	0.056	0.039	0.121	0.079	10,426
18	-0.011	0.034	0.227	'yes'	-0.001	0.039	0.166	0.136	32,272	-0.015	0.032	0.153	0.144	23,374	0.003	0.020	0.049	0.135	26,830	0.000	0.010	0.061	0.140	12,852
19	0.048	0.124	0.120	'yes'	0.062	0.110	0.119	0.043	33,553	0.061	0.109	0.117	0.043	22,747	0.011	0.054	0.066	0.106	35,697	0.020	0.043	0.039	0.116	11,055
20	0.173	0.213	0.223	'yes'	0.165	0.201	0.198	0.155	30,089	0.157	0.192	0.195	0.144	17,766	0.063	0.068	0.077	0.054	27,610	0.061	0.072	0.071	0.056	10,243
21	0.276	0.143	0.036	'yes'	0.278	0.146	0.050	0.190	35,899	0.270	0.140	0.036	0.187	24,328	0.093	0.029	0.009	0.115	38,704	0.097	0.043	0.011	0.106	13,012
22	0.332	0.174	0.245	'yes'	0.362	0.231	0.172	0.301	24,480	0.373	0.220	0.173	0.307	25,700	0.103	0.056	0.078	0.050	25,294	0.109	0.058	0.073	0.050	12,021
23	0.074	-0.025	0.230	'yes'	0.067	-0.042	0.198	0.176	29,026	0.062	-0.019	0.205	0.164	21,037	0.043	0.032	0.075	0.091	16,711	0.021	-0.007	0.078	0.135	12,004
24	-0.014	-0.104	-0.137	'yes'	-0.001	-0.119	-0.110	0.320	30,597	-0.013	-0.101	-0.109	0.312	21,223	-0.002	-0.044	-0.054	0.235	29,564	-0.001	-0.037	-0.039	0.219	11,920
25	-0.052	0.155	0.330	'yes'	-0.057	0.209	0.279	0.262	29,534	-0.052	0.202	0.272	0.251	21,120	-0.025	0.074	0.109	0.129	38,774	-0.018	0.061	0.101	0.125	10,926
26	0.048	0.010	-0.060	'yes'	0.056	0.007	-0.048	0.180	25,165	0.041	0.010	-0.049	0.184	23,663	0.012	-0.011	-0.014	0.182	14,655	0.013	0.006	-0.013	0.171	10,838
27	0.129	0.243	0.123	'yes'	0.103	0.252	0.119	0.153	35,019	0.103	0.247	0.118	0.149	20,420	0.035	0.100	0.053	0.080	34,338	0.042	0.086	0.039	0.086	11,418
28	-0.052	0.025	0.087	'yes'	-0.057	0.029	0.095	0.172	42,434	-0.071	0.028	0.093	0.185	18,654	-0.009	-0.014	0.042	0.169	20,165	-0.019	0.011	0.029	0.165	13,544
29	0.163	0.036	0.065	'yes'	0.199	0.045	0.061	0.120	33,371	0.200	0.043	0.055	0.124	21,002	0.057	0.005	0.023	0.130	32,043	0.051	0.014	0.021	0.126	13,485
30	0.202	0.177	0.029	'yes'	0.206	0.153	-0.006	0.159	26,941	0.209	0.156	0.007	0.154	24,334	0.074	0.065	0.007	0.102	23,349	0.070	0.059	0.003	0.110	11,935
Mean	0.102	0.100	0.093		0.093	0.104	0.081	0.172	31,406.1	0.093	0.104	0.082	0.173	21,337.0	0.032	0.037	0.028	0.127	28,635.7	0.032	0.034	0.029	0.127	11,953.3
Std	0.105	0.080	0.141		0.104	0.087	0.142	0.092		0.108	0.084	0.143	0.091		0.034	0.031	0.046	0.043		0.035	0.028	0.045	0.041	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.5}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 3$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	1.701	0.317	0.945	'no'	0.188	0.049	0.127	0.663	48,669	0.204	0.036	0.151	0.652	82,136	0.077	0.003	0.033	0.803	43,592	0.085	-0.015	0.015	0.820	68,684
2	0.791	0.066	0.276	'yes'	0.330	0.230	0.314	0.369	70,250	0.341	0.230	0.334	0.355	125,810	0.050	0.090	0.043	0.761	41,454	0.034	0.097	0.032	0.773	57,844
3	0.013	1.305	0.488	'no'	0.091	0.338	0.101	0.594	55,788	0.009	0.330	0.068	0.676	60,467	0.013	0.171	0.025	0.755	53,486	-0.004	0.171	0.013	0.775	62,701
4	0.422	-0.835	0.980	'no'	0.218	-0.142	0.561	0.704	53,387	0.216	-0.131	0.548	0.693	86,723	0.127	-0.073	0.218	0.739	49,275	0.111	-0.071	0.219	0.747	50,290
5	-0.799	0.329	0.165	'yes'	-0.050	0.017	0.042	0.863	46,579	-0.061	0.009	0.036	0.878	99,021	-0.016	0.010	0.014	0.861	50,869	-0.054	0.010	-0.012	0.900	42,738
6	0.228	1.067	0.843	'no'	0.579	0.599	0.623	0.177	62,008	0.576	0.612	0.644	0.198	65,523	0.150	0.261	0.110	0.576	38,873	0.162	0.248	0.096	0.584	68,998
7	1.319	0.849	0.932	'no'	0.579	0.491	0.695	0.210	58,244	0.585	0.474	0.689	0.209	46,465	0.262	0.179	0.252	0.470	49,410	0.268	0.176	0.256	0.468	59,497
8	0.742	1.068	0.722	'no'	0.215	0.403	0.487	0.302	63,425	0.235	0.409	0.467	0.283	77,313	0.060	0.194	0.139	0.646	45,637	0.067	0.184	0.152	0.640	61,457
9	0.754	0.918	-0.806	'no'	0.284	0.471	-0.005	0.551	48,198	0.268	0.510	0.010	0.543	94,632	0.136	0.121	-0.029	0.746	41,896	0.141	0.137	0.005	0.711	72,991
10	-0.266	0.022	0.415	'yes'	0.027	0.146	0.180	0.672	45,839	0.032	0.151	0.187	0.663	48,669	0.009	0.042	0.065	0.800	50,448	-0.008	0.023	0.053	0.828	66,021
11	0.889	-0.040	0.755	'no'	0.584	0.616	0.381	0.187	58,955	0.598	0.623	0.388	0.193	57,240	0.275	0.277	0.190	0.443	49,130	0.288	0.274	0.176	0.448	61,984
12	0.781	0.130	0.447	'yes'	0.077	0.100	0.142	0.684	52,844	0.104	0.200	0.188	0.587	108,633	0.032	0.019	0.044	0.812	46,035	0.031	0.038	0.052	0.797	68,833
13	0.795	0.765	-0.215	'no'	0.087	0.242	-0.099	0.772	47,988	0.072	0.218	-0.096	0.786	116,536	0.033	0.089	-0.033	0.819	45,767	0.025	0.073	-0.027	0.828	65,467
14	0.087	1.654	0.682	'no'	0.178	0.560	0.406	0.341	55,790	0.214	0.563	0.451	0.297	64,301	0.052	0.273	0.163	0.605	46,067	0.080	0.281	0.149	0.590	49,767
15	-0.214	2.021	-0.066	'no'	0.227	0.442	0.443	0.285	58,761	0.189	0.416	0.397	0.339	67,104	0.062	0.189	0.138	0.647	44,806	0.059	0.192	0.152	0.641	50,739
16	0.430	1.332	0.198	'no'	0.318	0.251	0.481	0.309	47,806	0.312	0.285	0.465	0.288	93,808	0.100	0.089	0.249	0.626	48,723	0.094	0.076	0.255	0.636	48,572
17	1.231	0.527	1.430	'no'	0.549	0.665	0.700	0.264	72,012	0.558	0.692	0.710	0.290	66,729	0.242	0.246	0.362	0.388	39,697	0.250	0.247	0.359	0.382	65,554
18	-0.118	-0.628	0.708	'yes'	0.039	-0.076	0.331	0.757	59,946	0.023	-0.073	0.296	0.773	95,544	0.010	-0.038	0.068	0.846	42,431	0.025	-0.037	0.069	0.837	63,537
19	0.703	0.261	0.080	'yes'	0.180	0.066	-0.277	0.946	57,667	0.185	0.027	-0.268	0.956	94,971	0.083	0.015	-0.083	0.865	46,425	0.065	0.025	-0.069	0.859	65,614
20	0.002	-0.563	1.719	'no'	-0.278	-0.106	0.341	0.999	52,409	-0.302	-0.114	0.344	1.022	89,720	-0.047	-0.032	0.202	0.819	52,190	-0.090	-0.033	0.219	0.843	55,713
21	0.205	-0.390	0.857	'no'	0.140	-0.047	0.443	0.658	60,346	0.210	-0.037	0.412	0.616	107,277	0.034	-0.034	0.156	0.788	48,150	0.026	-0.033	0.142	0.798	71,913
22	-0.895	-0.002	0.624	'no'	0.008	0.094	0.558	0.641	52,640	0.016	0.102	0.584	0.632	102,586	-0.010	0.038	0.188	0.756	44,408	-0.015	0.033	0.192	0.760	66,314
23	-0.155	0.912	0.750	'no'	0.276	0.273	0.536	0.322	58,192	0.351	0.316	0.563	0.245	84,881	0.049	0.058	0.142	0.726	47,333	0.041	0.057	0.114	0.746	54,496
24	-0.214	-0.926	-0.165	'yes'	0.294	-0.311	-0.164	1.068	62,625	0.288	-0.309	-0.143	1.055	111,245	0.109	-0.085	-0.026	0.879	49,803	0.094	-0.108	-0.035	0.906	61,295
25	0.112	1.377	0.013	'no'	0.137	0.306	0.033	0.622	55,135	0.172	0.323	0.047	0.587	51,773	0.015	0.169	0.004	0.769	47,089	0.037	0.180	-0.002	0.754	61,082
26	0.495	0.171	0.053	'yes'	0.099	0.214	0.362	0.512	56,931	0.043	0.184	0.408	0.563	52,077	0.019	0.115	0.115	0.727	44,047	0.026	0.114	0.103	0.729	67,910
27	-0.114	-0.181	0.984	'yes'	0.401	-0.070	0.196	0.654	57,943	0.395	-0.092	0.190	0.676	107,346	0.146	-0.034	0.096	0.758	49,000	0.135	-0.051	0.080	0.783	67,338
28	0.834	-0.049	0.906	'no'	0.119	0.152	0.328	0.544	54,555	0.098	0.135	0.344	0.566	114,523	0.042	0.055	0.103	0.752	54,967	0.047	0.050	0.088	0.760	52,969
29	0.089	0.813	0.183	'yes'	0.022	0.312	0.162	0.615	44,012	-0.006	0.314	0.161	0.637	75,622	0.001	0.146	0.063	0.752	44,428	0.006	0.151	0.082	0.735	53,748
30	-0.463	0.674	0.582	'no'	-0.142	0.540	0.120	0.748	58,066	-0.113	0.516	0.163	0.700	114,565	-0.095	0.073	0.070	0.849	43,313	-0.072	0.093	0.095	0.811	57,101
Mean	0.313	0.432	0.516		0.192	0.227	0.285	0.568	55,900.3	0.194	0.231	0.291	0.565	85,441.3	0.067	0.087	0.103	0.726	46,625.0	0.065	0.086	0.101	0.730	60,705.6
Std	0.610	0.743	0.520		0.207	0.254	0.252	0.245		0.215	0.257	0.250	0.248		0.086	0.105	0.100	0.126		0.090	0.107	0.100	0.130	

