โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่

(Bounds of Pointwise Approximation for Matching Problem)

ชื่อนิสิต นายพิจิตร เจริญผล **เลขประจำตัว** 5833535023

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ สาขาคณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่

นายพิจิตร เจริญผล

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2561

Bounds of Pointwise Approximation for Matching Problem

Pijit Charoenpol

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science Chulalongkorn University
Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน	ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่
โดย	นายพิจิตร เจริญผล
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย)

สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ .... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุรชัย สมบัติบริบูรณ์)

พิจิตร เจริญผล : ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่

(Bounds of pointwise approximation for Matching Problem)

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน : ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี, 34 หน้า

ในโครงงานนี้ได้ประยุกต์ใช้ใช้วิธีของสไตน์และเชนในการหาขอบเขตทั้งแบบสม่ำเสมอและแบบไม่สม่ำเสมอของการประมาณค่าแบบจุดของปัญหาการจับคู่ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ....

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน ....

ปีการศึกษา 2561

5833535023 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : Bounds of pointwise approximation for Matching Problem

PIJIT CHAROENPOL : Bounds of pointwise approximation for Matching Problem

ADVISOR: PROF. Kritsana Neammanee, Ph.D. ,34 pp.

In this project use the Stein-Chen medtod is applied to obtain non-uniform and uniform bounds of pointwise approximation in matching problem by Poisson distribution with parameter $\lambda = 1$.

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature ....

Field of Study: Mathematics Advisor's Signature ....

Academic Year: 2018

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง “ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่” ได้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานโครงงานจึงใคร่ขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี ที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษา ให้คำแนะนำ ชี้ให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานมาตลอด ตั้งแต่เริ่มต้นจนทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ สามารถนำไปเผยแพร่ได้

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. คำรณ เมฆฉาย และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สุรชัย สมบัติบริบูรณ์ ที่ให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบโครงงาน และได้ให้ข้อเสนอแนะและข้อคิด รวมทั้งชี้ให้เห็นถึงข้อผิดพลาดต่าง ๆ ซึ่งทำให้โครงงานนี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำ ตลอดระยะเวลาที่เข้ามาศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัวที่คอยสนับสนุน และขอขอบคุณเพื่อน ๆ พี่ ๆ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการทำโครงงานครั้งนี้

ผู้จัดทำ

พิจิตร เจริญผล

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

ปัญหาการจับคู่ เริ่มมีการศึกษาตั้งแต่ ปี ค.ศ.1708 โดย Pierre Remond de Montmort ปรากฏครั้งแรกในหนังสือ Essay d’ Analyse sur les Jeux de Hazard [10] ซึ่งปัญหาการจับคู่ได้กล่าวไว้ว่า ถ้าหากมีสิ่งของทั้งหมด n ชิ้น โดยของแต่ละชิ้นมีหมายเลข $1,2,3,\ldots,n$ กำกับอยู่ และมีตำแหน่งในการวางสิ่งของอยู่ n ตำแหน่ง ซึ่งแต่ละตำแหน่งมีหมายเลข $1,2,3,\ldots,n$ กำกับอยู่ โดยในแต่ละตำแหน่งสามารถวางสิ่งของได้เพียงตำแหน่งละ 1 ชิ้นเท่านั้น ปัญหาการจับคู่ที่เราสนใจ คือ ความน่าจะเป็นในการวางสิ่งของตรงตำแหน่ง w_0 ชิ้น จากสิ่งของทั้งหมด n ชิ้น โดยที่ $0 \le w_0 \le n$ หากมองปัญหาการจับคู่เป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์จะได้ว่า สำหรับ $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ กำหนดให้

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } i \\ 0, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ ไม่ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } i \end{cases} \tag{1.1}$$

จะได้ว่า

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{n} \tag{1.2}$$

กำหนดให้ $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ดังนั้น W_n คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่ง สังเกตเห็นว่า $P(X_1 = 1)\,P(X_2 = 1) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$ แต่ $P(X_1 = 1\,, X_2 = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n\cdot(n-1)}$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน ด้วยเหตุนี้ W_n จึงไม่เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม

ในโครงงานนี้เราจะพิจารณา $P(W_n = w_0)$ โดยที่ $0 \le w_0 \le n$ และ เรียก $P(W_n = w_0)$ ว่าค่าความน่าจะเป็นแบบจุดของปัญหาการจับคู่

ในปี ค.ศ. 1992 Bradford R. Crain [11] ได้หาค่าของ $P(W_n = w_0)$ ได้ดังนี้

$$P(W_n = w_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{w_0!}\displaystyle\sum_{i=2}^{n-w_0}(-1)^i\,\frac{1}{i!} & , \quad w_0 \le n-2\,, \\ 0 & , \quad w_0 = n-1\,, \\ \dfrac{1}{n!} & , \quad w_0 = n \end{cases} \tag{1.3}$$

จาก $\frac{1}{e} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\,\frac{1}{i!} = \sum_{i=2}^{\infty}(-1)^i\,\frac{1}{i!}$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{w_0!}\sum_{i=2}^{n-w_0}(-1)^i\,\frac{1}{i!} = \frac{1}{ew_0!}$ ซึ่ง $\frac{1}{ew_0!}$ ก็คือค่าของ $P(X = w_0)$ เมื่อ X เป็นตัวสุ่มปัวซงที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ นั่นเอง โดยเราจะกล่าวว่าตัวแปรสุ่ม Poi_λ จะมีการแจกแจงแบบปัวซง ที่มีพารามิเตอร์ λ ก็ต่อเมื่อ

$$P(Poi_\lambda = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, \ldots$$

จากข้อสังเกตข้างต้น เราจึงมีแนวคิดที่จะประมาณค่า $P(W_n = w_0)$ ด้วยการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ โดยโครงงานนี้ผู้จัดทำสนใจหาขอบเขตของ $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right|$

ขอบเขตการประมาณค่านั้น มีอยู่ 2 ประเภทด้วยกัน คือ ขอบเขตแบบสม่ำเสมอ (uniform bound) และขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอ (non-uniform bound) ในการประมาณค่าฟังก์ชันการแจกแจง F ด้วยฟังก์ชันการแจกแจง G นั้น เราจะเรียกค่าคงตัว $C > 0$ ที่ทำให้ $\operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}}|F(x) - G(x)| \leq C$ ว่าขอบเขตแบบสม่ำเสมอ ซึ่งขอบเขตดังกล่าวจะเป็นขอบเขตของ $|F(x) - G(x)|$ ทุกจำนวนจริง x แต่สำหรับค่า $C(x_0)$ ที่ขึ้นอยู่กับค่า x_0 ที่ทำให้ $|F(x_0) - G(x_0)| \leq C(x_0)$ เราจะเรียกขอบเขตประเภทนี้ว่า ขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอ ขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอของ $|F(x_0) - G(x_0)|$ จึงขึ้นอยู่กับค่า x_0

ขอบเขตแบบสม่ำเสมอและขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอนั้น มีข้อดีและข้อด้อยต่างกัน กล่าวคือโดยปกติแล้วขอบเขตแบบสม่ำเสมอจะมีความคมน้อยกว่าขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอ แต่ก็มีข้อดีตรงที่ว่าสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้กับทุกค่า x ดังนั้นในกรณีที่เราไม่ทราบค่า x เราต้องใช้ขอบเขตแบบสม่ำเสมอ แต่หากเราทราบค่า x ที่เราจะหาขอบเขต $|F(x) - G(x)|$ เรามักจะใช้ขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอซึ่งจะได้ขอบเขตที่ดีกว่าหรือคมกว่า โดยจะกล่าวว่าขอบเขตใดมีความคมกว่า เมื่อ ค่าคงที่ของขอบเขตนั้นน้อยกว่าอีกขอบเขตหนึ่ง เช่น $\frac{C_1}{n}$ จะมีความคมกว่า $\frac{C_2}{n}$ เมื่อ $0 < C_1 < C_2$

