5

การแจกแจงเชิงลิมิตสำหรับผลบวกของ
ส่วนกลับของตัวแปรสุ่มอิสระ
ยกกำลังจำนวนบวก

นาง อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์

บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

พ.ศ. 2530

ISBN 974-567-407-9

LIMIT DISTRIBUTIONS FOR SUMS OF THE RECIPROCAL OF A POSITIVE POWER OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

Ms Imchit Termwuttipong

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Doctor of Philosophy

Department of Mathematics

Graduate School

Chulalongkorn University

1987

ISBN 974-567-407-9

Thesis Title Limit Distributions for Sums of the Reciprocal of a Positive Power of Independent Random Variables

By Ms Imchit Termwuttipong

Department Mathematics

Thesis Advisor Associate Professor Virool Boonyasombat

Accepted by the Graduate School, Chulalongkorn University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy

.... Dean of Graduate School

(Professor Thavorn Vajrabhaya, Ph.D.)

Thesis Committee

.... Chairman

(Associate Professor Subha Sutchritpongsa, Ph.D.)

.... Thesis Advisor

(Associate Professor Virool Boonyasombat, Ph.D.)

.... Member

(Assistant Professor Sompong Dhompongsa, Ph.D.)

.... Member

(Sidney S. Mitchell, Ph.D.)

.... Member

(Chai-Hok Eab, Ph.D.)

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การแจกแจงเชิงลิมิตสำหรับผลบวกของส่วนกลับของตัวแปรสุ่มอิสระยกกำลังจำนวนบวก

ชื่อนิสิต นาง อิ่มจิตต์ เติมวุฒิพงษ์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ วิรุฬห์ บุญสมบัติ

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2529

บทคัดย่อ

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มอิสระ และ f_n เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของ X_n สำหรับ $n = 1,2,\ldots$ ในบทความเรื่อง "Limit distributions for sums of reciprocals of independent random variables" J.M. Shapiro ได้ศึกษาตรวจสอบฟังก์ชันการแจกแจงเชิงลิมิตของผลบวกในรูป

$$\frac{1}{B_n(r)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|X_k|^r} - A_n(r)$$

โดยที่ $A_n(r)$ และ $B_n(r)$ เป็นค่าคงตัวที่เหมาะสม และ r เป็นจำนวนจริงบวกซึ่งมีค่ามากกว่า $\frac{1}{2}$

ในงานวิจัยนี้ เราจะศึกษาปัญหาเดียวกันนี้สำหรับกรณีที่จำนวนบวก r มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{1}{2}$ โดยเราจะหาเงื่อนไข ซึ่งทำให้ฟังก์ชันการแจกแจงของ

$$\frac{1}{B_n(r)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|X_k|^r} - A_n(r)$$

สำหรับค่าคงตัว $A_n(r)$ และ $B_n(r)$ ที่เหมาะสม เมื่อ $r \leq \frac{1}{2}$ จะลู่เข้าสู่การแจกแจงปกติ และจะแสดงค่าคงตัว $A_n(r)$ และ $B_n(r)$ บางค่าซึ่งเหมาะสม

Thesis Title Limit Distributions for Sums of the Reciprocal of a Positive Power of Independent Random Variables.

Name Ms Imchit Termwuttipong

Thesis Advisor Associate Professor Virool Boonyasombat

Department Mathematics

Academic Year 1986

ABSTRACT

Let $X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables and f_n the probability density functions of X_n, for $n = 1,2,\ldots$. In a paper entitled "Limit distributions for sums of reciprocals of independent random variables" J.M.Shapiro investigates the limit distribution functions of

$$\frac{1}{B_n(r)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|X_k|^r} - A_n(r)$$

for some suitably chosen constants $A_n(r)$ and $B_n(r)$ where r is a positive real number greater than $\frac{1}{2}$.

In this work, we deal with the problem in the case where $r \leq \frac{1}{2}$. Conditions are found so that for some suitably chosen constants $A_n(r)$ and $B_n(r)$, $n = 1,2,\ldots$, the distribution functions of

$$\frac{1}{B_n(r)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|X_k|^r} - A_n(r)$$

where $r \le \frac{1}{2}$, converges to the normal law, and a possible choice of those constants $A_n(r)$ and $B_n(r)$ is given.

ACKNOWLEDGEMENT

I wish to express my gratitude to Dr.Virool Boonyasombat for his helpful guidance and encouragement throughout the course of investigation.

My sincere thanks are also due to Professor J.M.Shapiro for his stimulating talks and papers.

This work contains a number of improvement which are suggested by Dr.Sompong Dhompongsa, Dr.C.H.Eab and Dr.Sidney S.Mitchell. It is a pleasure to express my sincere thanks to them for their generous assistance.

CONTENTS

INTRODUCTION

This work is concerned with probability limit theorems, mainly related to the reciprocal of a positive power of independent random variables. The problem was first investigated by J.M.Shapiro, and can be precisely stated as follows:

Let $X_1, X_2, \ldots$ be a sequence of independent random variables and for each natural number n, let f_n be the probability density function of X_n. If r is a positive real number, find a suitable condition which guarantees that there exist sequences of real constants $\{A_n(r)\}$ and $\{B_n(r)\}$ such that the distribution functions of

$$\frac{1}{B_n(r)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|X_k|^r} - A_n(r)$$

converges to a limit.

In 1974, Shapiro [2] proved that, in the case where the random variables are identically distributed, if the common density function f is continuous at zero and f(0) is nonzero then the limit function is always a stable law having a characteristic exponent α, which depends on the positive parameter r. If r is greater than $\frac{1}{2}$ the exponent α is $\frac{1}{r}$ and if not, the stable law is a normal law.

In 1984, Shapiro [4] considered the problem in the case where the random variables are not necessarily identically distributed. When the parameter r is greater than $\frac{1}{2}$, conditions were found so that the distribution functions of suitably normalized sums $\frac{1}{B_n(r)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|X_k|^r} - A_n(r)$ converge to a stable law with characteristic exponent $\frac{1}{r}$. For the case r less than or equal to $\frac{1}{2}$, the problem was not solved

In the present work we find a sufficient condition for the convergence of $\frac{1}{B_n(r)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|X_k|^r} - A_n(r)$, where $0 < r \leq \frac{1}{2}$.

In Chapter I, some important preliminary results and notations, which are necessary for the work, are presented.

Chapter II gives the results obtained by Shapiro.

Finally, in Chapter III, two main theorems are proved. In the theorem, the conditions which enable us to obtain the results are given.