<u>ตาราง</u> แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.5}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 10$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.887	0.411	0.333	'yes'	0.490	0.278	0.603	0.245	35,594	0.475	0.268	0.617	0.261	60,181	0.214	0.110	0.122	0.614	27,334	0.206	0.103	0.126	0.620	43,502
2	0.133	0.714	0.622	'yes'	0.140	0.468	0.321	0.403	52,701	0.128	0.463	0.299	0.424	56,688	0.045	0.216	0.150	0.641	46,086	0.039	0.224	0.146	0.644	34,160
3	0.151	0.619	0.563	'yes'	0.346	0.521	0.295	0.257	54,806	0.331	0.511	0.294	0.267	72,790	0.091	0.168	0.122	0.648	35,075	0.090	0.170	0.132	0.642	36,430
4	0.302	0.493	0.600	'yes'	0.172	0.286	0.292	0.444	45,400	0.145	0.285	0.288	0.466	54,778	0.047	0.137	0.121	0.694	56,905	0.067	0.137	0.126	0.678	46,934
5	0.685	-0.058	0.225	'yes'	0.557	0.040	0.145	0.584	59,841	0.549	0.074	0.153	0.552	76,349	0.167	-0.007	0.058	0.750	43,484	0.160	0.012	0.053	0.744	38,960
6	0.080	0.277	0.341	'yes'	0.056	0.107	0.351	0.612	43,613	0.067	0.105	0.363	0.602	74,549	0.024	0.061	0.106	0.758	48,149	0.021	0.054	0.115	0.760	31,929
7	0.524	0.327	-0.270	'yes'	0.407	0.185	-0.395	0.954	51,687	0.404	0.182	-0.372	0.933	63,135	0.108	0.112	-0.107	0.821	48,393	0.110	0.115	-0.090	0.805	46,554
8	0.524	0.477	0.291	'yes'	0.333	0.513	0.333	0.236	49,466	0.344	0.518	0.356	0.214	74,417	0.157	0.199	0.093	0.612	39,091	0.148	0.197	0.087	0.622	31,196
9	0.036	0.705	0.320	'yes'	0.023	0.336	0.361	0.523	43,892	0.043	0.341	0.361	0.504	57,122	0.013	0.182	0.177	0.666	43,819	0.019	0.187	0.174	0.660	32,580
10	0.744	0.442	-0.007	'yes'	0.370	0.351	-0.020	0.557	61,423	0.375	0.369	-0.037	0.567	65,114	0.166	0.092	-0.006	0.731	44,249	0.169	0.082	-0.013	0.741	38,428
11	0.090	0.018	0.726	'yes'	0.228	0.092	0.571	0.496	62,338	0.255	0.113	0.566	0.463	64,944	0.072	0.034	0.168	0.714	47,491	0.078	0.020	0.159	0.725	49,375
12	0.881	-0.036	0.463	'no'	0.550	0.043	0.327	0.491	53,061	0.546	0.021	0.320	0.514	45,109	0.275	0.020	0.154	0.633	43,278	0.279	0.018	0.157	0.632	41,533
13	0.701	0.627	0.395	'yes'	0.511	0.384	0.555	0.128	42,790	0.491	0.374	0.551	0.136	38,375	0.204	0.165	0.213	0.531	39,782	0.205	0.167	0.202	0.535	40,187
14	0.838	0.158	0.493	'yes'	0.611	0.348	0.375	0.226	32,717	0.608	0.356	0.354	0.232	44,224	0.254	0.103	0.148	0.585	47,435	0.262	0.089	0.151	0.589	30,304
15	0.154	0.486	0.147	'yes'	0.151	0.285	0.089	0.580	52,087	0.135	0.278	0.093	0.590	63,672	0.044	0.084	0.039	0.771	49,747	0.049	0.090	0.030	0.770	32,490
16	-0.253	0.383	0.650	'yes'	-0.086	0.463	0.267	0.632	47,987	-0.076	0.463	0.269	0.621	80,004	-0.037	0.123	0.111	0.762	39,338	-0.035	0.122	0.118	0.758	38,892
17	0.135	-0.207	0.363	'yes'	0.328	-0.099	0.276	0.662	44,668	0.329	-0.095	0.258	0.664	63,328	0.146	-0.043	0.108	0.757	38,051	0.154	-0.046	0.117	0.752	43,073
18	1.038	0.496	0.277	'no'	0.549	0.415	0.285	0.236	45,831	0.550	0.430	0.302	0.217	44,644	0.233	0.164	0.091	0.593	49,371	0.220	0.164	0.108	0.588	36,786
19	0.761	0.285	0.490	'yes'	0.416	0.197	0.561	0.320	43,660	0.423	0.184	0.551	0.329	71,836	0.193	0.056	0.150	0.643	43,349	0.191	0.062	0.150	0.640	46,142
20	0.787	0.155	0.283	'yes'	0.394	0.300	0.195	0.380	49,705	0.395	0.287	0.180	0.399	78,095	0.157	0.074	0.052	0.707	34,817	0.167	0.064	0.047	0.712	47,039
21	0.182	0.695	0.416	'yes'	0.263	0.340	0.227	0.396	36,874	0.243	0.342	0.231	0.404	65,604	0.056	0.157	0.107	0.685	35,902	0.061	0.165	0.107	0.678	48,129
22	1.331	0.386	0.253	'no'	0.679	0.290	0.149	0.447	43,964	0.678	0.280	0.140	0.458	49,282	0.347	0.111	0.054	0.611	40,606	0.340	0.113	0.063	0.605	37,247
23	0.527	0.119	0.954	'no'	0.274	0.360	0.735	0.355	50,099	0.269	0.372	0.726	0.348	36,050	0.132	0.125	0.249	0.583	44,230	0.127	0.125	0.237	0.591	41,973
24	0.546	0.724	0.409	'yes'	0.320	0.448	0.563	0.197	43,712	0.320	0.453	0.563	0.197	40,241	0.128	0.190	0.160	0.592	37,295	0.128	0.195	0.164	0.587	33,217
25	0.418	0.656	1.067	'no'	0.650	0.632	0.584	0.217	29,860	0.658	0.630	0.586	0.222	50,230	0.159	0.190	0.246	0.526	41,986	0.167	0.192	0.255	0.516	40,550
26	0.559	0.468	0.526	'yes'	0.440	0.236	0.427	0.281	52,487	0.451	0.230	0.414	0.288	54,396	0.142	0.096	0.159	0.639	42,858	0.148	0.089	0.152	0.644	35,100
27	0.023	0.010	0.367	'yes'	0.212	0.246	0.268	0.449	56,120	0.229	0.244	0.281	0.433	92,353	0.050	0.073	0.047	0.768	41,284	0.057	0.068	0.059	0.760	47,766
28	0.217	0.093	0.269	'yes'	0.179	0.030	0.068	0.715	53,564	0.172	0.014	0.065	0.730	70,535	0.079	0.014	0.024	0.801	42,023	0.080	0.007	0.037	0.797	38,392
29	0.503	0.576	0.594	'yes'	0.606	0.478	0.675	0.206	48,304	0.603	0.486	0.671	0.200	41,780	0.156	0.157	0.214	0.564	36,456	0.154	0.153	0.215	0.567	40,351
30	-0.138	0.980	0.124	'no'	-0.010	0.709	0.208	0.623	49,980	-0.014	0.698	0.195	0.630	56,676	-0.024	0.257	0.073	0.718	40,882	-0.011	0.254	0.062	0.717	42,155
Mean	0.446	0.383	0.409		0.339	0.309	0.323	0.428	47,941.0	0.337	0.309	0.321	0.429	60,216.7	0.127	0.114	0.113	0.671	42,292.2	0.128	0.113	0.115	0.669	39,712.5