ในปี ค.ศ.1972 สไตน์ [5] ได้เสนอการหาขอบเขตที่เรียกว่า วิธีของสไตน์ (Stein's method) โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แทนการแปลงฟูริเยร์ เราพบว่าในหลายกรณีการหาขอบเขตการประมาณค่าโดยวิธีของสไตน์นั้นได้ผลลัพธ์ดีกว่า โดยเฉพาะการหาขอบเขตการประมาณค่าแบบไม่สม่ำเสมอ ต่อมาในปี ค.ศ.1975 เชน [4] ได้นำแนวคิดของสไตน์มาประยุกต์กับการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง โดยได้สร้างสมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจกปัวซง สำหรับ $h, f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต และ $\lambda > 0$ กำหนดให้

$$\mathcal{P}_\lambda(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

เราเรียกสมการผลต่าง

$$\lambda f(w+1) - wf(w) = h(w) - \mathcal{P}_\lambda(h) \qquad (1.4)$$

ว่าสมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง (Stein's eqution for Poisson distribution function) โดยงานวิจัยของเชนได้พัฒนาการหาขอบเขตการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง จนทำให้วิธีการนี้เป็นที่รู้จักในนามของ วิธีของสไตน์และเชน (Stein-Chen's method)

จาก **(1.4)** หากเราเลือกฟังก์ชัน h ที่เหมาะสม เช่น ให้ $h = h_{w_0}$ โดยที่

$$h_{w_0}(w) = \begin{cases} 1, & w = w_0 \\ 0, & w \neq w_0 \end{cases}$$

และหาค่าคาดคะเนทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$E[\lambda f(w+1) - wf(w)] = E[h(w) - \mathcal{P}_\lambda(h)] = P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}$$

สำหรับตัวแปรสุ่ม R จะให้ $E[R]$ แทนค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม R

ดังนั้น เราสามารถหาขอบเขตของ $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right|$ โดยหาขอบเขตของ $|E[\lambda f(w+1) - wf(w)]|$ แทน แล้วเราจะเรียกขอบเขต $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right|$ ว่า ขอบเขตการประมาณค่าแบบจุด

ในปี ค.ศ. 1992, บาร์เบอร์, ฮอลล์และเจนสัน [3] ใช้วิธีของสไตน์และเชน ในการหาขอบเขตประมาณค่าแบบสม่ำเสมอของ W_n ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ โดยได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\left|P(W_n \leq w_0) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0}\frac{1}{k!}\right| \leq \frac{2(1-e^{-1})}{n} \tag{1.5}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 คณินทร์และกฤษณะ [7] ใช้วิธีของสไตน์และเชน หาขอบเขตประมาณค่าแบบไม่สม่ำเสมอของ W_n ไว้ดังนี้

$$\left|P(W_n \leq w_0) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0}\frac{1}{k!}\right| \leq \Delta(n, w_0) \quad \text{โดยที่ } w_0 \in \{0,1,2,3,\ldots,n\} \tag{1.6}$$

เมื่อ

$$\Delta(n, w_0) = \begin{cases} \dfrac{2}{en} & , \quad w_0 = 0, \\ \dfrac{2(1-2e^{-1})}{n} & , \quad w_0 = 1, \\ \dfrac{2.08}{(w_0+1)n} & , \quad w_0 = 2,3,\ldots,n \end{cases}$$

เราจะเห็นได้ว่าขอบเขตการประมาณค่าแบบไม่สม่ำเสมอของ **(1.6)** จะมีความคมกว่า **(1.5)** ทุกค่า $w_0 \in \{0,1,2,3,\ldots,n\}$ แต่ทั้ง **(1.5)** และ **(1.6)** เป็นการประมาณความน่าจะเป็นสะสมไม่ใช่การประมาณค่าแบบจุด ซึ่งเป็นสิ่งที่จะศึกษาในโครงงานนี้

ในโครงงานนี้เราสนใจขอบเขตการประมาณค่าแบบจุดของปัญหาการจับคู่ ซึ่งคือขอบเขตของ $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right|$ ที่เป็นผลลัพธ์ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ **1** สำหรับ $w_0 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ จะได้ว่า

$$\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0}\right| \le \frac{2}{n}\, \delta_{w_0} \tag{1.7}$$

เมื่อ

$$\delta_{w_0} = \begin{cases} 0.368, & w_0 = 0, \\ 0.633, & w_0 = 1, \\ \dfrac{0.482}{(w_0+1)!} + \dfrac{1}{w_0}, & w_0 = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

สังเกตจาก $\delta_{w_0} \le 0.633$ ทุก $w_0 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ ดังนั้นเราจะได้ขอบเขตแบบสม่ำเสมอ

$$\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0}\right| \le \frac{1.266}{n} \quad \text{ทุก } w_0 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\} \tag{1.8}$$

ข้อสังเกต

1. จาก (1.6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right| &\le \left|P(W_n \le w_0) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0}\frac{1}{k!}\right| + \left|P(W_n \le w_0 - 1) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0-1}\frac{1}{k!}\right| \\ &\le \Delta(n, w_0) + \Delta(n, w_0 - 1) \end{aligned} \tag{1.9}$$

และจากความจริงที่ว่า

$$\frac{2}{n}\left(\frac{0.482}{(w_0+1)!} + \frac{1}{w_0}\right) \le \frac{2}{n}\left(\frac{1.04}{(w_0+1)} + \frac{1.04}{(w_0)}\right) = \Delta(n, w_0) + \Delta(n, w_0 - 1) \quad \text{เมื่อ } w_0 \ge 2$$

เราจะเห็นได้ว่าค่าขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอ (1.7) มีความคมกว่าค่าขอบเขตของคณินทร์และ กฤษณะ (1.9) เมื่อ $w_0 \ge 2$

2. จาก (1.5) จะได้ว่า

$$\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right| \le \left|P(W_n \le w_0) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0}\frac{1}{k!}\right| + \left|P(W_n \le w_0 - 1) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0-1}\frac{1}{k!}\right|$$

$$\leq \frac{2(1-e^{-1})}{n} + \frac{2(1-e^{-1})}{n}$$

$$\leq \frac{2.529}{n} \tag{1.10}$$

ดังนั้นค่าขอบเขตแบบสม่ำเสมอของผู้จัดทำ (1.7) *)* มีความคมกว่าค่าขอบเขตที่ได้จาก (1.10) เป็น 2 เท่า ทุก $w_0 \in \{0, 1\ 2, 3, \ldots, n\}$

บทที่ 2

วิธีของสไตน์และสมการของสไตน์

ในปี ค.ศ.1972 สไตน์ [5] ได้เสนอบทความซึ่งมีเนื้อหาเกี่ยวกับการแสดงการลู่เข้าของฟังก์ชันการแจกแจงของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกัน สู่ฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยวิธีการใหม่ที่ไม่ใช่การแปลงฟูริเยร์ แต่ใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์แทน โดยเริ่มต้นจากสมการเชิงอนุพันธ์

$$f'(w) - wf(w) = h(w) - N(h) \tag{2.1}$$

เมื่อ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องสามารถหาอนุพันธ์ได้เป็นช่วง โดยที่อนุพันธ์บางส่วนนั้นมีความต่อเนื่อง และ

$$N(h) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\, d\phi(x) \text{ โดยที่ } \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

โดยเราเรียกสมการ (2.1) ว่า **สมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน** (Stien's equation for normal standard distribution function)