Std	0.376	0.284	0.262		0.205	0.185	0.231	0.192		0.204	0.184	0.229	0.190		0.090	0.070	0.076	0.081		0.087	0.072	0.074	0.080	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.5}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 30$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.743	0.562	0.486	yes'	0.539	0.562	0.445	0.091	35,939	0.547	0.555	0.455	0.085	28,772	0.232	0.175	0.166	0.538	46,092	0.237	0.192	0.171	0.521	22,579
2	0.727	0.302	0.406	'yes'	0.535	0.307	0.412	0.215	31,464	0.528	0.315	0.403	0.211	27,609	0.243	0.109	0.138	0.592	33,007	0.236	0.106	0.139	0.597	23,762
3	0.314	0.451	0.431	'yes'	0.359	0.411	0.323	0.244	47,501	0.341	0.409	0.333	0.248	36,808	0.101	0.142	0.105	0.666	22,242	0.096	0.142	0.119	0.661	20,049
4	0.401	0.668	0.476	'yes'	0.385	0.451	0.402	0.159	26,962	0.383	0.435	0.391	0.172	27,320	0.160	0.195	0.173	0.562	36,804	0.156	0.209	0.170	0.558	17,420
5	0.613	0.250	0.567	'yes'	0.478	0.298	0.460	0.207	39,856	0.484	0.316	0.464	0.189	34,529	0.190	0.071	0.190	0.614	33,989	0.179	0.073	0.181	0.623	21,727
6	0.554	0.193	0.495	'yes'	0.383	0.351	0.387	0.221	36,017	0.393	0.351	0.395	0.212	39,582	0.164	0.061	0.152	0.654	28,152	0.157	0.072	0.146	0.653	22,745
7	0.525	0.656	0.175	'yes'	0.452	0.462	0.343	0.169	34,855	0.448	0.467	0.362	0.151	39,723	0.160	0.175	0.051	0.650	32,827	0.166	0.171	0.061	0.642	32,431
8	0.587	0.422	0.454	'yes'	0.619	0.361	0.372	0.223	17,096	0.624	0.366	0.385	0.216	25,090	0.181	0.136	0.160	0.592	31,162	0.194	0.139	0.147	0.590	16,733
9	0.361	0.480	0.338	'yes'	0.388	0.502	0.346	0.191	36,357	0.396	0.512	0.341	0.190	35,572	0.115	0.153	0.093	0.659	37,354	0.112	0.132	0.097	0.670	31,160
10	0.334	0.376	0.650	'yes'	0.290	0.469	0.539	0.216	45,042	0.293	0.455	0.539	0.216	37,271	0.085	0.123	0.189	0.641	33,885	0.088	0.135	0.182	0.636	20,922
11	0.733	0.789	0.334	'yes'	0.686	0.557	0.471	0.196	39,839	0.682	0.556	0.469	0.193	25,131	0.263	0.246	0.107	0.525	47,177	0.259	0.233	0.128	0.518	26,280
12	0.750	0.571	0.370	'yes'	0.636	0.453	0.418	0.166	35,623	0.640	0.437	0.417	0.174	28,632	0.276	0.181	0.127	0.540	30,888	0.279	0.166	0.114	0.556	24,732
13	0.639	0.726	0.393	'yes'	0.588	0.481	0.489	0.091	26,139	0.577	0.476	0.493	0.081	31,505	0.233	0.244	0.147	0.512	39,061	0.226	0.241	0.152	0.513	20,915
14	0.379	0.563	0.409	'yes'	0.472	0.382	0.317	0.219	46,662	0.488	0.391	0.321	0.210	23,856	0.144	0.167	0.143	0.605	27,323	0.121	0.169	0.139	0.620	20,219
15	0.778	0.284	0.563	'yes'	0.582	0.398	0.500	0.131	49,726	0.587	0.396	0.490	0.136	37,228	0.258	0.105	0.169	0.570	40,552	0.258	0.109	0.177	0.562	25,354
16	0.790	0.473	0.460	'yes'	0.603	0.521	0.409	0.139	38,652	0.603	0.522	0.404	0.143	27,395	0.229	0.176	0.151	0.548	33,882	0.243	0.161	0.153	0.549	23,581
17	0.482	0.559	0.444	'yes'	0.453	0.412	0.517	0.102	41,248	0.441	0.409	0.507	0.109	28,931	0.169	0.199	0.141	0.573	17,718	0.180	0.179	0.158	0.568	28,729
18	0.589	0.346	0.466	'yes'	0.339	0.533	0.415	0.185	39,533	0.332	0.534	0.418	0.190	34,842	0.173	0.152	0.159	0.587	47,278	0.170	0.143	0.163	0.591	20,989
19	0.718	0.307	0.426	'yes'	0.622	0.370	0.461	0.182	18,697	0.635	0.386	0.473	0.179	37,386	0.230	0.114	0.142	0.592	28,536	0.228	0.127	0.137	0.587	26,810
20	0.386	0.510	0.492	'yes'	0.333	0.513	0.425	0.184	45,325	0.328	0.511	0.428	0.187	39,745	0.105	0.164	0.149	0.626	36,519	0.112	0.172	0.153	0.616	18,598
21	0.541	0.432	0.471	'yes'	0.470	0.328	0.450	0.181	45,289	0.474	0.323	0.457	0.184	29,822	0.184	0.134	0.180	0.580	34,440	0.179	0.125	0.177	0.590	15,252
22	0.823	0.460	0.418	'yes'	0.555	0.446	0.575	0.107	40,574	0.539	0.441	0.587	0.112	22,614	0.246	0.146	0.168	0.548	23,828	0.242	0.151	0.163	0.549	24,222
23	0.195	0.460	0.844	'yes'	0.319	0.386	0.551	0.221	51,584	0.316	0.387	0.546	0.221	36,437	0.079	0.173	0.262	0.584	29,124	0.081	0.151	0.254	0.598	26,027
24	0.376	0.183	0.595	'yes'	0.383	0.237	0.374	0.315	33,195	0.381	0.223	0.374	0.327	45,705	0.130	0.072	0.162	0.659	30,883	0.115	0.061	0.156	0.678	22,694
25	0.166	0.153	0.521	'yes'	0.217	0.158	0.593	0.454	42,796	0.216	0.150	0.595	0.461	46,206	0.053	0.049	0.156	0.722	33,294	0.055	0.046	0.163	0.720	30,260
26	0.699	0.389	0.587	'yes'	0.536	0.445	0.449	0.083	46,441	0.534	0.439	0.441	0.091	33,902	0.243	0.152	0.177	0.541	19,334	0.238	0.142	0.178	0.548	23,184
27	0.316	0.276	0.653	'yes'	0.381	0.276	0.496	0.254	29,313	0.382	0.268	0.486	0.261	34,861	0.148	0.092	0.185	0.624	41,620	0.156	0.093	0.178	0.623	26,788
28	0.379	0.309	0.774	'yes'	0.370	0.344	0.685	0.274	43,913	0.386	0.335	0.693	0.278	25,550	0.116	0.125	0.248	0.593	46,567	0.115	0.130	0.243	0.593	18,223
29	0.295	0.518	0.410	'yes'	0.346	0.521	0.313	0.243	49,215	0.343	0.515	0.307	0.249	43,428	0.080	0.170	0.128	0.651	28,638	0.091	0.176	0.124	0.643	22,883
30	0.586	0.645	0.176	'yes'	0.444	0.534	0.356	0.158	30,109	0.449	0.533	0.358	0.155	26,221	0.148	0.183	0.040	0.661	30,264	0.158	0.196	0.054	0.639	27,105
Mean	0.526	0.444	0.476		0.459	0.416	0.443	0.194	38,165.4	0.459	0.414	0.444	0.194	33,055.8	0.171	0.146	0.152	0.600	33,414.7	0.171	0.145	0.153	0.600	23,412.4
Std	0.190	0.165	0.143		0.119	0.100	0.089	0.075		0.120	0.100	0.088	0.076		0.063	0.048	0.046	0.051		0.063	0.047	0.041	0.051	