โดยเลือก $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ที่กำหนดโดย

$$h(w) = \begin{cases} 1, & w \le x_0 \\ 0, & w > x_0 \end{cases}$$

สำหรับบาง $x_0 \in \mathbb{R}$ และให้ W เป็นตัวแปรสุ่มใดๆ จากสมการ (2.1) เราจะได้ว่า

$$f_x{}'(W) - Wf_x(W) = h(W) - \phi(x_0)$$

โดยที่

$$f_x(w) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}w^2} \phi(w)[1 - \phi(x)] \ , & w \le x \\ \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}w^2} \phi(x)[1 - \phi(w)] \ , & w > x \end{cases}$$

เป็นคำตอบสมการของสไตน์ (2.1) และ เมื่อเราหาค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่มทั้งสองข้างของสมการข้างต้นเราจะได้ว่า

$$P(W \le x_0) - \phi(x_0) = E[f_x{}'(W) - Wf_x(W)]$$

ดั้งนั้นในการหาขอบเขตประมาณค่า

$$|P(W \le x_0) - \phi(x_0)|$$

สามารถหาได้จากขอบเขตของ

$$\left|E[f_x{}'(W) - Wf_x(W)]\right|$$

แทนได้ โดยจะเรียกการหาขอบเขตการประมาณค่าตามวิธีดังกล่าวข้างต้นนี้ว่า การหาขอบเขตการประมาณค่าโดย**วิธีของสไตน์** (Stein's method)

ต่อมาในปี ค.ศ.1975 เชน [4] ได้นำแนวคิดของไสตน์มาประยุกต์กับการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงโดยได้สร้าง**สมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจกปัวซง** (Stein's eqution for Poisson distribution function) ดังต่อไปนี้

$$\lambda f(w+1) - wf(w) = h(w) - \mathcal{P}_\lambda(h) \tag{2.2}$$

เมื่อ $h, f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต, $\lambda > 0$ และ

$$\mathcal{P}_\lambda(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \tag{2.3}$$

งานวิจัยของเชนได้พัฒนาวิธีการประมาณค่าความน่าจะเป็นด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง จนทำให้วิธีการนี้เป็นที่รู้จักกันดีในนามของ **วิธีของเชนและสไตน์** (Chen-Stein's method) หรือ **วิธีของสไตน์และเชน** (Stein-Chen's method) ซึ่งต่อมาได้มีการประยุกต์ใช้ในหลายสาขาและได้เป็นต้นแบบของงานวิจัยของนักวิทยาศาสตร์หลายท่าน

จาก [4] หน้า 82 เชนได้แสดงว่า สำหรับ $h : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและ $\lambda > 0$ เราจะได้ว่า $U_\lambda h : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่กำหนดโดย $U_\lambda h\,(0) = 0$ และ

$$U_\lambda h(k) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(k-1)!\,\lambda^{l-k}}{l!} [h(l) - \mathcal{P}_\lambda(h)] \tag{2.4}$$

โดยที่ $k = 1, 2, \ldots$ เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต และ เป็นคำตอบของสมการที่ (2.2)

จาก (2.4) เลือก $h = h_{w_0}$ โดยที่ $h_{w_0} : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$h_{w_0}(w) = \begin{cases} 1, & w = w_0 \\ 0, & w \neq w_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

กำหนดให้ $f_{w_0}(w) = U_1 h_{w_0}(w)$ และ $\mathcal{P}(h) = \mathcal{P}_1(h)$ จาก ธีรภาพโอฬาร [8] จะได้ว่า

$$f_{w_0}(w) = \begin{cases} -e(w-1)!\left[\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right)\mathcal{P}\left(h_{c_{w-1}}\right)\right], & 1 \le w \le w_0 \\ e(w-1)!\,\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right)\mathcal{P}\left(1 - h_{c_{w-1}}\right), & w > w_0 \\ 0, & w = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

โดยที่ $C_k = \{0,1,\ldots,k\}$, และ $h_{c_{w_0}} : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$h_{c_{w_0}}(w) = \begin{cases} 1, & w \le w_0 \\ 0, & w > w_0 \end{cases}$$

ในโครงงานนี้สนใจปัญหาการจับคู่ กล่าวคือ ค่าความน่าจะเป็นในการวางสิ่งของตรงตำแหน่ง w_0 ชิ้นจากสิ่งของทั้งหมด n ชิ้น โดยที่ $0 \leq w_0 \leq n$ นั่นคือสนใจค่า $P(W_n = w_0)$

กำหนดให้ $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ โดยที่

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } i \\ 0, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ ไม่ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } i \end{cases}$$

และ $\lambda = E[W_n] = E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = 1$

เรามีแนวคิดที่จะประมาณค่า $P(W_n = w_0)$ ด้วยการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$

จากสมการ (2.2) ถ้าแทน w ด้วย W_n

$$1f_{w_0}(W_n + 1) - W_n f_{w_0}(W_n) = h(W_n) - \mathcal{P}_1(h)$$

เมื่อหาค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่มทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0} = E[f_{w_0}(W_n + 1) - W_n f_{w_0}(W_n)] \tag{2.7}$$

ดังนั้น เราจะหาขอบเขตของ $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0}\right|$ จากขอบเขต $|E[f(W_n + 1) - W_n f(W_n)]|$ ในการหาขอบเขต $\left|E[f_{w_0}(W_n + 1) - W_n f_{w_0}(W_n)]\right|$ เราจำเป็นต้องใช้บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้งที่ 2.1 ให้ $w_0 \in \{0,1,2, \dots, n\}$ และ $\triangle f_{w_0}(w + 1, w) = f_{w_0}(w + 1) - f_{w_0}(w)$ จะได้ว่า

(1) เมื่อ $w > w_0$ จะได้ $\left|\Delta f_{w_0}(w + 1, w)\right| = \dfrac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=w+1}^{\infty} \dfrac{l - w}{l!}\right]$

(2) เมื่อ $w = w_0$ จะได้ $\left|\Delta f_{w_0}(w + 1, w)\right| = \dfrac{1}{ew_0}\left[w \sum_{l=w+1}^{\infty} \dfrac{1}{l!} + \sum_{l=0}^{w-1} \dfrac{1}{l!}\right]$

(3) เมื่อ $w < w_0$ จะได้ $\left|\Delta f_{w_0}(w + 1, w)\right| = \dfrac{(w-1)!}{ew_0!}\left[w \sum_{l=0}^{w} \dfrac{1}{l!} - \sum_{l=0}^{w-1} \dfrac{1}{l!}\right]$

พิสูจน์

จาก (2.3) ถ้า $\lambda = 1$ จะได้ว่า

$$\mathcal{P}(h) = \frac{1}{e} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{h(l)}{l!}$$

ดังนั้น $\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right) = \dfrac{1}{ew_0!}$, $\mathcal{P}\left(h_{c_w}\right) = \dfrac{1}{e} \sum_{l=0}^{w} \dfrac{1}{l!}$, $\mathcal{P}\left(1 - h_{c_w}\right) = \dfrac{1}{e} \sum_{l=w+1}^{\infty} \dfrac{1}{l!}$ (2.8)

กรณี (1) เมื่อ $w > w_0$ จึงทำให้ $w+1 > w_0$ จาก (2.6) ได้ว่า

$f_{w_0}(w) = e(w-1)!\,\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\mathcal{P}\big(1-h_{c_{w-1}}\big)$ และ $f_{w_0}(w+1) = ew!\,\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\mathcal{P}\big(1-h_{c_w}\big)$

จากความจริงข้างต้น และ (2.8) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta f_{w_0}(w+1,w) &= ew!\,\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\mathcal{P}\big(1-h_{c_w}\big) - e(w-1)!\,\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\mathcal{P}\big(1-h_{c_{w-1}}\big) \\
&= e(w-1)!\,\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\big[w\mathcal{P}\big(1-h_{c_w}\big) - \mathcal{P}\big(1-h_{c_{w-1}}\big)\big] \\
&= e(w-1)!\frac{1}{ew_0!}\left[\frac{w}{e}\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!} - \frac{1}{e}\sum_{l=w}^{\infty}\frac{1}{l!}\right] \\
&= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[w\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!} - \sum_{l=w}^{\infty}\frac{1}{l!}\right] \\
&= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{w}{l!} - \sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{(l-1)!}\right] \\
&= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{w-l}{l!}\right] \\
&< 0
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราได้ว่าหาก $w > w_0$ แล้วจะได้

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| = \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{l-w}{l!}\right]$$

กรณี (2) เมื่อ $w = w_0$ ดังนั้น $w+1 > w_0$ จาก (2.6) ทำให้ได้ว่า

$f_{w_0}(w) = -e(w-1)!\left[\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\mathcal{P}\big(h_{c_{w-1}}\big)\right]$ และ $f_{w_0}(w+1) = ew!\,\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\mathcal{P}\big(1-h_{c_w}\big)$

จากข้างต้น และ (2.8) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta f_{w_0}(w+1,w) &= e(w-1)!\,\mathcal{P}\big(h_{w_0}\big)\big[w\mathcal{P}\big(1-h_{c_w}\big) + \mathcal{P}\big(h_{c_{w-1}}\big)\big] \\
&= e(w-1)!\frac{1}{ew_0!}\left[\frac{w}{e}\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!} + \frac{1}{e}\sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right] \\
&= \frac{1}{ew_0}\left[w\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!} + \sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right] \\
&> 0
\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้า $w = w_0$ แล้วจะได้

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| = \frac{1}{ew_0}\left[w\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!} + \sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right]$$

กรณี (3) เมื่อ $w < w_0$ ทำให้ $w+1 \le w_0$ จาก (2.6) ทำให้ได้ว่า

$f_{w_0}(w) = -e(w-1)!\left[\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right)\mathcal{P}\left(h_{c_{w-1}}\right)\right]$ และ $f_{w_0}(w+1) = -ew!\left[\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right)\mathcal{P}\left(h_{c_w}\right)\right]$

จากความจริงข้างต้น และ (2.8) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta f_{w_0}(w+1,w) &= -e(w)!\left[\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right)\mathcal{P}\left(h_{c_w}\right)\right] + e(w-1)!\left[\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right)\mathcal{P}\left(h_{c_{w-1}}\right)\right] \\
&= -e(w-1)!\,\mathcal{P}\left(h_{w_0}\right)\left[w\mathcal{P}\left(h_{c_w}\right) - \mathcal{P}\left(h_{c_{w-1}}\right)\right] \\
&= -e(w-1)!\frac{1}{ew_0!}\left[\frac{w}{e}\sum_{l=0}^{w}\frac{1}{l!} - \frac{1}{e}\sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right] \\
&= -\frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[w\sum_{l=0}^{w}\frac{1}{l!} - \sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right]
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราได้ว่าถ้า $w < w_0$ และ $w+1 \le w_0$ แล้วจะได้

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| = \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[w\sum_{l=0}^{w}\frac{1}{l!} - \sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right]$$

□

บทตั้งที่ 2.2 ให้ $w_0 \in \{0,1,2,\dots,n\}$ และ $w \ge 1$ จะได้ว่า

$$\left|\triangle f_{w_0}(w+1,w)\right| \le \delta_{w_0}$$

โดยที่

$$\delta_{w_0} = \begin{cases} 0.368, & w_0 = 0, \\ 0.633, & w_0 = 1, \\ \dfrac{0.482}{(w_0+1)!} + \dfrac{1}{w_0}, & w_0 = 2,3,\dots,n \end{cases}$$

พิสูจน์

การพิสูจน์นั้นได้นำแนวทางมาจาก ธีรภาพโอฬาร และ เนียมมณี [7] หน้า 492 ในการพิสูจน์บทตั้งนี้เราจะแบ่ง w_0 เป็น 3 กรณี คือ $w_0 = 0$, $w_0 = 1$ และ $w_0 \ge 2$

กรณีที่ 1 $\boldsymbol{w_0 = 0}$

เนื่องจาก $w \ge 1$ ทำให้ $w > w_0$ ซึ่งจากบทตั้งที่ 2.1 ข้อ 1. ได้ว่า

$$\begin{aligned}
&\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| \\
&\quad= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{l-w}{l!}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{(w-1)!}{e}\left[\frac{1}{(w+1)!}+\frac{2}{(w+2)!}+\frac{3}{(w+3)!}+\cdots\right]$$

$$= \frac{(w-1)!}{e(w-1)!}\left[\frac{1}{w(w+1)}+\frac{2}{w(w+1)(w+2)}+\frac{3}{w(w+1)(w+2)(w+3)!}+\cdots\right]$$

$$\leq \frac{1}{e}\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{i-1}{i!}$$

จากความจริงข้างต้นและความจริงที่ว่า

$$\sum_{i=2}^{\infty}\frac{i-1}{i!} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{1}{(i-1)!}-\frac{1}{i!}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1!}-\frac{1}{n!}\right] = 1 \qquad (2.9)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| \leq \frac{1}{e} \leq 0.368$$

กรณีที่ 2 $\boldsymbol{w_0 = 1}$

ในกรณีนี้เราจะแบ่ง w ออกเป็น 2 กรณี คือ $w = 1$ และ $w > 1$

กรณี 2.1 $\boldsymbol{w = 1}$

เนื่องจาก $w = w_0$ จากบทตั้งที่ 2.1 ข้อ 2. ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| = \frac{1}{ew_0}\left[w\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!}+\sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l!}+\frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{e}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)+\frac{1}{e}$$

$$= \frac{1}{e}\left(e-\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}\right)+\frac{1}{e}$$

$$= 1-\frac{1}{e}$$

กรณี 2.2 $\boldsymbol{w > 1}$

เนื่องจาก $w > 1$ และ $w_0 = 1$ ทำให้ $w > w_0$ ดังนั้นจากบทตั้งที่ 2.1 ข้อ 1. ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| = \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{l-w}{l!}\right]$$

$$= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\frac{1}{(w+1)!}+\frac{2}{(w+2)!}+\frac{3}{(w+3)!}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{e}\cdot\left[\frac{1}{w(w+1)}+\frac{2}{w(w+1)(w+2)}+\frac{3}{w(w+1)(w+2)(w+3)}+\cdots\right]$$

$$\leq \frac{1}{e}\cdot\left[\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{e}\left[\sum_{i=3}^{\infty}\frac{i-2}{i!}\right]$$

$$\leq \frac{1}{e}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{i-1}{i!}$$

$$= \frac{1}{e} \qquad \text{จากสมการ (2.9)}$$

จากกรณีที่ 2.1 และ 2.2 ทำให้ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| \leq max\left\{1-\frac{1}{e},\frac{1}{e}\right\} = \mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e}} \leq 0.633 \quad \text{เมื่อ } w_0 = 1$$

กรณีที่ 3 $\boldsymbol{w_0 \geq 2}$

ในกรณีนี้เราจะแบ่งพิจารณา w ออกเป็น 3 กรณี คือ $w > w_0$, $w = w_0$ และ $w < w_0$

กรณี 3.1 $\boldsymbol{w > w_0}$ จากบทตั้งที่ 2.1 ข้อ 1 ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right|$$

$$= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{l-w}{l!}\right]$$

$$= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[\frac{1}{(w+1)!}+\frac{2}{(w+2)!}+\frac{3}{(w+3)!}+\cdots\right]$$

$$= \frac{(w-1)!}{ew_0!\,(w+1)!}\left[1+\frac{2}{(w+2)}+\frac{3}{(w+2)(w+3)}+\frac{4}{(w+2)(w+3)(w+4)}+\cdots\right]$$

$$\leq \frac{1}{ew_0!\,(w+1)w}\left[1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5\cdot 6}+\frac{4}{5\cdot 6\cdot 7}+\cdots\right] \quad (\text{เนื่องจาก } w > w_0 \geq 2)$$

$$\leq \frac{1}{ew_0!\,(w_0+1)3}\left[1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5\cdot 6}+\frac{4}{5\cdot 6\cdot 7}+\frac{5}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots\right]$$

$$\leq \frac{1}{3ew_0!\,(w_0+1)}\left[\frac{1}{0!}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{3e(w_0+1)!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

$$= \frac{1}{3(w_0+1)!\,w_0}$$

$$\leq \frac{0.334}{(w_0+1)!} \quad (\text{จาก } w_0 \geq 2)$$

ดังนั้นในกรณีที่ 3.1 ค่า $w_0 \geq 2$ และ $w > w_0$ ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| \leq \frac{0.334}{(w_0+1)!}$$