<u>**ตาราง**</u> แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.5}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 100$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.588	0.682	0.548	'yes'	0.539	0.595	0.602	0.145	20,714	0.543	0.601	0.590	0.142	11,740	0.202	0.236	0.197	0.500	50,497	0.199	0.234	0.202	0.500	11,927
2	0.510	0.596	0.392	'yes'	0.522	0.548	0.350	0.159	34,439	0.528	0.544	0.362	0.147	17,664	0.176	0.205	0.150	0.561	33,569	0.176	0.200	0.129	0.576	11,001
3	0.379	0.318	0.643	'yes'	0.380	0.310	0.494	0.225	36,649	0.369	0.313	0.493	0.228	13,811	0.127	0.093	0.219	0.619	39,450	0.131	0.109	0.224	0.605	10,666
4	0.413	0.395	0.531	'yes'	0.404	0.425	0.545	0.130	38,926	0.417	0.420	0.539	0.121	15,755	0.127	0.150	0.176	0.605	30,171	0.132	0.131	0.182	0.611	12,933
5	0.407	0.515	0.234	'yes'	0.402	0.476	0.256	0.264	35,787	0.413	0.480	0.248	0.267	14,516	0.144	0.151	0.082	0.650	33,323	0.133	0.159	0.079	0.654	12,295
6	0.595	0.660	0.360	'yes'	0.615	0.437	0.457	0.138	43,782	0.608	0.449	0.465	0.124	15,292	0.213	0.205	0.129	0.554	30,738	0.218	0.205	0.134	0.549	14,054
7	0.441	0.433	0.463	'yes'	0.412	0.480	0.458	0.099	32,896	0.414	0.480	0.455	0.099	16,870	0.135	0.153	0.167	0.604	17,785	0.138	0.150	0.152	0.612	10,394
8	0.490	0.382	0.522	'yes'	0.408	0.536	0.466	0.104	20,050	0.397	0.520	0.455	0.115	13,024	0.141	0.160	0.181	0.588	30,410	0.149	0.150	0.176	0.592	10,579
9	0.436	0.355	0.463	'yes'	0.496	0.296	0.422	0.218	33,443	0.484	0.303	0.419	0.214	14,159	0.134	0.112	0.152	0.637	30,669	0.155	0.112	0.147	0.628	11,196
10	0.473	0.500	0.398	'yes'	0.370	0.549	0.523	0.141	28,490	0.349	0.539	0.526	0.158	11,948	0.144	0.157	0.145	0.608	26,593	0.147	0.165	0.143	0.604	11,739
11	0.524	0.434	0.458	'yes'	0.487	0.428	0.527	0.078	29,644	0.499	0.419	0.511	0.082	15,201	0.182	0.150	0.170	0.577	27,247	0.163	0.142	0.161	0.597	10,535
12	0.480	0.445	0.482	'yes'	0.421	0.467	0.431	0.110	35,604	0.429	0.468	0.436	0.101	14,684	0.164	0.147	0.160	0.594	43,119	0.159	0.152	0.162	0.593	12,435
13	0.481	0.457	0.591	'yes'	0.483	0.471	0.513	0.036	21,085	0.490	0.480	0.489	0.025	15,494	0.154	0.173	0.209	0.558	26,770	0.171	0.184	0.198	0.546	10,194
14	0.378	0.632	0.466	'yes'	0.384	0.564	0.423	0.154	32,289	0.389	0.564	0.422	0.150	14,771	0.128	0.227	0.191	0.556	21,721	0.137	0.229	0.166	0.562	13,601
15	0.548	0.500	0.573	'yes'	0.597	0.439	0.600	0.152	38,582	0.604	0.434	0.609	0.165	16,047	0.187	0.145	0.193	0.564	35,662	0.194	0.155	0.182	0.560	15,548
16	0.540	0.496	0.481	'yes'	0.537	0.498	0.401	0.106	34,635	0.538	0.488	0.419	0.091	13,064	0.187	0.166	0.166	0.567	46,683	0.180	0.169	0.156	0.575	11,566
17	0.454	0.470	0.556	'yes'	0.447	0.445	0.513	0.078	39,782	0.455	0.440	0.505	0.075	17,138	0.200	0.162	0.179	0.554	14,294	0.159	0.167	0.186	0.571	13,772
18	0.527	0.567	0.503	'yes'	0.489	0.597	0.431	0.119	20,237	0.464	0.597	0.433	0.123	12,020	0.181	0.190	0.184	0.546	41,241	0.177	0.206	0.176	0.543	11,877
19	0.688	0.541	0.341	'yes'	0.586	0.588	0.401	0.158	24,323	0.589	0.589	0.401	0.160	17,305	0.211	0.197	0.123	0.563	34,370	0.214	0.191	0.114	0.571	12,714
20	0.625	0.471	0.405	'yes'	0.572	0.479	0.393	0.131	37,223	0.559	0.478	0.390	0.127	11,886	0.224	0.151	0.117	0.587	18,708	0.220	0.165	0.142	0.564	11,055
21	0.604	0.582	0.518	'yes'	0.602	0.635	0.520	0.171	21,006	0.609	0.634	0.525	0.174	13,553	0.205	0.200	0.160	0.540	49,333	0.193	0.195	0.176	0.541	10,633
22	0.427	0.586	0.477	'yes'	0.407	0.516	0.534	0.100	27,874	0.405	0.511	0.527	0.100	14,481	0.144	0.186	0.188	0.568	27,315	0.144	0.186	0.166	0.580	14,285
23	0.574	0.492	0.501	'yes'	0.510	0.615	0.466	0.120	35,730	0.498	0.603	0.472	0.106	10,708	0.178	0.198	0.181	0.544	26,494	0.184	0.187	0.176	0.551	11,249
24	0.601	0.433	0.303	'yes'	0.569	0.444	0.343	0.180	35,628	0.558	0.435	0.333	0.188	18,537	0.202	0.153	0.100	0.608	17,663	0.198	0.147	0.102	0.612	13,396
25	0.653	0.413	0.539	'yes'	0.607	0.427	0.593	0.160	28,886	0.603	0.433	0.594	0.155	13,391	0.220	0.158	0.186	0.542	24,171	0.213	0.144	0.192	0.551	13,577
26	0.536	0.648	0.500	'yes'	0.510	0.520	0.534	0.041	31,817	0.518	0.530	0.530	0.047	12,089	0.177	0.195	0.171	0.553	27,156	0.192	0.213	0.178	0.530	12,164
27	0.534	0.591	0.465	'yes'	0.548	0.474	0.454	0.072	29,890	0.542	0.491	0.452	0.065	12,971	0.200	0.219	0.176	0.523	15,550	0.204	0.199	0.163	0.541	12,929
28	0.435	0.678	0.539	'yes'	0.463	0.670	0.572	0.189	34,921	0.456	0.666	0.570	0.185	14,687	0.137	0.216	0.182	0.560	24,442	0.142	0.219	0.182	0.555	10,478
29	0.469	0.585	0.629	'yes'	0.431	0.520	0.610	0.131	31,872	0.430	0.523	0.606	0.129	14,646	0.149	0.226	0.251	0.511	26,185	0.162	0.215	0.233	0.516	13,400
30	0.607	0.448	0.607	'yes'	0.593	0.455	0.507	0.104	35,268	0.590	0.436	0.516	0.112	11,480	0.213	0.165	0.217	0.524	21,859	0.216	0.158	0.219	0.526	11,912
Mean	0.514	0.510	0.483		0.493	0.497	0.478	0.134	31,715.7	0.492	0.496	0.476	0.133	14,297.7	0.173	0.175	0.170	0.569	29,772.9	0.173	0.175	0.167	0.571	12,136.8
Std	0.083	0.098	0.094		0.079	0.085	0.084	0.051		0.079	0.084	0.083	0.053		0.032	0.034	0.036	0.036		0.029	0.033	0.034	0.035	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 3$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.356	1.386	1.443	'no'	0.673	0.819	0.694	0.317	38,983	0.686	0.821	0.691	0.310	67,057	0.106	0.295	0.217	1.210	44,398	0.094	0.306	0.188	1.229	66,504
2	0.536	2.068	0.480	'no'	0.807	0.842	0.800	0.149	45,443	0.769	0.826	0.754	0.210	49,504	0.248	0.322	0.161	1.143	53,229	0.262	0.323	0.181	1.121	71,375
3	0.940	0.355	0.516	'yes'	0.577	0.613	0.587	0.533	66,794	0.555	0.625	0.601	0.533	89,910	0.144	0.146	0.082	1.345	46,731	0.122	0.149	0.065	1.366	78,705
4	0.636	0.968	1.556	'no'	0.633	0.658	0.798	0.374	68,415	0.670	0.679	0.806	0.333	53,546	0.098	0.146	0.275	1.266	54,339	0.089	0.133	0.267	1.283	37,710
5	1.344	0.029	0.945	'no'	0.659	0.672	0.639	0.423	69,445	0.634	0.623	0.632	0.468	68,102	0.241	0.051	0.272	1.245	56,899	0.236	0.069	0.272	1.236	53,781
6	0.195	1.023	0.364	'no'	0.698	0.477	0.514	0.607	62,935	0.701	0.505	0.558	0.559	64,056	0.350	0.186	0.123	1.190	42,772	0.359	0.185	0.096	1.205	47,251
7	0.906	1.390	0.248	'no'	0.676	0.659	0.614	0.436	63,558	0.668	0.646	0.598	0.457	56,561	0.231	0.295	0.105	1.202	55,486	0.223	0.284	0.103	1.214	63,604
8	1.331	0.322	1.495	'no'	0.705	0.751	0.777	0.275	57,964	0.704	0.727	0.761	0.296	51,320	0.388	0.168	0.306	1.073	48,310	0.390	0.155	0.283	1.094	37,337
9	1.766	0.593	0.439	'no'	0.566	0.570	0.648	0.533	70,436	0.577	0.603	0.640	0.510	76,777	0.245	0.121	0.147	1.266	47,419	0.235	0.117	0.140	1.278	78,625
10	0.220	0.115	1.272	'no'	0.671	0.704	0.806	0.316	55,746	0.651	0.700	0.825	0.328	59,159	0.109	0.340	0.320	1.130	50,257	0.111	0.333	0.327	1.128	54,392
11	1.340	1.014	0.194	'no'	0.681	0.494	0.741	0.488	81,405	0.738	0.524	0.696	0.458	63,217	0.189	0.099	0.119	1.326	47,977	0.191	0.106	0.115	1.323	84,925
12	0.165	1.600	1.710	'no'	0.642	0.612	0.675	0.447	77,133	0.642	0.581	0.684	0.464	93,622	0.059	0.158	0.166	1.340	50,067	0.047	0.168	0.192	1.329	70,676
13	0.325	1.435	0.140	'no'	0.735	0.739	0.624	0.360	54,317	0.736	0.746	0.648	0.338	55,915	0.202	0.256	0.090	1.248	35,457	0.196	0.245	0.083	1.262	58,844
14	1.000	-0.003	1.158	'no'	0.874	0.638	0.649	0.364	45,611	0.886	0.629	0.633	0.380	39,538	0.494	0.193	0.261	1.036	34,883	0.488	0.194	0.247	1.046	47,583
15	0.725	0.335	1.305	'no'	0.535	0.547	0.504	0.644	60,650	0.541	0.530	0.501	0.652	73,936	0.126	0.204	0.155	1.280	43,574	0.118	0.166	0.156	1.305	63,243
16	0.283	0.919	1.526	'no'	0.696	0.692	0.628	0.399	63,394	0.707	0.654	0.622	0.419	73,133	0.194	0.191	0.239	1.200	31,988	0.191	0.185	0.246	1.201	69,334
17	0.532	1.288	1.437	'no'	0.645	0.598	0.676	0.455	69,204	0.643	0.588	0.696	0.453	49,217	0.130	0.251	0.254	1.197	51,614	0.112	0.239	0.257	1.213	59,281
18	0.269	0.354	1.552	'no'	0.652	0.699	0.720	0.367	65,850	0.690	0.725	0.739	0.317	58,079	0.150	0.094	0.297	1.256	43,675	0.145	0.079	0.295	1.269	69,964
19	0.525	1.270	0.417	'no'	0.611	0.611	0.571	0.525	64,111	0.604	0.613	0.578	0.524	69,583	0.162	0.293	0.231	1.167	49,829	0.156	0.296	0.234	1.167	53,596
20	1.227	0.239	1.363	'no'	0.768	0.659	0.621	0.392	46,628	0.767	0.676	0.650	0.362	50,637	0.288	0.229	0.265	1.108	43,491	0.281	0.205	0.248	1.136	39,640
21	0.945	0.427	0.666	'yes'	0.747	0.526	0.548	0.536	63,147	0.749	0.516	0.545	0.545	71,120	0.345	0.182	0.131	1.189	42,583	0.349	0.187	0.133	1.183	40,716
22	1.015	1.379	1.215	'no'	0.786	0.746	0.803	0.215	69,322	0.698	0.686	0.777	0.319	63,882	0.121	0.141	0.139	1.328	36,523	0.136	0.120	0.113	1.346	66,798
23	-0.098	0.711	1.605	'no'	0.580	0.588	0.636	0.520	72,493	0.583	0.601	0.635	0.510	104,284	0.273	0.136	0.203	1.210	49,279	0.264	0.147	0.206	1.206	62,909
24	0.967	0.008	1.858	'no'	0.440	0.234	0.527	0.892	72,078	0.470	0.306	0.554	0.811	113,674	0.075	0.006	0.174	1.417	43,495	0.078	0.041	0.162	1.399	73,003
25	1.270	0.152	1.265	'no'	0.804	0.554	0.604	0.465	69,181	0.801	0.564	0.623	0.447	64,495	0.213	0.107	0.225	1.248	46,930	0.206	0.089	0.220	1.265	73,461
26	0.650	1.462	1.336	'no'	0.483	0.610	0.573	0.605	78,492	0.445	0.577	0.546	0.661	119,889	0.061	0.117	0.087	1.407	42,348	0.070	0.114	0.078	1.408	64,502
27	1.521	0.691	0.572	'no'	0.707	0.646	0.624	0.422	71,093	0.711	0.656	0.649	0.398	55,211	0.251	0.174	0.104	1.258	46,934	0.229	0.176	0.080	1.283	57,584
28	1.856	1.103	0.548	'no'	0.836	0.828	0.849	0.109	54,461	0.833	0.793	0.842	0.139	46,852	0.290	0.201	0.133	1.204	49,673	0.298	0.202	0.147	1.190	44,460
29	2.009	-0.194	-0.047	'no'	0.617	-0.139	-0.099	1.469	78,378	0.621	-0.194	-0.187	1.568	85,134	0.299	-0.020	-0.001	1.421	49,920	0.305	-0.015	0.001	1.414	48,776
30	1.180	-0.007	1.133	'no'	0.901	0.720	0.705	0.265	32,822	0.900	0.702	0.685	0.292	30,659	0.245	0.235	0.248	1.139	41,308	0.247	0.241	0.233	1.143	61,519
Mean	0.864	0.748	0.990		0.680	0.612	0.635	0.463	62,983.0	0.679	0.608	0.633	0.469	67,269.0	0.211	0.177	0.184	1.235	46,046.3	0.208	0.175	0.179	1.241	60,003.3
Std	0.546	0.601	0.551		0.108	0.186	0.167	0.245		0.106	0.184	0.178	0.250		0.104	0.088	0.080	0.096		0.105	0.084	0.081	0.095	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 10$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.727	1.253	0.739	'no'	0.826	0.918	0.887	0.077	21,430	0.803	0.880	0.879	0.101	13,511	0.232	0.316	0.231	1.112	21,320	0.215	0.322	0.224	1.123	41,608
2	0.590	0.778	1.344	'no'	0.904	0.880	0.800	0.102	35,024	0.889	0.898	0.800	0.100	20,251	0.185	0.242	0.318	1.132	43,278	0.185	0.242	0.321	1.131	45,824
3	0.696	0.965	1.002	'no'	0.773	0.847	0.851	0.146	28,950	0.789	0.859	0.862	0.125	16,567	0.193	0.244	0.273	1.150	42,451	0.192	0.242	0.287	1.145	48,780
4	0.649	1.451	0.796	'no'	0.901	0.874	0.878	0.034	24,741	0.900	0.856	0.857	0.061	13,156	0.269	0.467	0.310	0.967	16,595	0.280	0.465	0.298	0.968	39,913
5	1.123	0.799	0.709	'no'	0.768	0.751	0.812	0.218	32,588	0.783	0.754	0.799	0.212	32,884	0.295	0.209	0.224	1.140	49,893	0.287	0.218	0.225	1.139	35,086
6	0.999	0.750	0.871	'no'	0.754	0.765	0.900	0.199	46,859	0.780	0.782	0.906	0.168	22,123	0.305	0.236	0.270	1.092	33,993	0.291	0.232	0.281	1.096	49,965
7	0.827	0.907	1.060	'no'	0.910	0.875	0.856	0.052	25,072	0.905	0.862	0.850	0.063	15,333	0.265	0.323	0.301	1.046	38,317	0.272	0.330	0.314	1.031	45,885
8	1.015	0.853	0.840	'no'	0.869	0.818	0.861	0.096	25,526	0.872	0.849	0.851	0.076	15,896	0.395	0.380	0.345	0.913	42,573	0.387	0.385	0.339	0.918	39,976
9	0.946	0.574	1.071	'no'	0.844	0.865	0.812	0.110	16,607	0.830	0.864	0.816	0.115	21,070	0.301	0.244	0.309	1.067	44,880	0.296	0.217	0.317	1.082	28,805
10	0.879	0.400	1.067	'no'	0.800	0.774	0.739	0.228	23,762	0.784	0.789	0.755	0.216	21,917	0.217	0.144	0.244	1.212	56,293	0.217	0.140	0.234	1.220	47,700
11	0.501	1.512	0.806	'no'	0.831	0.939	0.965	0.103	10,000	0.898	0.910	0.944	0.045	11,574	0.265	0.498	0.349	0.932	39,993	0.262	0.497	0.350	0.934	28,505
12	1.259	0.835	0.768	'no'	0.903	0.937	0.910	0.038	21,006	0.884	0.909	0.902	0.019	12,947	0.323	0.264	0.273	1.063	28,110	0.337	0.257	0.270	1.062	45,542
13	1.552	0.506	0.498	'no'	0.777	0.789	0.682	0.274	25,592	0.779	0.777	0.668	0.289	36,031	0.430	0.215	0.186	1.095	37,681	0.423	0.229	0.186	1.090	37,685
14	0.849	0.706	1.086	'no'	0.833	0.897	0.905	0.067	19,922	0.847	0.875	0.884	0.060	16,556	0.279	0.220	0.325	1.086	45,945	0.273	0.231	0.318	1.086	41,285
15	1.063	0.798	0.882	'no'	0.845	0.830	0.791	0.141	49,763	0.842	0.832	0.796	0.137	22,861	0.285	0.273	0.268	1.082	28,765	0.291	0.264	0.260	1.088	39,848
16	0.651	1.015	0.919	'no'	0.881	0.808	0.807	0.132	37,628	0.887	0.815	0.829	0.112	17,252	0.259	0.251	0.237	1.128	36,441	0.254	0.247	0.241	1.131	36,383
17	0.883	0.992	0.572	'no'	0.741	0.856	0.790	0.198	38,098	0.749	0.849	0.789	0.194	29,195	0.246	0.248	0.139	1.197	49,524	0.230	0.241	0.133	1.213	43,386
18	1.191	0.502	1.073	'no'	0.837	0.848	0.953	0.098	33,439	0.874	0.864	0.955	0.071	13,673	0.318	0.162	0.323	1.103	46,645	0.331	0.172	0.329	1.086	51,276
19	0.562	0.452	1.168	'no'	0.888	0.723	0.797	0.205	38,247	0.903	0.735	0.830	0.179	21,610	0.392	0.172	0.339	1.050	41,702	0.401	0.168	0.338	1.049	38,102
20	0.961	1.197	0.813	'no'	0.926	0.871	0.849	0.065	32,695	0.918	0.876	0.863	0.048	11,110	0.392	0.440	0.330	0.892	31,751	0.393	0.437	0.332	0.891	41,992
21	1.152	1.273	0.443	'no'	0.839	0.970	0.884	0.095	13,039	0.848	0.959	0.843	0.097	15,079	0.387	0.400	0.217	0.990	40,457	0.386	0.407	0.235	0.974	38,627