กรณี 3.2 $\boldsymbol{w = w_0}$ จากบทตั้งที่ 2.1 ข้อ 2 ได้ว่า

$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right|$

$$= \frac{1}{ew_0}\left[w\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!} + \sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right]$$

$$\leq \frac{1}{ew_0}\left[w\sum_{l=w+1}^{\infty}\frac{1}{l!} + e\right]$$

$$= \frac{1}{e}\sum_{l=w_0+1}^{\infty}\frac{1}{l!} + \frac{1}{w_0}$$

$$= \frac{1}{e}\left[\frac{1}{(w_0+1)!} + \frac{1}{(w_0+2)!} + \frac{1}{(w_0+3)!} + \cdots\right] + \frac{1}{w_0}$$

$$= \frac{1}{e(w_0+1)!}\left[1 + \frac{1}{(w_0+2)} + \frac{1}{(w_0+2)(w_0+3)} + \frac{1}{(w_0+2)(w_0+3)(w_0+4)} + \cdots\right] + \frac{1}{w_0}$$

$$\leq \frac{1}{e(w_0+1)!}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right] + \frac{1}{w_0}$$

$$= \frac{1}{e(w_0+1)!}\left[3!\left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots\right)\right] + \frac{1}{w_0}$$

$$= \frac{6}{e(w_0+1)!}\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right)\right] + \frac{1}{w_0}$$

$$= \frac{6}{e(w_0+1)!}\left(e - 1 - 1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{w_0}$$

$$= \frac{6e-15}{e(w_0+1)!} + \frac{1}{w_0}$$

$$\leq \frac{0.482}{(w_0+1)!} + \frac{1}{w_0}$$

ดังนั้นในกรณีที่ 3.2 $w_0 \geq 2$ และ $w = w_0$ ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| \leq \frac{0.482}{(w_0+1)!} + \frac{1}{w_0}$$

กรณี 3.3 $\boldsymbol{w < w_0}$ จากบทตั้งที่ 2.1 ข้อ 3 ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| &= \frac{(w-1)!}{ew_0!}\left[w\sum_{l=0}^{w}\frac{1}{l!} - \sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right] \\
&= \frac{w!}{ew_0!}\left[\sum_{l=0}^{w}\frac{1}{l!} - \frac{1}{w}\sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right] \\
&\leq \frac{(w_0-1)!}{ew_0!}\left[\sum_{l=0}^{w}\frac{1}{l!} - \frac{1}{w}\sum_{l=0}^{w-1}\frac{1}{l!}\right] \quad (\text{เนื่องจาก } w < w_0 \text{ ดังนั้น } w \leq w_0 - 1) \\
&\leq \frac{1}{ew_0}\left[\sum_{l=0}^{w_0}\frac{1}{l!} - \frac{1}{w_0}\sum_{l=0}^{w_0-1}\frac{1}{l!}\right] \\
&\leq \frac{1}{ew_0}\sum_{l=0}^{w_0}\frac{1}{l!} \\
&= \frac{1}{w_0}
\end{aligned}$$

ดังนั้นในกรณีที่ 3.1 ค่า $w_0 \geq 2$ และ $w < w_0$ ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| \leq \frac{1}{w_0}$$

จากกรณีที่ 3.1, 3.2 และ 3.3 ทำให้ได้ว่า

$$\left|\Delta f_{w_0}(w+1,w)\right| \leq max\left\{\frac{0.334}{(w_0+1)!}, \frac{0.482}{(w_0+1)!} + \frac{1}{w_0}, \frac{1}{w_0}\right\} = \frac{0.482}{(w_0+1)!} + \frac{1}{w_0} \quad \text{เมื่อ } w_0 \geq 2$$

ดังนั้นจากกรณี 1, 2 และ 3 เราจะได้ว่า

$$\left|\triangle f_{w_0}(w+1,w)\right| \leq \delta_{w_0}$$

โดยที่

$$\delta_{w_0} = \begin{cases} 0.368, & w_0 = 0, \\ 0.633, & w_0 = 1, \\ \dfrac{0.482}{(w_0+1)!} + \dfrac{1}{w_0}, & w_0 = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

□

บทที่ 3

ทฤษฎีหลัก

ในบทนี้เราจะใช้วิธีของสไตน์และเชนเพื่อหาขอบเขตของ $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0}\right|$ เมื่อ W_n เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่งของปัญหาการจับคู่ ซึ่งเป็นวัตถุประสงค์หลักของโครงงานนี้ โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 สำหรับ $w_0 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ จะได้ว่า

$$\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0}\right| \leq \frac{2}{n}\,\delta_{w_0}$$

เมื่อ

$$\delta_{w_0} = \begin{cases} 0.368, & w_0 = 0, \\ 0.633, & w_0 = 1, \\ \dfrac{0.482}{(w_0+1)!} + \dfrac{1}{w_0}, & w_0 = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ต้องอาศัยบทตั้งที่ 2.2, บทตั้งที่ 3.3, ทฤษฎีบท และบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยามที่ 3.2 ค่าคาดคะเนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Expectation)
ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และ A เป็นเหตุการณ์ที่ $P(A) > 0$ เราจะนิยามค่าคาดคะเนของ X โดยมีเงื่อนไข A ดังนี้

$$E[X|A] = \sum_{x \in Im(X)} x\, P(X = x|A)$$

ทฤษฎีบทที่ 3.3 ([9] หน้า 9) ทฤษฎีผลแบ่งกั้นสำหรับค่าคาดคะเน (Partition Theorem for Expectation) ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่ไม่ต่อเนื่อง และ เซตของเหตุการณ์ $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของปริภูมิตัวอย่าง จะได้ว่า

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[X|A_i]\, P(A_i)$$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักนั้นเราจะนิยามตัวแปรสุ่ม $W_{n,i}^*$ โดย
สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ โดยที่ $i \neq j$ เราจะนิยามตัวแปรสุ่ม Y_j^i ดังนี้
ถ้า $\boldsymbol{X_i = 1}$ เราจะกำหนดให้ $Y_j^i = X_j$
ถ้า $\boldsymbol{X_i = 0}$ เราจะพิจารณาเหตุการณ์ที่มีการจับคู่ $n-1$ คู่ โดยไม่รวมคู่ที่ i และกำหนด

$$Y_j^i = \begin{cases} 1, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } j \text{ ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } j \\ 0, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } j \text{ ไม่ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } j \end{cases}$$

ดังนั้น

$$P\left(Y_j^i = 1\right) = \frac{1}{n-1}$$

กำหนดให้

$$W_{n,i}^* = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} Y_j^i$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า ถ้า $X_i = 1$ แล้ว $W_{n,i}^* = W_n - 1$ (3.1)

บทตั้งที่ 3.4 ให้ $f_{w_0}: \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ นิยามตาม (2.6) และ X_i เป็นตัวแปรสุ่มที่นิยามไว้ **(1.1)** จะได้ว่า

(1) $E\left[X_i f_{w_0}(W_n)\right] = \frac{1}{n} E\left[f_{w_0}\left(W_{n,i}^* + 1\right)\right]$