22	0.540	1.094	1.040	'no'	0.852	0.733	0.735	0.240	35,968	0.851	0.725	0.751	0.235	29,738	0.243	0.330	0.325	1.043	38,535	0.228	0.324	0.320	1.058	45,257
23	1.274	0.660	0.852	'no'	0.837	0.879	0.894	0.067	39,563	0.818	0.860	0.897	0.091	15,523	0.311	0.209	0.239	1.123	44,351	0.308	0.203	0.244	1.126	41,859
24	0.282	1.517	1.066	'no'	0.924	0.912	0.900	0.027	10,536	0.935	0.917	0.869	0.050	11,763	0.157	0.395	0.300	1.080	42,266	0.151	0.393	0.296	1.087	40,054
25	0.561	0.867	1.176	'no'	0.757	0.814	0.900	0.167	32,139	0.743	0.819	0.909	0.176	20,473	0.319	0.368	0.458	0.903	35,567	0.318	0.366	0.478	0.896	42,431
26	0.583	1.102	0.864	'no'	0.814	0.733	0.794	0.216	35,173	0.828	0.726	0.804	0.212	24,191	0.261	0.321	0.344	1.026	44,179	0.252	0.314	0.357	1.028	38,232
27	1.029	1.136	0.768	'no'	0.910	0.919	0.913	0.025	28,357	0.923	0.917	0.931	0.043	10,399	0.325	0.358	0.275	1.008	32,359	0.329	0.351	0.256	1.021	42,197
28	0.891	0.989	0.519	'no'	0.845	0.811	0.883	0.106	40,259	0.841	0.823	0.894	0.097	18,593	0.320	0.289	0.237	1.072	34,919	0.324	0.293	0.225	1.075	43,869
29	1.033	1.249	0.513	'no'	0.803	0.942	0.857	0.114	31,840	0.845	0.947	0.860	0.083	16,782	0.275	0.340	0.193	1.097	35,698	0.283	0.336	0.192	1.096	45,919
30	0.902	0.823	1.019	'no'	0.912	0.906	0.854	0.048	29,513	0.883	0.872	0.824	0.083	18,799	0.286	0.266	0.298	1.068	24,693	0.291	0.267	0.294	1.067	46,395
Mean	0.872	0.932	0.878		0.843	0.849	0.849	0.123	29,444.5	0.848	0.847	0.847	0.119	18,895.2	0.291	0.294	0.283	1.062	38,305.8	0.290	0.293	0.283	1.064	41,746.2
Std	0.279	0.306	0.224		0.055	0.069	0.065	0.071		0.053	0.062	0.062	0.068		0.065	0.090	0.063	0.081		0.067	0.090	0.066	0.083	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 30$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	1.198	0.731	0.861	'no'	0.923	0.855	0.921	0.055	20,583	0.935	0.876	0.916	0.045	10,217	0.426	0.294	0.315	0.967	17,114	0.427	0.286	0.330	0.963	26,586
2	0.948	0.858	0.855	'yes'	0.905	0.902	0.844	0.056	25,719	0.895	0.901	0.848	0.052	10,002	0.368	0.351	0.338	0.949	14,777	0.365	0.352	0.337	0.951	25,101
3	0.831	0.831	0.914	'yes'	0.884	0.865	0.877	0.045	25,945	0.890	0.882	0.876	0.032	10,134	0.369	0.363	0.448	0.880	22,329	0.366	0.364	0.431	0.891	24,544
4	1.052	0.659	0.757	'no'	0.878	0.888	0.806	0.098	19,629	0.874	0.898	0.809	0.094	10,378	0.391	0.232	0.235	1.071	29,183	0.393	0.222	0.226	1.082	24,197
5	0.921	0.924	0.782	'yes'	0.916	0.862	0.915	0.044	15,966	0.885	0.883	0.915	0.027	10,680	0.283	0.309	0.297	1.046	31,264	0.288	0.316	0.295	1.041	27,423
6	0.905	0.678	0.981	'no'	0.881	0.844	0.848	0.078	34,881	0.869	0.831	0.854	0.088	11,086	0.316	0.274	0.312	1.039	32,588	0.323	0.272	0.324	1.029	26,584
7	0.692	0.930	1.141	'no'	0.891	0.920	0.899	0.022	24,787	0.877	0.912	0.892	0.027	10,285	0.279	0.326	0.405	0.981	43,256	0.274	0.329	0.409	0.980	21,568
8	0.743	1.022	0.824	'no'	0.890	0.839	0.796	0.121	13,530	0.880	0.853	0.782	0.129	11,392	0.279	0.330	0.249	1.065	40,084	0.283	0.319	0.258	1.063	19,254
9	0.625	1.151	0.909	'no'	0.844	0.894	0.893	0.056	16,203	0.858	0.900	0.920	0.047	10,626	0.217	0.348	0.285	1.072	35,360	0.224	0.348	0.277	1.073	24,666
10	0.928	0.786	0.907	'yes'	0.898	0.877	0.878	0.032	35,069	0.886	0.869	0.864	0.050	10,040	0.300	0.266	0.321	1.048	23,681	0.295	0.261	0.316	1.056	21,605
11	1.315	0.763	0.614	'no'	0.879	0.861	0.928	0.053	21,563	0.894	0.896	0.914	0.016	10,003	0.401	0.280	0.244	1.032	13,381	0.409	0.263	0.228	1.048	23,863
12	0.973	0.807	0.928	'no'	0.818	0.806	0.932	0.129	21,364	0.885	0.802	0.932	0.104	10,360	0.343	0.291	0.345	0.995	38,429	0.352	0.274	0.354	0.995	17,892
13	1.042	0.989	0.705	'no'	0.899	0.882	0.888	0.022	24,578	0.890	0.908	0.884	0.020	10,116	0.360	0.341	0.259	1.008	41,295	0.364	0.334	0.258	1.010	25,134
14	0.697	1.064	0.902	'no'	0.891	0.862	0.838	0.073	30,218	0.893	0.875	0.854	0.053	10,779	0.306	0.361	0.317	0.992	38,003	0.309	0.368	0.315	0.988	26,927
15	0.865	0.960	0.843	'yes'	0.865	0.864	0.814	0.100	31,179	0.879	0.882	0.837	0.069	10,014	0.313	0.312	0.284	1.034	35,578	0.308	0.316	0.288	1.033	23,611
16	0.988	0.778	0.930	'no'	0.883	0.917	0.839	0.065	10,000	0.874	0.888	0.914	0.032	10,405	0.320	0.273	0.296	1.046	33,507	0.301	0.265	0.308	1.055	20,218
17	1.150	0.751	0.816	'no'	0.876	0.922	0.874	0.042	33,891	0.879	0.915	0.870	0.039	10,274	0.373	0.275	0.284	1.024	23,152	0.373	0.280	0.286	1.020	22,858
18	1.003	0.611	0.843	'no'	0.906	0.845	0.787	0.126	43,722	0.913	0.848	0.834	0.085	10,547	0.303	0.231	0.258	1.103	33,737	0.316	0.247	0.264	1.083	25,088
19	0.823	0.719	1.044	'no'	0.876	0.880	0.895	0.032	26,550	0.854	0.868	0.911	0.057	10,167	0.252	0.265	0.341	1.065	24,276	0.261	0.251	0.360	1.059	28,046
20	0.972	0.558	1.029	'no'	0.878	0.865	0.840	0.073	30,718	0.869	0.843	0.850	0.082	10,134	0.381	0.252	0.375	0.983	38,340	0.376	0.247	0.369	0.991	26,372
21	0.914	0.780	0.950	'yes'	0.890	0.908	0.909	0.016	20,488	0.882	0.914	0.902	0.023	10,088	0.319	0.256	0.304	1.052	24,465	0.308	0.256	0.300	1.062	25,604
22	1.075	0.826	0.883	'no'	0.862	0.909	0.884	0.043	19,179	0.895	0.894	0.860	0.041	10,129	0.415	0.336	0.336	0.933	37,380	0.406	0.350	0.333	0.932	21,217
23	0.759	0.934	0.765	'yes'	0.843	0.842	0.895	0.082	39,018	0.830	0.843	0.905	0.090	11,226	0.237	0.344	0.266	1.073	29,662	0.235	0.351	0.275	1.065	23,808
24	0.554	0.875	1.046	'no'	0.865	0.801	0.876	0.108	30,549	0.859	0.778	0.885	0.129	10,291	0.297	0.326	0.419	0.962	25,916	0.308	0.331	0.423	0.950	21,669
25	0.802	0.884	1.029	'no'	0.887	0.913	0.846	0.057	31,124	0.882	0.910	0.866	0.040	10,113	0.350	0.371	0.399	0.913	39,136	0.344	0.378	0.396	0.914	21,459
26	0.968	0.956	0.759	'no'	0.885	0.864	0.880	0.044	26,128	0.870	0.884	0.872	0.044	10,492	0.322	0.310	0.258	1.046	31,206	0.320	0.313	0.269	1.039	17,250
27	0.854	0.816	0.850	'yes'	0.862	0.860	0.848	0.076	41,051	0.876	0.866	0.855	0.062	10,873	0.272	0.310	0.299	1.050	30,366	0.272	0.304	0.292	1.058	28,258
28	0.650	0.910	1.227	'no'	0.870	0.943	0.924	0.057	24,842	0.893	0.928	0.926	0.038	10,491	0.267	0.351	0.433	0.959	44,091	0.272	0.352	0.435	0.955	15,554
29	1.031	0.773	0.936	'no'	0.903	0.870	0.880	0.036	35,183	0.912	0.876	0.867	0.043	10,181	0.375	0.288	0.330	0.988	36,701	0.370	0.299	0.327	0.985	19,144
30	0.797	0.922	1.065	'no'	0.917	0.871	0.916	0.037	26,160	0.915	0.854	0.905	0.049	10,228	0.346	0.335	0.413	0.929	39,635	0.332	0.331	0.402	0.946	22,585
Mean	0.903	0.841	0.903		0.882	0.874	0.872	0.063	26,660.6	0.883	0.876	0.877	0.057	10,391.7	0.326	0.307	0.322	1.010	31,596.4	0.326	0.306	0.323	1.010	23,269.5
Std	0.173	0.134	0.131		0.023	0.033	0.040	0.031		0.020	0.034	0.036	0.030		0.053	0.040	0.060	0.055		0.052	0.043	0.059	0.054	

ตาราง แสดงผลการจำลองตัวประมาณเมตริกซ์สหสัมพันธ์ด้วยวิธีเบส์ทั้งหมด 30 รอบ เมื่อกำหนด $\mathbf{r} = \mathbf{0.9}$ และขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการประมาณองค์ประกอบเมตริกซ์สหสัมพันธ์ $m = 100$

No.	MVUE's Estimator			Positive Semi-Definite	Joint Uniform										Marginal Uniform									
					Independence Chain					Ball Walk					Independence Chain					Ball Walk				
					Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.	Bayes's Estimator			Norm	Iter.
	r_{12}	r_{13}	r_{23}		r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}			r_{12}	r_{13}	r_{23}		
1	0.868	0.906	0.988	'yes'	0.814	0.890	0.908	0.087	14,209	0.884	0.888	0.896	0.020	10,028	0.371	0.378	0.382	0.906	30,721	0.380	0.379	0.399	0.890	10,158
2	0.877	0.970	0.809	'yes'	0.912	0.906	0.880	0.023	19,273	0.909	0.904	0.884	0.018	10,000	0.311	0.345	0.312	1.000	40,890	0.319	0.342	0.297	1.006	12,156
3	1.080	0.881	0.771	'no'	0.892	0.889	0.879	0.025	25,468	0.904	0.895	0.872	0.029	10,001	0.412	0.352	0.326	0.932	30,776	0.420	0.354	0.331	0.923	13,273
4	0.947	0.924	0.812	'yes'	0.872	0.903	0.881	0.034	22,855	0.895	0.909	0.901	0.010	10,028	0.331	0.334	0.328	0.985	23,801	0.339	0.337	0.323	0.982	14,128
5	0.995	0.942	0.769	'no'	0.858	0.892	0.894	0.043	17,555	0.885	0.923	0.898	0.027	10,354	0.345	0.355	0.293	0.987	40,701	0.359	0.365	0.305	0.966	12,370
6	1.020	0.817	0.867	'no'	0.906	0.916	0.898	0.017	18,327	0.890	0.928	0.879	0.037	10,052	0.370	0.312	0.311	0.987	17,190	0.368	0.312	0.315	0.986	10,685
7	0.928	0.886	0.826	'yes'	0.859	0.884	0.873	0.052	15,648	0.882	0.868	0.875	0.044	10,714	0.327	0.330	0.324	0.993	25,771	0.342	0.321	0.312	0.996	14,819
8	0.756	0.875	1.066	'no'	0.835	0.912	0.877	0.070	17,913	0.852	0.903	0.894	0.049	10,090	0.300	0.375	0.403	0.940	31,625	0.304	0.361	0.400	0.946	15,697
9	0.878	0.943	0.875	'yes'	0.915	0.895	0.898	0.016	33,040	0.899	0.894	0.907	0.010	10,266	0.319	0.332	0.311	1.004	19,039	0.327	0.338	0.319	0.992	10,792
10	0.907	0.820	0.989	'no'	0.911	0.923	0.867	0.042	10,000	0.889	0.915	0.891	0.020	10,056	0.351	0.333	0.354	0.960	29,406	0.350	0.342	0.359	0.952	12,104
11	0.803	0.805	1.023	'no'	0.894	0.850	0.874	0.057	10,000	0.888	0.881	0.887	0.026	10,388	0.315	0.320	0.361	0.985	26,440	0.304	0.308	0.368	0.994	10,920
12	1.064	0.771	0.848	'no'	0.873	0.944	0.916	0.054	10,000	0.862	0.934	0.892	0.052	10,191	0.370	0.315	0.302	0.990	17,223	0.360	0.307	0.319	0.990	11,801
13	0.805	0.988	0.900	'no'	0.884	0.876	0.890	0.031	27,599	0.914	0.873	0.893	0.031	10,360	0.319	0.344	0.336	0.982	25,514	0.315	0.345	0.342	0.980	10,590
14	0.836	0.869	0.974	'yes'	0.892	0.893	0.890	0.015	25,397	0.896	0.888	0.893	0.015	10,167	0.317	0.313	0.353	0.992	27,713	0.318	0.318	0.347	0.992	11,849
15	0.860	0.883	0.989	'yes'	0.904	0.869	0.904	0.032	20,129	0.899	0.895	0.905	0.007	10,210	0.370	0.342	0.412	0.912	15,501	0.363	0.364	0.410	0.903	11,160
16	0.985	0.765	0.936	'no'	0.831	0.875	0.916	0.075	14,206	0.899	0.899	0.911	0.011	10,000	0.338	0.309	0.336	0.992	24,104	0.343	0.293	0.333	1.001	11,053
17	0.985	0.848	0.862	'yes'	0.833	0.900	0.920	0.070	10,000	0.893	0.877	0.920	0.031	10,163	0.367	0.309	0.349	0.968	41,696	0.366	0.318	0.333	0.972	11,853
18	0.896	0.887	0.986	'yes'	0.898	0.890	0.904	0.011	21,419	0.910	0.913	0.911	0.019	10,000	0.382	0.361	0.390	0.905	35,618	0.363	0.360	0.392	0.915	11,709
19	0.845	0.866	1.024	'no'	0.856	0.898	0.903	0.044	15,041	0.885	0.897	0.915	0.021	10,017	0.318	0.354	0.390	0.947	17,514	0.334	0.351	0.388	0.941	13,581
20	0.737	0.947	1.030	'no'	0.893	0.877	0.893	0.026	11,172	0.893	0.909	0.897	0.012	10,061	0.322	0.380	0.378	0.937	27,024	0.315	0.372	0.384	0.942	13,541
21	0.891	0.887	0.916	'yes'	0.878	0.905	0.866	0.041	10,800	0.874	0.900	0.880	0.033	10,034	0.333	0.345	0.326	0.980	26,588	0.338	0.349	0.339	0.967	13,505
22	0.903	0.909	0.909	'yes'	0.899	0.885	0.889	0.018	22,537	0.891	0.907	0.900	0.012	10,056	0.346	0.344	0.335	0.967	34,861	0.347	0.343	0.346	0.961	13,034
23	0.911	0.982	0.809	'no'	0.880	0.896	0.902	0.020	13,438	0.889	0.898	0.891	0.015	10,190	0.341	0.371	0.331	0.958	44,225	0.343	0.371	0.326	0.959	13,535
24	0.853	0.920	0.878	'yes'	0.840	0.893	0.902	0.061	27,712	0.872	0.882	0.885	0.037	10,005	0.341	0.364	0.326	0.964	25,487	0.329	0.340	0.331	0.982	13,211
25	0.801	0.882	0.979	'yes'	0.870	0.879	0.874	0.045	27,650	0.891	0.881	0.870	0.037	10,048	0.319	0.338	0.364	0.970	30,931	0.334	0.341	0.366	0.958	13,120
26	0.808	0.944	0.882	'yes'	0.908	0.842	0.887	0.060	14,152	0.911	0.845	0.879	0.060	10,049	0.300	0.324	0.311	1.020	38,904	0.314	0.333	0.325	0.998	14,657
27	1.064	0.859	0.821	'no'	0.898	0.940	0.900	0.040	19,862	0.918	0.920	0.902	0.027	10,104	0.368	0.328	0.310	0.979	30,128	0.375	0.334	0.315	0.969	13,912
28	0.842	0.851	1.046	'no'	0.901	0.891	0.863	0.038	11,581	0.891	0.904	0.910	0.014	10,027	0.346	0.327	0.385	0.949	33,239	0.328	0.343	0.381	0.952	12,858
29	0.861	0.818	0.968	'yes'	0.835	0.881	0.885	0.069	19,095	0.870	0.899	0.888	0.032	10,536	0.324	0.306	0.352	0.993	32,653	0.315	0.301	0.339	1.008	11,935
30	0.898	0.884	0.945	'yes'	0.900	0.907	0.857	0.044	28,497	0.915	0.911	0.868	0.037	10,104	0.355	0.353	0.382	0.930	15,420	0.352	0.349	0.353	0.950	16,080
Mean	0.897	0.884	0.917		0.878	0.893	0.890	0.042	18,485.8	0.892	0.898	0.893	0.026	10,143.3	0.341	0.340	0.346	0.967	28,690.1	0.342	0.340	0.347	0.966	12,669.5
Std	0.089	0.058	0.086		0.029	0.022	0.017	0.020		0.015	0.019	0.014	0.014		0.026	0.022	0.032	0.030		0.026	0.022	0.031	0.030	