(2) $E\left[W_{n,i}^*\right] = 1$

(3) $E\left|W_n - W_{n,i}^*\right| \leq \frac{2}{n}$

พิสูจน์

(1) เนื่องจากตัวแปรสุ่ม X_i เราเป็นไปได้ 2 ค่าคือ $X_i = 0$ และ $X_i = 1$ จากทฤษฎีบทที่ 3.3 จะได้ว่า

$$E\left[X_i f_{w_0}(W_n)\right] = E\left[X_i f_{w_0}(W_n) | X_i = 0\right] P(X_i = 0) + E\left[X_i f_{w_0}(W_n) | X_i = 1\right] P(X_i = 1)$$

พิจารณาค่าของ $E\left[X_i f_{w_0}(W_n) | X_i = 0\right]$ จากบทนิยามที่ 3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E\left[X_i f_{w_0}(W_n) | X_i = 0\right] &= \sum_{x \in Im[X_i f(W_n)]} x\, P(X_i f_{w_0}(W_n) = x | X_i = 0) \\ &= \sum_{x \in Im[X_i f_{w_0}(W_n)]} x\, \frac{P(X_i f_{w_0}(W_n) = x \cap X_i = 0)}{P(X_i = 0)} \end{aligned}$$

กรณี $x = 0$ ได้ว่า $x\, P\left(X_i f_{w_0}(W_n) = x \cap X_i = 0\right) = 0$

กรณี $x \neq 0$ เราจะได้ว่า $X_i f_{w_0}(W_n) \neq 0$ ซึ่งทำให้ $f_{w_0}(W_n) \neq 0$ และ $X_i \neq 0$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $X_i = 0$ ดังนั้น

$$P\left(X_i f_{w_0}(W_n) = x \cap X_i = 0\right) = P(\emptyset) = 0$$

เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่าในกรณี $x \neq 0$ จะได้ว่า $x\, P\left(X_i f_{w_0}(W_n) = x \cap X_i = 0\right) = 0$

ดังนั้นเราจะสรุปได้ว่า $E\left[X_i f_{w_0}(W_n) | X_i = 0\right] = 0$ (3.2)

ต่อไปเราจะพิจารณาค่า $E\left[X_i f_{w_0}(W_n)|X_i=1\right] P(X_i=1)$

$$\begin{aligned} E\left[X_i f_{w_0}(W_n)|X_i=1\right] P(X_i=1) &= E\left[f_{w_0}(W_n)|X_i=1\right] P(X_i=1) \\ &= E\left[f_{w_0}\left(W_{n,i}^*+1\right)\right] P(X_i=1) && \text{(จาก (3.1))} \\ &= \frac{1}{n} E\left[f_{w_0}\left(W_{n,i}^*+1\right)\right] && \text{(จาก (1.2))} \qquad \textbf{(3.3)} \end{aligned}$$

จาก (3.2) และ (3.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E\left[X_i f_{w_0}(W_n)\right] &= E\left[X_i f_{w_0}(W_n)|X_i=0\right] P(X_i=0) + E\left[X_i f_{w_0}(W_n)|X_i=1\right] P(X_i=1) \\ &= \frac{1}{n} E\left[f_{w_0}\left(W_{n,i}^*+1\right)\right] \end{aligned}$$

□

(2) $$\begin{aligned} E\left[W_{n,i}^*\right] &= E\left[\sum_{j=1, j\neq i}^{n} Y_j^i\right] \\ &= E\left[Y_1^i + \ldots + Y_{i-1}^i + Y_{i+1}^i + \ldots + Y_n^i\right] \\ &= E[Y_1^i] + \ldots + E\left[Y_{j-1}^i\right] + E[Y_{j+1}^i] + \ldots + E[Y_n^i] \\ &= P\left(Y_1^i=1\right) + \ldots + P\left(Y_{j-1}^i=1\right) + P\left(Y_{j+1}^i=1\right) + \ldots + P\left(Y_n^i=1\right) \\ &= \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(3) เราจะแบ่ง X_i เป็น 2 กรณี

กรณี $X_i = 1$ จาก (3.1) ได้ว่า $W_{n,i}^* = W_n - 1$ ทำให้ได้ว่า $\left|W_{n,i}^* - W_n + X_i\right| = W_{n,i}^* - W_n + X_i$

กรณี $X_i = 0$ สำหรับ $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ และ $i \neq j$ ถ้า $X_j = 0$ เห็นชัดว่า $X_j \leq Y_j^i$ ถ้า $X_j = 1$ นั้นหมายความว่าในตำแหน่งที่ j มีสิ่งของวางอยู่ ทำให้ได้ด้วยว่า $Y_j^i = 1$ ดังนั้น $X_j \leq Y_j^i$ เพราะฉะนั้น $X_j \leq Y_j^i$ สำหรับทุก $j \neq i$ ทำให้ได้ว่า $W_n \leq W_{n,i}^*$ ส่งผลให้

$$\left|W_{n,i}^* - W_n + X_i\right| = W_{n,i}^* - W_n + X_i$$

ดังนั้น $$\begin{aligned} E\left|W_n - W_{n,i}^*\right| &= E\left|W_n - W_{n,i}^* - X_i + X_i\right| \\ &\leq E\left|W_{n,i}^* - W_n + X_i\right| + E[X_i] \\ &\leq E\left[W_{n,i}^* - W_n + X_i\right] + E[X_i] \\ &= 2E[X_i] + E\left[W_{n,i}^*\right] - E[W_n] \\ &= 2\left(\tfrac{1}{n}\right) + 1 - 1 && \text{(จากบทตั้งที่ 3.4 ข้อ 2)} \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

□

ต่อไปเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 3.1

จาก $E\left[f_{w_0}(W_n+1)-W_n f_{w_0}(W_n)\right]$

$$= E\left[f_{w_0}(W_n+1)\right]-E\left[W_n f_{w_0}(W_n)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E\left[f_{w_0}(W_n+1)\right]-\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i f_{w_0}(W_n)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E\left[f_{w_0}(W_n+1)\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}E\left[f_{w_0}\left(W_{n,i}^{*}+1\right)\right]$$ (จากบทตั้งที่ 3.4 ข้อ 1)

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[f_{w_0}(W_n+1)-f_{w_0}\left(W_{n,i}^{*}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[\triangle f_{w_0}\left(W_n+1\,,\,W_{n,i}^{*}+1\right)]$$

จาก ธีรภาพโอฬาร และเนียมมณี [6] หน้า 90 เราได้ว่า

$$\left|\triangle f_{w_0}(t,s)\right| \le \sup_{w\ge 1}\left|\triangle f_{w_0}(w+1,w)\right||t-s|$$

ดังนั้นจากความจริงข้างต้นได้ว่า

$$E\left[f_{w_0}(W_n+1)-W_n f_{w_0}(W_n)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[\left|\triangle f_{w_0}\left(W_n+1\,,\,W_{n,i}^{*}+1\right)\right|]$$

$$\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{w\ge 1}\left|\triangle f_{w_0}(w+1,w)\right| E\left|W_n+1-W_{n,i}^{*}+1\right|$$

$$\le \frac{1}{n}\,\delta_{w_0}\sum_{i=1}^{n}E\left|W_n-W_{n,i}^{*}\right|$$ (จากบทตั้งที่ 2.2)

$$\le \frac{1}{n}\,\delta_{w_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}$$ (จากบทตั้งที่ 3.4 ข้อ (2))

$$= \frac{2}{n}\,\delta_{w_0}$$

จากสมการที่ (2.7) ได้ว่า

$$P(W_n=w_0)-\frac{1}{ew_0} = E[f_{w_0}(W_n+1)-W_n f_{w_0}(W_n)]$$

ดังนั้น

$$\left|P(W=w_0)-\frac{1}{ew_0}\right| \le \frac{2}{n}\,\delta_{w_0}$$ □

บรรณานุกรม

[1] กฤษณะ เนียมมณี, *ทฤษฎีความน่าจะเป็น*, พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัดพิทักษ์การพิมพ์, 2542.

[2] กฤษณะ เนียมมณี, ทฤษฎีความน่าจะเป็นขั้นสูงและขอบเขตการประมาณค่า, พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์, 2548.

[3] Barbour, A. D., Holst, L., Janson, S. (1992). Poisson Approximation, *Oxford Studies in Probability 2*, Clarendon Press, Oxford,

[4] Chen, L. H. Y. (1975). Poisson approximation for dependent trials, *Annals of Probability 3*, 534-545.

[5] Stein, C. (1972), A bound for the error in normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables, Proc. Sixth Berkeley Sympos. Math. Statist.Probab 3, 583-602.

[6] Teerapabolarn, K. Neammanee, K. (2006). Poisson approximation for sums of dependent Bernoulli random variables, *Acta Math*, 87-99.

[7] Teerapabolarn, K. Neammanee, K. (2006), A Non-unifrom Bound on Matching Problem , *KYUNGPOOK Math.* , 489-496.

[8] Kun, R., Teerapabolarn, K. (2012). A pointwise Poisson approximation byw-functions *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 6, 5029 – 5037.

[9] Marchini, J. (2011) Probability. (Retrieved from https://docplayer.net/91107850-Probability-dr-j-marchini-january-10-2011.html.)

[10] P. R. de Montmort, *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Quillau, Paris, published anonymously, 1708.

[11] Bradford, R.C., (1992) On the matching problem in probality, *Pi Mu Epsilon Journal*, Vol. 9, 448-450.

ภาคผนวก

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย) ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่

ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ) Bounds of pointwise approximation for Matching Problem

อาจารย์ที่ปรึกษา ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี

ผู้ดำเนินการ นายพิจิตร เจริญผล เลขประจำตัวนิสิต 5833535023

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ปัญหาการจับคู่ เริ่มมีการศึกษาตั้งแต่ ปี ค.ศ.1708 โดย Pierre Remond de Montmort ปรากฏครั้งแรกในหนังสือ Essay d' Analyse sur les Jeux de Hazard [1] ซึ่งปัญหาการจับคู่ได้กล่าวไว้ว่า ถ้าหากมีสิ่งของทั้งหมด n ชิ้น โดยของแต่ละชิ้นมีหมายเลข $1, 2, 3, \dots, n$ กำกับอยู่ และมีตำแหน่งในการวางสิ่งของอยู่ n ตำแหน่ง ซึ่งแต่ละตำแหน่งมีหมายเลข $1, 2, 3, \dots, n$ กำกับอยู่ โดยในแต่ละตำแหน่งสามารถวางสิ่งของได้เพียงตำแหน่งละ 1 ชิ้นเท่านั้น ซึ่งปัญหาการจับคู่ที่เราสนใจ คือ ความน่าจะเป็นในการวางสิ่งของตรงตำแหน่ง w_0 ชิ้น จากสิ่งของทั้งหมด n ชิ้น โดยที่ $0 \leq w_0 \leq n$ ปัญหาการจับคู่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง เช่น การจัดคนทำงานให้เข้ากับงานที่เหมาะสม เนื่องจากในแต่ละบุคคลเหมาะกับงานที่ต่างกันหากจับคู่บุคคลให้เข้ากับงานที่ตนถนัดได้ จะทำให้บริษัทลดต้นทุนในการหาพนักงาน และยังเพิ่มอัตราการทำงานได้ในระยะยาว รวมถึงได้งานที่มีประสิทธิภาพส่งผลให้ภาพรวมของบริษัทออกมาดี และยังมีประโยชน์ในด้านการจัดการข้อมูลของภาครัฐที่มีฐานข้อมูลมากมาย การจับคู่ข้อมูลที่ได้มาให้ตรงกับบุคคลเพื่อจัดการปัญหาเกี่ยวกับการคอรัปชั่น ในด้านการค้า เราสามารถนำข้อมูลมาเพื่อพิจารณาพฤติกรรมของผู้บริโภคแล้วหาความสัมพันธ์ของข้อมูลเพื่อดูว่าผู้บริโภคคนไหนต้องการอะไร อีกทั้งยังสามารถจับคู่ให้เหมาะกับความต้องการของผู้บริโภคแต่ละคน ทางด้านการแพทย์ ใช้การจับคู่หาตัวยาที่มีประสิทธิภาพในการกำจัดเชื้อโรคแต่ละชนิด

หากมองปัญหาการจับคู่เป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์จะได้ว่า

สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ กำหนดให้

(1)

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } i \\ 0, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ ไม่ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } i \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{n}$$

กำหนดให้ $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ดังนั้น W_n คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่ง สังเกตเห็นว่า $P(X_1 = 1)\, P(X_2 = 1) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ แต่ $P(X_1 = 1\,, X_2 = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n \cdot (n-1)}$ ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ ไม่เป็นอิสระต่อกัน ด้วยเหตุนี้ W_n จึงไม่เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม

ในโครงงานนี้เราจะพิจารณา $P(W_n = w_0)$ โดยที่ $0 \leq w_0 \leq n$ และ เรียก $P(W_n = w_0)$ ว่าค่าความน่าจะเป็นแบบจุดของปัญหาการจับคู่

ในปี ค.ศ. 1992 Bradford R. Crain [2] ได้หาค่าของ $P(W_n = w_0)$ ได้ดังนี้

$$P(W_n = w_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{w_0!} \displaystyle\sum_{i=2}^{n-w_0} (-1)^i \frac{1}{i!} & , \quad w_0 \leq n-2\,, \\ 0 & , \quad w_0 = n-1\,, \\ \dfrac{1}{n!} & , \quad w_0 = n \end{cases} \tag{2}$$

จาก $\frac{1}{e} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} = \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!}$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{w_0!} \sum_{i=2}^{n-w_0} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{1}{e w_0!}$
ซึ่ง $\frac{1}{e w_0!}$ ก็คือค่าของ $P(X = w_0)$ เมื่อ X เป็นตัวสุ่มปัวซงที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ นั่นเอง โดยเราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม Poi_λ จะมีการแจกแจงแบบปัวซง ที่มีพารามิเตอร์ λ ก็ต่อเมื่อ

$$P(Poi_\lambda = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2, \dots$$

จากข้อสังเกตข้างต้น เราจึงมีแนวคิดที่จะประมาณค่า $P(W_n = w_0)$ ด้วยการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ โดยโครงงานนี้ผู้จัดทำสนใจหาขอบเขตแบบของ $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{e w_0!}\right|$

ขอบเขตการประมาณค่านั้น มีอยู่ 2 ประเภทด้วยกัน คือ ขอบเขตแบบสม่ำเสมอและขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอ ในการประมาณค่าฟังก์ชันการแจกแจง F ด้วยฟังก์ชันการแจกแจง G นั้น เราจะเรียกค่าคงตัว $C > 0$ ที่ทำให้ $\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)| < C$ ว่าขอบเขตแบบสม่ำเสมอ (uniform bound) ซึ่งขอบเขตดังกล่าวจะเป็นขอบเขตของ $|F(x) - G(x)|$ ทุกจำนวนจริง x แต่สำหรับค่า $C(x_0)$ ที่ขึ้นอยู่กับค่า x_0 ที่ทำให้ $|F(x_0) - G(x_0)| \leq C(x_0)$ เราจะเรียกขอบเขตประเภทนี้ว่า ขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอ (non-uniform bound) ขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอของ $|F(x_0) - G(x_0)|$ จึงขึ้นอยู่กับค่า x_0

ขอบเขตแบบสม่ำเสมอและขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอนั้น มีข้อดีและข้อด้อยต่างกัน กล่าวคือโดยปกติแล้วขอบเขตแบบสม่ำเสมอจะมีความคมน้อยกว่าขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอ แต่ก็มีข้อดีตรงที่ว่าสามารถนำมา