การคำนวณ $\alpha(\mathbf{R}_t,\mathbf{R}^{'}) = \min\left\{\frac{k(\mathbf{x}/\mathbf{R}^{'})h(\mathbf{R}^{'})Q(\mathbf{R}_t:\mathbf{R}^{'})}{k(\mathbf{x}/\mathbf{R}_t)h(\mathbf{R}_t)Q(\mathbf{R}^{'}:\mathbf{R}_t)},1\right\}$ ในขั้นตอนที่ 7. จะเปลี่ยนไปตามวิธีดังต่อไปนี้

1. Joint Uniform Distribution / Independence Chain
2. Joint Uniform Distribution / Symmetric Chain
3. Marginal Uniform Distribution / Independence Chain
4. Marginal Uniform Distribution / Symmetric Chain

<u>1. Joint Uniform Distribution / Independence Chain</u>

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{'}{}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{'}{}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega_3)}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega^{'}{}_3)}\right)}{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{t}{}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{t}{}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega_3)}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega^{'}{}_3)}\right)},1\right\}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{'}{}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{'}{}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)}{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{t}{}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{t}{}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)},1\right\}$$

<u>2. Joint Uniform Distribution / Symmetric Chain</u>

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{'}{}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{'}{}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega_3)}\right)}{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{t}{}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{t}{}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega_3)}\right)},1\right\}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}'_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}'_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)}{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)},1\right\}$$

<u>3. Marginal Uniform Distribution / Independence Chain</u>

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}'_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}'_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\left|\mathbf{R}'\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}'_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega'_{3})}\right)}{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\left|\mathbf{R}^{t}\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}^{t}_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)\left(\frac{1}{vol(\Omega'_{3})}\right)},1\right\}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}'_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}'_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\left|\mathbf{R}'\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}'_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)}{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\left|\mathbf{R}^{t}\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}^{t}_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)},1\right\}$$

<u>4. Marginal Uniform Distribution / Symmetric Chain</u>

$$\min\left\{\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}'_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}'_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\left|\mathbf{R}'\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}'_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)}{\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left|\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)}\right|}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{x}_{obs})^{T}(\mathbf{R}^{t}_{obs,obs(i)})^{-1}(\mathbf{x}_{obs})\right]\right\}\right)\left(\left|\mathbf{R}^{t}\right|^{2}(\prod_{i=1}^{d}\left|\mathbf{R}^{t}_{\bullet\bullet}\right|)^{-2}\right)},1\right\}$$

ประวัติผู้เขียนวิทยานิพนธ์

นางสาวศิริลักษณ์ ชัยโชณิชย์ เกิดเมื่อวันที่ 11 พฤษภาคม 2524 ที่จังหวัดสระบุรี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีสถิติศาสตรบัณฑิต เกียรตินิยมอันดับสอง สาขาสถิติคณิตศาสตร์ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ.2546 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญามหาบัณฑิต สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อ พ.ศ.2549