ประยุกต์ใช้ได้กับทุกค่า x ดังนั้นในกรณีที่เราไม่ทราบค่า x เราต้องใช้ขอบเขตแบบสม่ำเสมอ แต่หากเราทราบค่า x ที่เราจะหาขอบเขต $|F(x) - G(x)|$ เรามักจะใช้ขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอซึ่งจะได้ขอบเขตที่ดีกว่าหรือคมกว่า เมื่อเรากล่าวว่าขอบเขตใดมีความคมกว่านั้น เราหมายถึงว่า ค่าคงที่ของขอบเขตนั้นน้อยกว่าอีกขอบเขตหนึ่ง เช่น $\frac{C_1}{n}$ จะมีความคมกว่า $\frac{C_2}{n}$ เมื่อ $0 < C_1 < C_2$ เป็นต้น

ในปี ค.ศ.1972 สไตน์ [3] ได้เสนอการหาขอบเขตที่เรียกว่า วิธีของสไตน์ (Stein's method) โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แทนการแปลงฟูริเยร์ เราพบว่าในหลายกรณีการหาขอบเขตการประมาณค่าโดยวิธีของสไตน์นั้นได้ผลลัพธ์ดีกว่า โดยเฉพาะการหาขอบเขตการประมาณค่าแบบไม่สม่ำเสมอ ต่อมาในปี ค.ศ.1975 เชน [4] ได้นำแนวคิดของสไตน์มาประยุกต์กับการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง โดยได้สร้างสมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจกปัวซง สำหรับ $h, f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต และ $\lambda > 0$ กำหนดให้

$$\mathcal{P}_\lambda(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

เราเรียกสมการผลต่าง

$$\lambda f(w+1) - wf(w) = h(w) - \mathcal{P}_\lambda(h) \qquad \textbf{(3)}$$

ว่าสมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง (Stein's eqution for Poisson distribution function) โดยงานวิจัยของเชนได้พัฒนาการหาขอบเขตการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง จนทำให้วิธีการนี้เป็นที่รู้จักในนามของ วิธีของสไตน์และเชน (Stein-Chen's method)

จาก **(3)** หากเราเลือกฟังก์ชัน h ที่เหมาะสม เช่น ให้ $h = h_{w_0}$ โดยที่

$$h_{w_0}(w) = \begin{cases} 1, & w = w_0 \\ 0, & w \neq w_0 \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$E[\lambda f(w+1) - wf(w)] = E[h(w) - \mathcal{P}_\lambda(h)] = P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}$$

ดังนั้น เราสามารถหาขอบเขตของ $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right|$ โดยหาขอบเขตของ $|E[\lambda f(w+1) - wf(w)]|$ แทน แล้วเราจะเรียกขอบเขต $\left|P(W_n = w_0) - \frac{1}{ew_0!}\right|$ ว่า ขอบเขตการประมาณค่าแบบจุด

ในปี ค.ศ. 1992, บาร์เบอร์, ฮอลล์ และเจนสัน [5] ใช้วิธีของสไตน์และเชน ในการหาขอบเขตประมาณค่าแบบสม่ำเสมอของ W_n ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ โดยได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\left|P(W_n \leq w_0) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0}\frac{1}{k!}\right| \leq \frac{2(1-e^{-1})}{n} \qquad \textbf{(4)}$$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 คณินทร์ และกฤษณะ [6] ใช้วิธีของสไตน์และเชน หาขอบเขตประมาณค่าแบบไม่สม่ำเสมอของ W_n ไว้ดังนี้

$$\left|P(W_n \leq w_0) - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{w_0}\frac{1}{k!}\right| \leq \Delta(n, w_0) \text{ โดยที่ } w_0 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\} \tag{5}$$

เมื่อ

$$\Delta(n, w_0) = \begin{cases} \dfrac{2}{en} &, \quad w_0 = 0, \\ \dfrac{2(1 - 2e^{-1})}{n} &, \quad w_0 = 1, \\ \dfrac{2.08}{(w_0 + 1)n} &, \quad w_0 = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

เราจะเห็นได้ว่าขอบเขตการประมาณค่าแบบไม่สม่ำเสมอของ (5) จะมีความคมกว่า (4) ที่ใช้ขอบเขตประมาณค่าแบบสม่ำเสมอ ทุก $w_0 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ แต่ทั้ง (4) และ (5) เป็นการประมาณความน่าจะเป็นสะสมไม่ใช่การประมาณค่าแบบจุด ซึ่งเป็นที่สนใจของโครงงานนี้

ในโครงงานนี้เราจะใช้วิธีของสไตน์และเชน หาทั้งขอบเขตแบบสม่ำเมอและแบบไม่สม่ำเสมอของการประมาณค่าแบบจุดของ W_n ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ นั่นคือการหาขอบเขต $\left|P\left(W_n = w_0\right) - \frac{1}{ew_0!}\right|$

วัตถุประสงค์

โครงงานนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะใช้วิธีของสไตน์และเชนในการหาขอบเขตทั้งแบบสม่ำเสมอและแบบไม่ สม่ำเสมอของการประมาณค่าแบบจุดของปัญหาการจับคู่ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้จะศึกษาเฉพาะความน่าจะเป็นแบบจุดของปัญหาการจับคู่ โดยการประมาณด้วยการแจกแจงปัวซง และหาขอบเขตการประมาณทั้งแบบสม่ำเสมอและแบบไม่สม่ำเสมอ

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาปัญหาและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
3. หาขอบเขตแบบสม่ำเสมอและแบบไม่สม่ำเสมอของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่ โดยใช้วิธีของสไตน์และเชน
4. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2560 - เมษายน 2561								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาปัญหา และกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา	■	■							
2. สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง		■	■	■	■	■			
3. หาขอบเขตแบบไม่สม่ำเสมอบนการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่ โดยใช้วิธีของสไตน์และเชน		■	■	■	■	■	■		
4. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน				■	■	■	■	■	
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน							■	■	■

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ขอบเขตทั้งแบบสม่ำเสมอและแบบไม่สม่ำเสมอบนการประมาณค่าแบบจุดของปัญหาการจับคู่ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. Notebook
3. โปรแกรม Microsoft Word และ โปรแกรม Mathematica
4. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล

งบประมาณ

รายการ	ราคาต่อหน่วย(บาท)	จำนวน	จำนวนเงิน(บาท)
1. กระดาษ A4 80 แกรม (รีม)	120	5	600
2. ค่าถ่ายเอกสารและจัดทำรูปเล่ม	250	4	1,000
3. ค่าวารสารและหนังสือที่เกี่ยวข้อง	3,400	1	3,400
รวม			5,000

เอกสารอ้างอิง

[1] P. R. de Montmort, *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Quillau, Paris, published anonymously, 1708.

[2] Bradford, R. Crain, ON THE MATCHING PROBLEM IN PROBABILITY, *Pi Mu Epsilon Journal* Vol. 9, No. 7 (1992), 448-450

[3] Stein, C., A Bound for the Error in the Normal Approximaliotl to the Distribution of a Sum of Dependent Random Variables, *Proc. Sixth Berkeley Syrup. Math. Statist. Probab. 2 (1972)*, 583-602.

[4] Chen, L.H.Y., Poisson Approximation for Dependent Trials*, Probab.* 3 (1975), 534-545. Ann.

[5] Barbour, A. D. Holst, L. and Janson*,* Poisson approximation, *Oxford Studies in probability 2*, Clarendon Press, Oxford, 1992

[6] Teerapabolarn, K., and Neammanee, K., A Non-unifrom Bound on Matching Problem , *KYUNGPOOK Math. J.* , 46(2006), 489-496.

ประวัติผู้เขียน

นายพิจิตร เจริญผล

เลขประจำตัวนิสิต 5833535023

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย