โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$

Closed knight's tour on ring boards $(m, n, 1)$

ชื่อนิสิต นางสาวปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์ 5833531523

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$

นางสาวปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2561

Closed knight's tour on ring boards $(m, n, 1)$

Miss Punyaporn Sapworarit

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science Chulalongkorn University

Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน	การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$
โดย	นางสาวปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

.... กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

หัวข้อโครงงาน การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$

โดย นางสาวปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

. . . . หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

. . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

. . . . กรรมการ

(ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช)

. . . . กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์ : การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ (Closed knight's tour on ring boards $(m, n, 1)$) อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 35 หน้า

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $m, n \geq 3$ กระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีส่วนตรงกลางขนาด 1×1 ขาดหายไป ในโครงงานนี้ศึกษาเงื่อนไขที่รับประกันการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ..ปัญญาพร.........

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ....

ปีการศึกษา 2561

ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์ : การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ (Closed knight's tour on ring boards $(m, n, 1)$) อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 35 หน้า

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $m, n \geq 3$ กระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เป็นกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีส่วนตรงกลางขนาด 1×1 ขาดหายไป ในโครงงานนี้ศึกษาเงื่อนไขที่รับประกันการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต . . . .

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน . . . .

ปีการศึกษา 2561

5833531523 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORD : KNIGHT'S TOUR PROBLEM, CLOSED KNIGHT'S TOURS

PUNYAPORN SAPWORARIT : CLOSED KNIGHT'S TOUR ON RING BOARDS $(m, n, 1)$
ADVISOR : ASST. PROF. RATINAN BOONKLURB, Ph.D., 35 pp.

Let m, n be odd integers such that $m, n \geq 3$, the ring boards $(m, n, 1)$ is an $m \times n$ chessboard with the middle part of size 1×1 is missing. This project studies the conditions to guarantee the existence of a closed knight's tour on the ring board $(m, n, 1)$.

Department Mathematic and Computer Science Student's Signature ปุณยาภรณ์

Field of Study Mathematic Advisor's Signature R. Boonklurb

Academic Year 2018

5833531523 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORD : KNIGHT'S TOUR PROBLEM, CLOSED KNIGHT'S TOURS

PUNYAPORN SAPWORARIT : CLOSED KNIGHT'S TOUR ON RING BOARDS $(m, n, 1)$ ADVISOR : ASST. PROF. RATINAN BOONKLURB, Ph.D., 35 pp.

Let m, n be odd integers such that $m, n \geq 3$, the ring boards $(m, n, 1)$ is an $m \times n$ chessboard with the middle part of size 1×1 is missing. This project studies the conditions to guarantee the existence of a closed knight's tour on the ring board $(m, n, 1)$.

Department Mathematic and Computer Science Student's Signature . . . .

Field of Study Mathematic Advisor's Signature . . . .

Academic Year 2018

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานนี้สำเร็จได้ เพราะได้รับการอนุเคราะห์อย่างเต็มที่จากบุคคลเหล่านี้ ขอขอบคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ที่ให้คำแนะนำ ให้ความรู้ เคี่ยวเข็ญและดูแลเอาใจใส่อย่าเต็มที่มาตลอดระยะเวลาการทำโครงงานฉบับนี้ ขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำโครงงาน ซึ่งทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.พัฒนี อุดมกะวานิช และ อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร ซึ่งเป็นกรรมการคุมสอบโครงงานนี้ ช่วยตรวจทานและให้คำแนะนำทำให้โครงงานนี้ความถูกต้องมากขึ้น ข้าพเจ้าขอบพระคุณพ่อแม่และเพื่อนๆ ที่เป็นกำลังใจให้ผ่านลุล่วงไปด้วยดี

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ....ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ....จ

กิตติกรรมประกาศ ....ฉ

สารบัญ ....ช

สารบัญตาราง ....ฌ

สารบัญภาพ ....ญ

บทที่1 บทนำและความรู้พื้นฐาน 1

บทที่2 6

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่..........6

บทที่3 18

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มคี่บางจำนวน 18

บทที่4 ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ 27

รายการอ้างอิง 28

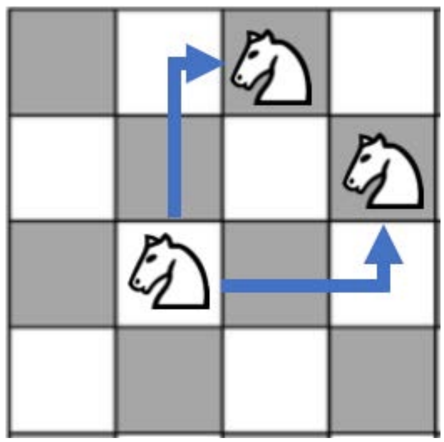
ภาคผนวก ก แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2561 29

ประวัติผู้เขียน 32

บทที่ 1

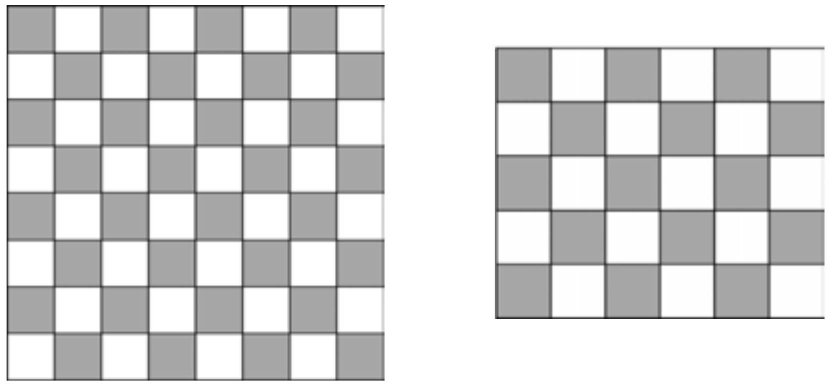
บทนำและความรู้พื้นฐาน

การเดินของม้าบนกระดานหมากรุกเป็นเรื่องที่น่าสนใจในทางคณิตศาสตร์ โดยม้าจะเดินไปในแนวนอนหรือแนวตั้งจำนวนสองช่องแล้วหมุนในระนาบเดียวกัน 90 องศากับแนวเดิมและเดินต่อไปอีกหนึ่งช่อง ดังรูป



รูป 1.1 การเดินของม้าจากจุดที่กำหนดบนกระดานหมากรุกขนาด 4×4

โดยทั่วไปกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานจะเป็นกระดานหมากรุกขนาด 8×8 ซึ่งประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงต่อกัน 8 แถว แถวละ 8 รูป ต่อมานักคณิตศาสตร์ได้ขยายการเดินของม้าไปสู่การเดินของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ซึ่ง ประกอบด้วยช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเรียงต่อกัน m แถว แถวละ n รูป



รูป 1.2 ตัวอย่างกระดานหมากรุกขนาดมาตรฐานและกระดานหมากรุกขนาด 5×6

สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ถ้ากำหนดให้แต่ละช่องมีตำแหน่งเป็น (i, j) ในลักษณะเดียวกับการกำหนดตำแหน่งสมาชิกของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ จะได้ว่าม้าที่อยู่ในตำแหน่ง (i, j) จะสามารถเดินไปได้อย่างมาก 8 ช่องโดยอาจไปอยู่ในตำแหน่ง $(i \pm 1, j \pm 2)$ หรือ $(i \pm 2, j \pm 1)$ *การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด* $m \times n$ คือ การเดินของม้าโดยที่ม้าเดินไปทุก ๆ ช่องของกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ เพียงหนึ่งครั้ง แล้วกลับมาที่จุดเริ่มต้น

ในปี ค.ศ. 1991 Schwenk [2] ได้เผยแพร่เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 [2] บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ โดยที่ $m \leq n$ จะมีการเดินแบบปิดของม้าได้ ยกเว้นถ้าเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

a) m และ n เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่ หรือ

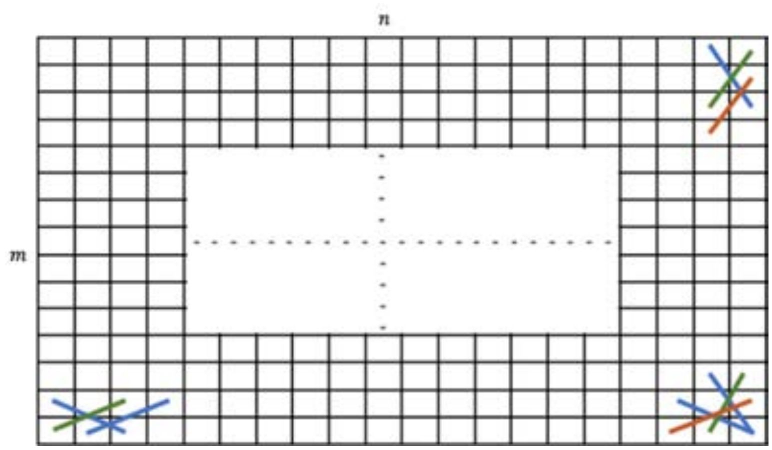
b) $m = 1$ หรือ 2 หรือ 4 หรือ

c) $m = 3$ และ $n = 4$ หรือ 6 หรือ 8

นอกจากนี้ Schwenk [2] ยังพิสูจน์ได้ว่าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีการเดินแบบปิดของม้าจะได้ว่าสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าที่ผ่านระหว่างตำแหน่งสองตำแหน่งบนกระดานดังกล่าวทั้งหมด 10 คู่ ที่เราสามารถระบุตำแหน่งคู่เหล่านั้นได้เสมอ

ทฤษฎีบท 1.2 [2] สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีการเดินแบบปิดของม้า เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าที่ผ่านช่องบนกระดานหมากรุกนั้น 10 คู่ ดังต่อไปนี้ ได้เสมอ

$(1, n-1)$ - $(3, n)$, $(m-2, n-1)$ - (m, n),
$(m-1,1)$ - $(m, 3)$, $(m-1, n-2)$ - (m, n),
$(4, n-1)$ - $(2, n)$, $(1, n)$ - $(3, n-1)$,
$(m-2, n)$ - $(m, n-1)$, $(m, 1)$ - $(m-1,3)$,
$(m, n-2)$ - $(m-1, n)$, $(m, 2)$ - $(m-1,4)$



รูป 1.3 ตำแหน่งสองตำแหน่งทั้งหมด 10 คู่บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่มีการเดินแบบปิดของม้า

นอกจากนี้ในบางครั้งแทนที่จะหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ เรายังสามารถหาการเดินแบบเปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ได้อีกด้วย การเดินแบบเปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ คือ การเดินของม้าที่เดินไปทุก ๆ ช่องของกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ เพียงหนึ่งครั้ง แต่จุดเริ่มต้นของม้าอยู่คนละตำแหน่งกับจุดสิ้นสุดของการเดินม้า ในปี ค.ศ. 2005 Chia และ Ong [1] ได้คิดและเผยแพร่เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการเดินแบบเปิดของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ไว้ดังนี้

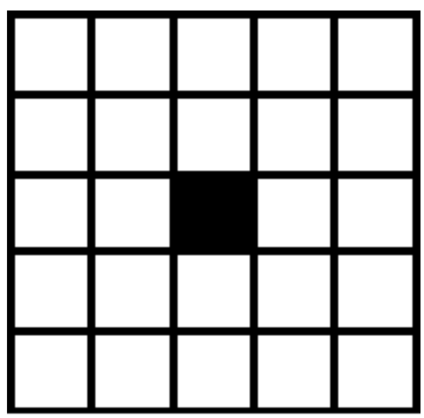
ทฤษฎีบท 1.3 [1] บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ โดยที่ $m \leq n$ จะมีการเดินแบบเปิดของม้าได้ ยกเว้นถ้าเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

a) $m = 1$ หรือ 2 หรือ

b) $m = 3$ และ $n = 3$ หรือ 5 หรือ 6 หรือ

c) $m = 4$ และ $n = 4$

ต่อมานักวิจัยบางท่านได้หันไปให้ความสนใจกับการเดินของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ที่รูตรงกลางขนาด $r \times r$ โดยที่ m, n, r เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $r \geq 1$ และ $m, n \geq 2r$ ซึ่งเรียกกระดานแบบนี้ว่า *กระดานวงแหวน* (m, n, r)



รูป 1.4 ตัวอย่างกระดานวงแหวน $(5,5,1)$

สำหรับกรณีเฉพาะที่ $m = n$ จะเห็นว่าเหนือรูขนาด $r \times r$ จะมีช่องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่จำนวน $\frac{n-r}{2}$ แถว ซึ่งเราเรียกว่าความหนาของกระดานวงแหวน (n, n, r) เช่น ในรูป 1.4 จะเห็นว่ากระดานวงแหวน $(5,5,1)$ มีความหนาเป็น 2

Wiitala [3] ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (n, n, r) ที่มีความหนาเป็น 2 ซึ่งได้ผลการศึกษาดังนี้

ทฤษฎีบท 1.4 [3] ไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน (n, n, r) ที่มีความหนาเป็น 2 เมื่อ $n \geq 5$

ในโครงงานฉบับนี้จะศึกษาเงื่อนไขเกี่ยวกับการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคี่บางจำนวน โดยการแบ่งกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ ออกเป็นส่วน ๆ แล้วพิจารณาการเดินของม้าในส่วนเหล่านั้นและพยายามหาทางเชื่อมต่อกันจนเป็นการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ ที่สมบูรณ์

บทที่ 2

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n},\mathbf{1})$ เมื่อ $\boldsymbol{n}$ เป็นจำนวนเต็มคี่

ในบทนี้เราจะศึกษาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n,n,1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 3$

กรณี 1 เมื่อ $n = 3$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(3,3,1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.1 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

1	6	3
4		8
7	2	5

รูป 2.1 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(3,3,1)$

กรณี 2 เมื่อ $n = 5$ จากรูป 1.4 กระดานวงแหวน $(5,5,1)$ มีความหนาเป็น 2 ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.4 จะได้ว่าไม่มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

กรณี 3 เมื่อ $n = 7$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(7,7,1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.2 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

10	7	2	5	20	13	22
1	4	9	12	23	16	19
8	11	6	3	18	21	14
41	48	39		15	24	17
38	45	42	27	30	35	32
43	40	47	36	33	28	25
46	37	44	29	26	31	34

รูป 2.2 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(7,7,1)$

กรณี 4 เมื่อ $n = 9$ เราสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(9,9,1)$ ได้ดังแสดงในรูป 2.3 ทั้งนี้ตัวเลขที่กำกับหมายถึงลำดับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

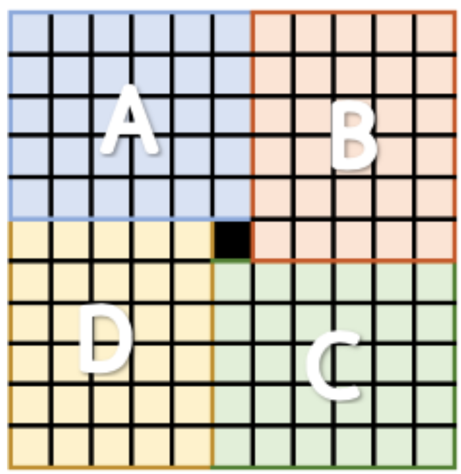
5	10	17	12	27	34	23	38	25
18	13	4	9	22	39	26	33	30
3	6	11	16	35	28	31	24	37
14	19	8	1	40	21	36	29	32
7	2	15	20		60	55	42	47
72	69	76	61	80	41	48	59	54
77	64	71	68	75	56	51	46	43
70	73	66	79	62	49	44	53	58
65	78	63	74	67	52	57	50	45

รูป 2.3 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(9,9,1)$

กรณี 5 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่บวกที่ $n \geq 11$

เราแบ่งกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ออกเป็นกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ เท่าๆ กันจำนวน 2 กระดาน และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ เท่า ๆ กันจำนวน 2 กระดาน ตามแนวเส้นขอบของรูขนาด 1×1 ของกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$

ดังตัวอย่างการแบ่งกระดานวงแหวน $(11,11,1)$ ออกเป็น 4 กระดานในรูป 2.4 โดยจะเรียกกระดานหมากรุกย่อยตำแหน่งซ้ายบนว่ากระดาน A และเรียกกระดานย่อยอันอื่นๆ ตามทิศทางตามเข็มนาฬิกาว่ากระดาน B, C และ D ตามลำดับ



รูป 2.4 แนวการแบ่งกระดานวงแหวน $(11,11,1)$ ออกเป็น 4 กระดาน

เนื่องจาก n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $n \geq 11$ ดังนั้น $n-1$ และ $n+1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และทำให้ $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

ต่อมาเนื่องจาก $\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2} = 1$ ทำให้ได้ว่า $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ติดกัน ดังนั้น $\frac{n-1}{2}$ และ $\frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ไม่ได้ นั่นคือ กระดานหมากรุกขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข a) ของทฤษฎีบท 1.1

ยิ่งไปกว่านั้นเรายังได้ว่า $\frac{n-1}{2} \geq 5$ นั่นคือ $\frac{n-1}{2}$ จะไม่เท่ากับ 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4 ทำให้กระดานหมากรุกขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข b) และ c) ของทฤษฎีบท 1.1

จึงสรุปได้ว่า กระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}$ และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{n+1}{2} \times \frac{n-1}{2}$ เหล่านี้มีการเดินแบบปิดของม้าเสมอ และจากทฤษฎีบท 1.2 จะได้ว่ามีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ดังนี้

$$\left(1,\frac{n-1}{2}\right)_A \text{ - } \left(3,\frac{n+1}{2}\right)_A \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2},2\right)_A \text{ - } \left(\frac{n-3}{2},4\right)_A$$

มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ดังนี้

$$(2,1)_B \text{ - } (4,2)_B \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)_B \text{ - } \left(\frac{n+1}{2},\frac{n-5}{2}\right)_B$$

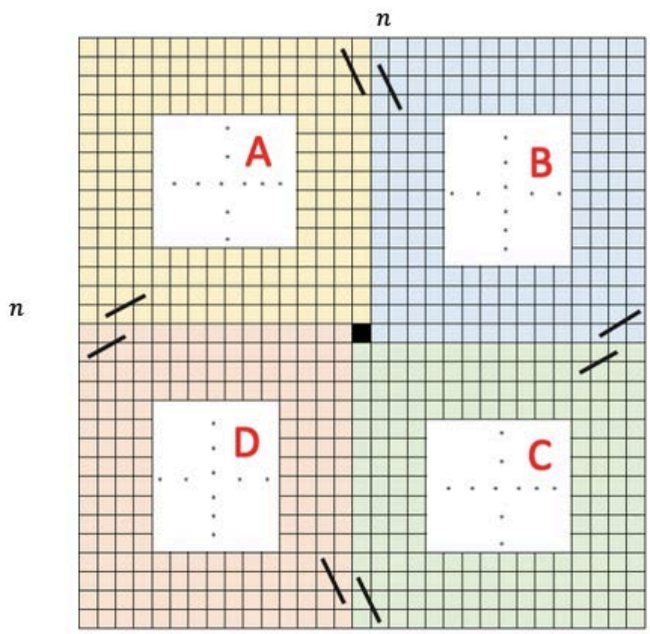
มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ดังนี้

$$\left(1,\frac{n-1}{2}\right)_C \text{ - } \left(2,\frac{n-5}{2}\right)_C \text{ และ } \left(\frac{n-5}{2},1\right)_C \text{ - } \left(\frac{n-1}{2},2\right)_C$$

มีการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D โดยเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 2 คู่ดังนี้

$$(1,3)_D \text{ - } (2,1)_D \text{ และ } \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)_D \text{ - } \left(\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2}\right)_D$$

ทั้งนี้ในความเป็นจริงแล้วหากหมุนกระดาน B และกระดาน D ไป 90 องศาในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะได้ว่าตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดานทั้งสอง คือ ตำแหน่งเดียวกันกับตำแหน่งทั้ง 2 คู่บนกระดาน A และกระดาน C ตามลำดับ ดังรูป2.5



รูป 2.5 การเดินของม้าที่ผ่านตำแหน่ง 2 คู่ ของกระดาน A, B, C และ D

จะเห็นว่าม้าสามารถเดินข้ามกระดานย่อยทั้งสี่ที่แบ่งออกมาได้โดย เดินข้ามระหว่างกระดาน A ไปกระดาน B ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(1,\frac{n-1}{2}\right)_A - (2,1)_B \text{ และ } (4,2)_B - \left(3,\frac{n+1}{2}\right)_A$$

เดินม้าข้ามระหว่างกระดาน B ไปกระดาน C ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)_B - \left(1,\frac{n-1}{2}\right)_C \text{ และ } \left(2,\frac{n-5}{2}\right)_C - \left(\frac{n+1}{2},\frac{n-5}{2}\right)_B$$

และเดินม้าข้ามระหว่างกระดาน C ไปกระดาน D ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(\frac{n-1}{2},2\right)_C - \left(\frac{n-1}{2},\frac{n-1}{2}\right)_D \text{ และ } \left(\frac{n-5}{2},\frac{n-3}{2}\right)_D - \left(\frac{n-5}{2},1\right)_C$$

ดังนั้นจะได้ว่าการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(n, n, 1)$ ทำได้โดย ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดาน B และ กระดาน C และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$$\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_A - \left(3, \frac{n+1}{2}\right)_A \text{ บนกระดาน } A$$

และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$$\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_D - \left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)_D \text{ บนกระดาน } D$$

แล้วเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2,1)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(1, \frac{n-1}{2}\right)_C$

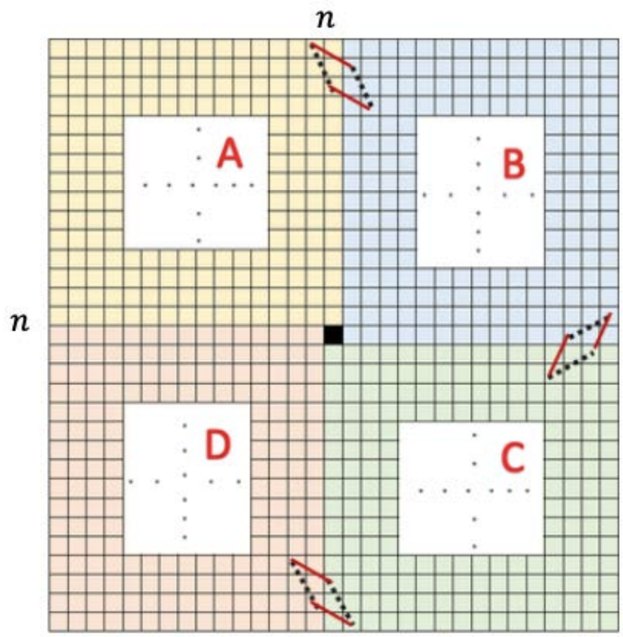
จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, 2\right)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, \frac{n-3}{2}\right)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n-5}{2}, 1\right)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(2, \frac{n-5}{2}\right)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n-5}{2}\right)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4, 2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $\left(3, \frac{n+1}{2}\right)_A$

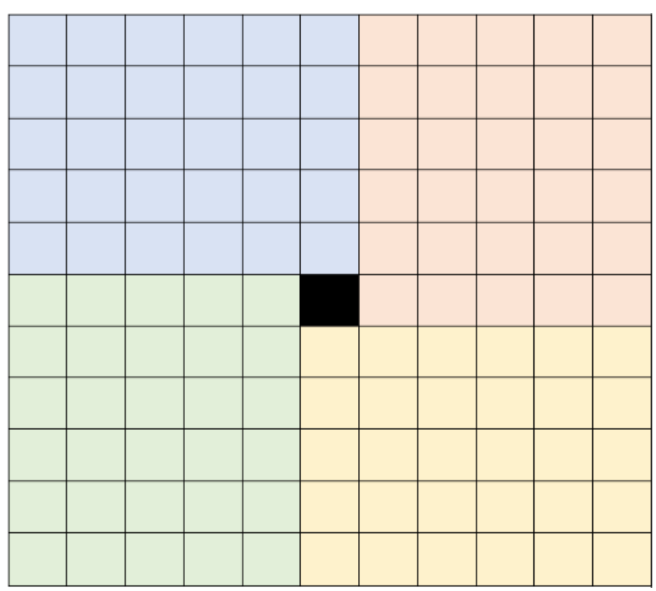
สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 2.6



รูป 2.6 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดาน

ตัวอย่าง 2.1 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(11,11,1)$

แบ่งกระดานวงแหวน $(11,11,1)$ ออกเป็น 4 กระดาน ขนาด 5×6



จะสามาถหาเส้นทางเดินแบบปิดของม้าในแต่ละกระดานย่อยๆ 4 กระดานได้ดังรูป

1_A	10_A	5_A	20_A	25_A	16_A	29_B	22_B	11_B	4_B	1_B
4_A	21_A	2_A	17_A	6_A	19_A	12_B	3_B	30_B	21_B	10_B
11_A	30_A	9_A	24_A	15_A	26_A	23_B	28_B	9_B	2_B	5_B
22_A	3_A	28_A	13_A	18_A	7_A	8_B	13_B	24_B	17_B	20_B
29_A	12_A	23_A	8_A	27_A	14_A	27_B	18_B	15_B	6_B	25_B
16_D	19_D	26_D	7_D	14_D		14_B	7_B	26_B	19_B	16_B
25_D	6_D	15_D	18_D	27_D	14_C	27_C	8_C	23_C	12_C	29_C
20_D	17_D	24_D	13_D	8_D	7_C	18_C	13_C	28_C	3_C	22_C
5_D	2_D	9_D	28_D	23_D	26_C	15_C	24_C	9_C	30_C	11_C
10_D	21_D	30_D	3_D	12_D	19_C	6_C	17_C	2_C	21_C	4_C
1_D	4_D	11_D	22_D	29_D	16_C	25_C	20_C	5_C	10_C	1_C

ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดาน B และ กระดาน C และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$(1,5)_A$- $(3,6\ )_A$ บนกระดาน A

และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$(5,5)_D$ - $(3,4)_D$ บนกระดาน D

แล้วเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(1,5)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2,1)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(5,5)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(1,5)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(5,2)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $(5,5)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $(3,4)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $(3,1)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(1,3)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $(6,3)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4,2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $(3,6)_A$

สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้นดังรูป 2.7

1_A	10_A	5_A	20_A	25_A	16_A	29_B	22_B	11_B	4_B	1_B
4_A	21_A	2_A	17_A	6_A	19_A	12_B	3_B	30_B	21_B	10_B
11_A	30_A	9_A	24_A	15_A	26_A	23_B	28_B	9_B	2_B	5_B
22_A	3_A	28_A	13_A	18_A	7_A	8_B	13_B	24_B	17_B	20_B
29_A	12_A	23_A	8_A	27_A	14_A	27_B	18_B	15_B	6_B	25_B
16_D	19_D	26_D	7_D	14_D		14_B	7_B	26_B	19_B	16_B
25_D	6_D	15_D	18_D	27_D	14_C	27_C	8_C	23_C	12_C	29_C
20_D	17_D	24_D	13_D	8_D	7_C	18_C	13_C	28_C	3_C	22_C
5_D	2_D	9_D	28_D	23_D	26_C	15_C	24_C	9_C	30_C	11_C
10_D	21_D	30_D	3_D	12_D	19_C	6_C	17_C	2_C	21_C	4_C
1_D	4_D	11_D	22_D	29_D	16_C	25_C	20_C	5_C	10_C	1_C

รูป 2.7 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดาน

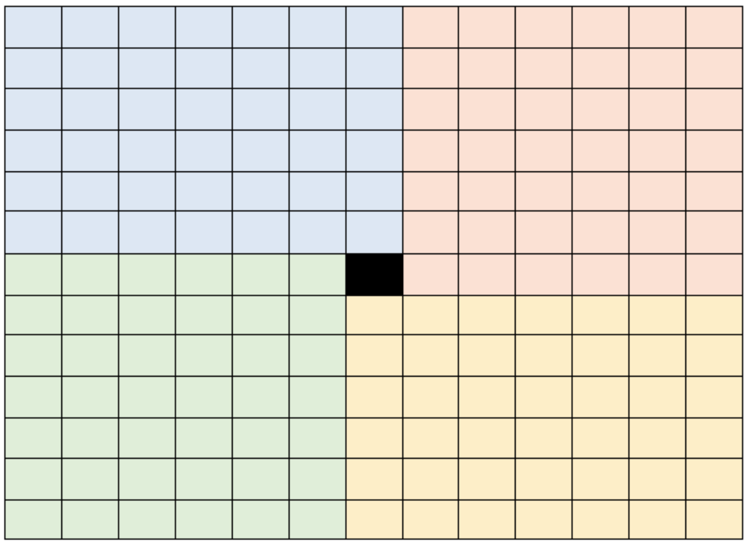
เมื่อเรานำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานใหม่จะได้ดังรูป 2.8

1	10	5	20	25	16	39	106	27	34	37
4	21	2	17	6	19	26	35	38	107	28
11	120	9	24	15	116	105	40	29	36	33
22	3	118	13	18	7	30	115	104	111	108
119	12	23	8	117	14	41	110	113	32	103
82	79	72	61	84		114	31	42	109	112
73	62	83	80	71	44	87	98	53	102	89
78	81	74	85	60	97	48	43	88	93	52
63	66	59	70	75	86	45	54	99	90	101
58	77	68	65	56	49	96	47	92	51	94
67	64	57	76	69	46	55	50	95	100	91

รูป 2.8 การเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(11,11,1)$

ตัวอย่าง 2.2 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(13, 13, 1)$

แบ่งกระดานวงแหวน $(13, 13, 1)$ ออกเป็น 4 กระดาน ขนาด 6×7



จะสามารถหาเส้นทางเดินม้าแบบปิดในแต่ละกระดานย่อย ๆ 4 กระดาน ได้ดังรูป

1_A	12_A	27_A	30_A	19_A	14_A	17_A	38_B	41_B	36_B	11_B	28_B	1_B
28_A	25_A	2_A	13_A	16_A	31_A	20_A	35_B	10_B	39_B	42_B	25_B	12_B
11_A	42_A	29_A	26_A	3_A	18_A	15_A	40_B	37_B	24_B	29_B	2_B	27_B
36_A	39_A	24_A	5_A	8_A	21_A	32_A	9_B	34_B	5_B	26_B	13_B	30_B
41_A	10_A	37_A	34_A	23_A	4_A	7_A	6_B	23_B	8_B	3_B	16_B	19_B
38_A	35_A	40_A	9_A	6_A	33_A	22_A	33_B	4_B	21_B	18_B	31_B	14_B
17_D	20_D	15_D	32_D	7_D	22_D		22_B	7_B	32_B	15_B	20_B	17_B
14_D	31_D	18_D	21_D	4_D	33_D	22_C	33_C	6_C	9_C	40_C	35_C	38_C
19_D	16_D	3_D	8_D	23_D	6_D	7_C	4_C	23_C	34_C	37_C	10_C	41_C
30_D	13_D	26_D	5_D	34_D	9_D	32_C	21_C	8_C	5_C	24_C	39_C	36_C
27_D	2_D	29_D	24_D	37_D	40_D	15_C	18_C	3_C	26_C	29_C	42_C	11_C
12_D	25_D	42_D	39_D	10_D	35_D	20_C	31_C	16_C	13_C	2_C	25_C	28_C
1_D	28_D	11_D	36_D	41_D	38_D	17_C	14_C	19_C	30_C	27_C	12_C	1_C

ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดาน B และ กระดาน C และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$(1,6)_A$- $(3,7)_A$ บนกระดาน A

และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$(6,6)_D$ - $(4,5)_D$ บนกระดาน D

แล้วเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(1,6)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(2,1)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(6,6)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(1,6)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(6,2)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $(6,6)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $(4,5)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $(4,1)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(2,4)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $(7,4)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(4,2)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $(3,7)_A$

สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 2.9

1_A	12_A	27_A	30_A	19_A	14_A	17_A	38_B	41_B	36_B	11_B	28_B	1_B
28_A	25_A	2_A	13_A	16_A	31_A	20_A	35_B	10_B	39_B	42_B	25_B	12_B
11_A	42_A	29_A	26_A	3_A	18_A	15_A	40_B	37_B	24_B	29_B	2_B	27_B
36_A	39_A	24_A	5_A	8_A	21_A	32_A	9_B	34_B	5_B	26_B	13_B	30_B
41_A	10_A	37_A	34_A	23_A	4_A	7_A	6_B	23_B	8_B	3_B	16_B	19_B
38_A	35_A	40_A	9_A	6_A	33_A	22_A	33_B	4_B	21_B	18_B	31_B	14_B
17_D	20_D	15_D	32_D	7_D	22_D		22_B	7_B	32_B	15_B	20_B	17_B
14_D	31_D	18_D	21_D	4_D	33_D	22_C	33_C	6_C	9_C	40_C	35_C	38_C
19_D	16_D	3_D	8_D	23_D	6_D	7_C	4_C	23_C	34_C	37_C	10_C	41_C
30_D	13_D	26_D	5_D	34_D	9_D	32_C	21_C	8_C	5_C	24_C	39_C	36_C
27_D	2_D	29_D	24_D	37_D	40_D	15_C	18_C	3_C	26_C	29_C	42_C	11_C
12_D	25_D	42_D	39_D	10_D	35_D	20_C	31_C	16_C	13_C	2_C	25_C	28_C
1_D	28_D	11_D	36_D	41_D	38_D	17_C	14_C	19_C	30_C	27_C	12_C	1_C

รูป 2.9 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดาน

เมื่อเรานำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานใหม่จะได้ดังรูป 2.10

1	12	153	156	145	14	143	18	21	16	33	134	23
154	151	2	13	142	157	146	15	32	19	22	131	34
11	168	155	152	3	144	141	20	17	130	135	24	133
162	165	150	5	8	147	158	31	140	27	132	35	136
167	10	163	160	149	4	7	28	129	30	25	122	125
164	161	166	9	6	159	148	139	26	127	124	137	36
83	86	81	98	73	88		128	29	138	121	126	123
80	97	84	87	70	99	108	119	50	53	42	37	40
85	82	69	74	89	72	51	48	109	120	39	54	43
96	79	92	71	100	75	118	107	52	49	110	41	38
93	68	95	90	61	64	101	104	47	112	115	44	55
78	91	66	63	76	59	106	117	102	57	46	111	114
67	94	77	60	65	62	103	58	105	116	113	56	45

รูป 2.10 การเดินของม้าบนกระดานวงแหวน $(13, 13, 1)$

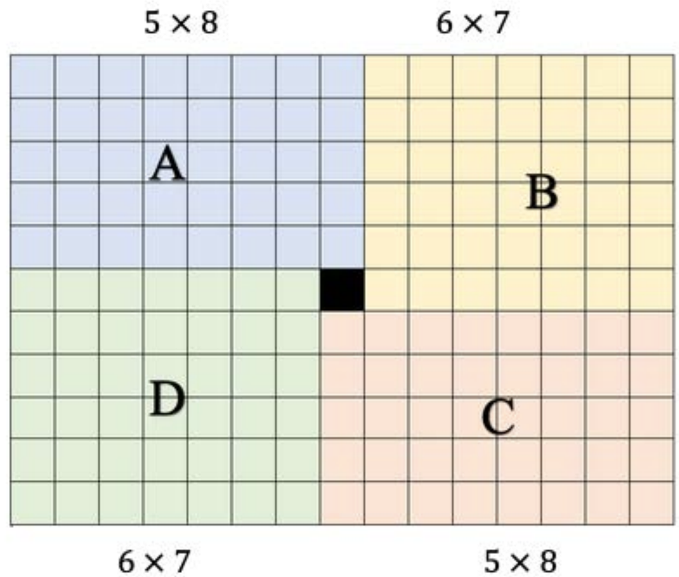
บทที่ 3

การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}, \mathbf{1})$ เมื่อ $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ เป็นจำนวนเต็มคี่บางจำนวน

ในบทนี้เราจะศึกษาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $m, n \geq 11$ และ $n - m = 4k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $m, n \geq 11$ และ $n - m = 4k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะสามารถแบ่งกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ หรือในกรณีนี้จะเรียกว่ากระดานวงแหวน$(m, m + 4k, 1)$ ออกเป็นกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{m-1}{2} \times \frac{m+4k+1}{2}$ เท่า ๆ กันจำนวน 2 กระดาน และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{m+1}{2} \times \frac{m+4k-1}{2}$ เท่า ๆ กันจำนวน 2 กระดาน ตามแนวเส้นขอบของรูขนาด 1×1 ของกระดานวงแหวน $(m, m + 4k, 1)$ ดังตัวอย่างการแบ่งกระดานวงแหวน $(11,15,1)$ ออกเป็น 4 กระดานในรูป 3.1

โดยจะเรียกกระดานหมากรุกย่อยตำแหน่งซ้ายบนว่ากระดาน A และเรียกกระดานย่อยอันอื่น ๆ ตามทิศทางตามเข็มนาฬิกาว่ากระดาน B, C และ D ตามลำดับ ซึ่งกระดาน A และ C เป็นกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{m-1}{2} \times \frac{m+4k+1}{2}$ และกระดาน B และ D เป็นกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{m+1}{2} \times \frac{m+4k-1}{2}$



รูป 3.1 แนวการแบ่งกระดานวงแหวน (11,15,1) ออกเป็น 4 กระดาน

เนื่องจาก m เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ $m \geq 11$ ดังนั้น $m-1, m+1, m+4k-1$ และ $m+4k+1$ เป็นจำนวนเต็มคู่ และทำให้ $\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}, \frac{m+4k-1}{2}$ และ $\frac{m+4k+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

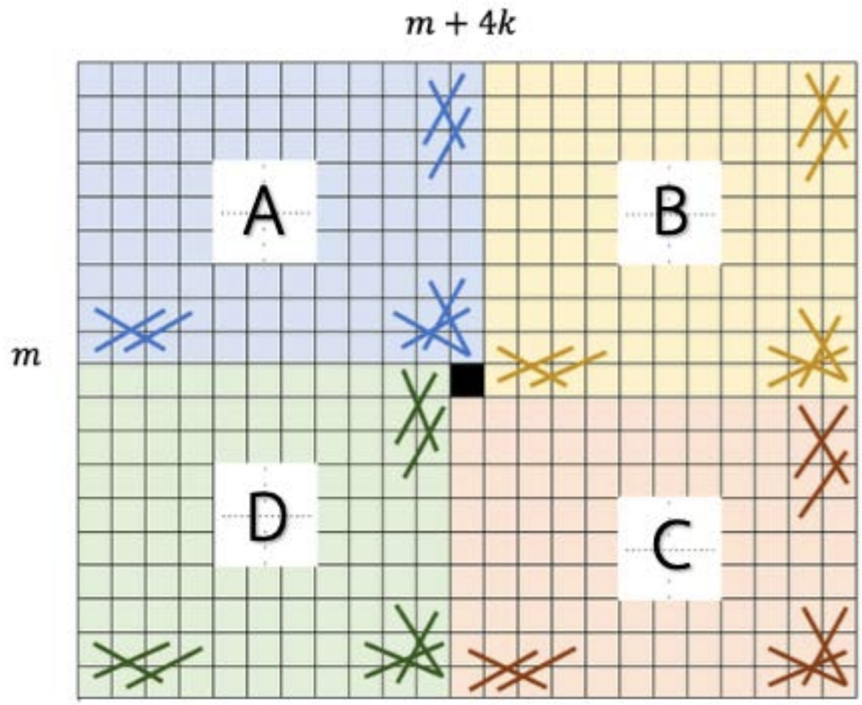
ต่อมาเนื่องจาก $\frac{m+4k+1}{2} - \frac{m-1}{2} = \frac{4k+2}{2} = 2k+1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น $\frac{m+4k+1}{2}$ และ $\frac{m-1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ไม่ได้ และเนื่องจาก $\frac{m+4k-1}{2} - \frac{m+1}{2} = \frac{4k-2}{2} = 2k-1$ เป็นจำนวนเต็มคี่ ดังนั้น $\frac{m+4k-1}{2}$ และ $\frac{m+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ทั้งคู่ไม่ได้

นั่นคือ กระดานหมากรุกขนาด $\frac{m+1}{2} \times \frac{m+4k-1}{2}$ และกระดานหมากรุกขนาด $\frac{m-1}{2} \times \frac{m+4k+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข a) ของทฤษฎีบท 1.1

ยิ่งไปกว่านั้นเรายังได้ว่า $\frac{m-1}{2} \geq 5$ และ $\frac{m+1}{2} \geq 6$ นั่นคือ $\frac{m-1}{2}$ และ $\frac{m+1}{2}$ จะไม่เท่ากับ 1 หรือ 2 หรือ 3 หรือ 4 ทำให้กระดานหมากรุกขนาด $\frac{m+1}{2} \times \frac{m+4k-1}{2}$ และ $\frac{m-1}{2} \times \frac{m+4k+1}{2}$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข b) และ c) ของทฤษฎีบท 1.1

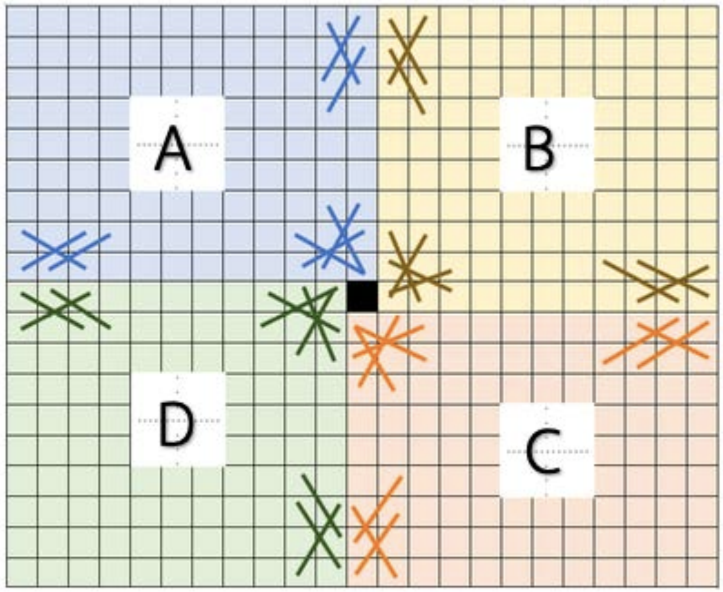
จึงสรุปได้ว่า กระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{m+1}{2} \times \frac{m+4k-1}{2}$ และกระดานหมากรุกย่อยขนาด $\frac{m-1}{2} \times \frac{m+4k+1}{2}$ เหล่านี้มีการเดินแบบปิดของม้าเสมอ

นอกจากนี้เรายังได้จากทฤษฎีบท 1.2 ว่าบนกระดานย่อย A, B, C และ D จะสามารถหาการเดินแบบปิดของม้าที่มีการเดินม้า 1 ครั้งจากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่งเป็นคู่ ๆ จำนวน 10 คู่ ดังรูป 3.2



รูป 3.2 ตำแหน่งสองตำแหน่งทั้งหมด 10 คู่บนกระดาน A, B, C และ D

เราจะพลิกกระดาน B ตามแกนสมมาตรแนวตั้ง หมุนกระดาน C ไป $180°$ ในทิศตามเข็มนาฬิกา และพลิกกระดาน D ตามแกนสมมาตรแนวนอน จะได้ตำแหน่งการเดินของม้า 10 คู่บนกระดานย่อยใหม่ที่พลิกหรือหมุนแล้วดังรูป 3.3



รูป 3.3 ตำแหน่งสองตำแหน่งทั้งหมด 10 คู่บนกระดาน A, B, C และ D หลังพลิกหรือหมุน

จากตำแหน่งทั้ง 10 คู่ บนกระดานย่อยทั้งสี่ดังกล่าว เราเลือกใช้ตำแหน่งการเดินบนกระดาน A จำนวน 1 คู่ คือ

$$\left(1, \frac{m+4k-1}{2}\right)_A - \left(3, \frac{m+4k+1}{2}\right)_A$$

เราเลือกใช้ตำแหน่งการเดินบนกระดาน B จำนวน 2 คู่ คือ

$$(2,1)_B - (4,2)_B \text{ และ } \left(\frac{m-1}{2}, \frac{m+4k-1}{2}\right)_B - \left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+4k-5}{2}\right)_B$$

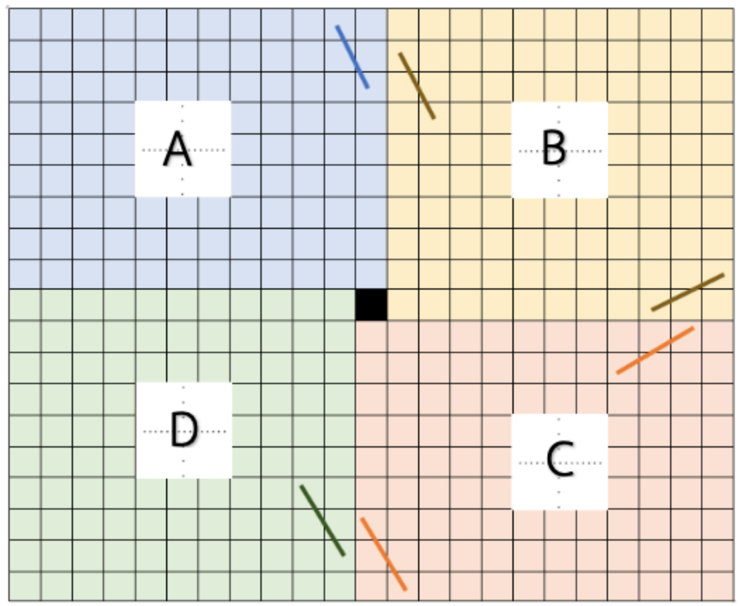
เราเลือกใช้ตำแหน่งการเดินบนกระดาน C จำนวน 2 คู่ คือ

$$\left(1, \frac{m-3}{2}\right)_C - \left(2, \frac{m+4k-5}{2}\right)_C \text{ และ } \left(\frac{m-5}{2}, 1\right)_C - \left(\frac{m-1}{2}, 2\right)_C$$

เราเลือกใช้ตำแหน่งการเดินบนกระดาน D จำนวน 1 คู่ คือ

$$\left(\frac{m-5}{2}, \frac{m+4k-3}{2}\right)_D - \left(\frac{m-1}{2}, \frac{m+4k-1}{2}\right)_D$$

ดังรูป 3.4



รูป 3.4 ตำแหน่งเส้นทางการเดินของม้าที่เลือกบนกระดาน A, B, C และ D

จะเห็นว่าม้าสามารถเดินข้ามกระดานย่อยทั้งสี่ที่แบ่งออกมาได้โดย เดินข้ามระหว่างกระดาน A ไปกระดาน B ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(3,\frac{m+4k+1}{2}\right)_A \text{ - } (4,2)_B \text{ และ } (2,1)_B \text{ - } \left(1,\frac{m+4k-1}{2}\right)_A$$

เดินม้าข้ามระหว่างกระดาน B ไปกระดาน C ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(\frac{m+1}{2},\frac{m+4k-5}{2}\right)_B \text{ - } \left(2,\frac{m+4k-5}{2}\right)_C \text{ และ } \left(1,\frac{m+4k-1}{2}\right)_C \text{ - } \left(\frac{m-1}{2},\frac{m+4k-1}{2}\right)_B$$

และเดินม้าข้ามระหว่างกระดาน C ไปกระดาน D ด้วยการเดินม้าระหว่างตำแหน่ง 2 คู่ คือ

$$\left(\frac{m-1}{2},2\right)_C \text{ - } \left(\frac{m-1}{2},\frac{m+4k-1}{2}\right)_D \text{ และ } \left(\frac{m-5}{2},\frac{m+4k-3}{2}\right)_D \text{ - } \left(\frac{m-5}{2},1\right)_C$$

ดังนั้นจะได้ว่าการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, m+4k, 1)$ ทำได้โดย ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดาน B และ กระดาน C และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$$\left(1, \frac{m+4k-1}{2}\right)_A \text{-} \left(3, \frac{m+4k+1}{2}\right)_A \text{ บนกระดาน } A$$

และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$$\left(\frac{m-5}{2}, \frac{m+4k-3}{2}\right)_D \text{ - } \left(\frac{m-1}{2}, \frac{m+4k-1}{2}\right)_D \text{ บนกระดาน } D$$

แล้วเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง$\left(3, \frac{m+4k+1}{2}\right)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง $(4, 2)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+4k-5}{2}\right)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(2, \frac{m+4k-5}{2}\right)_C$

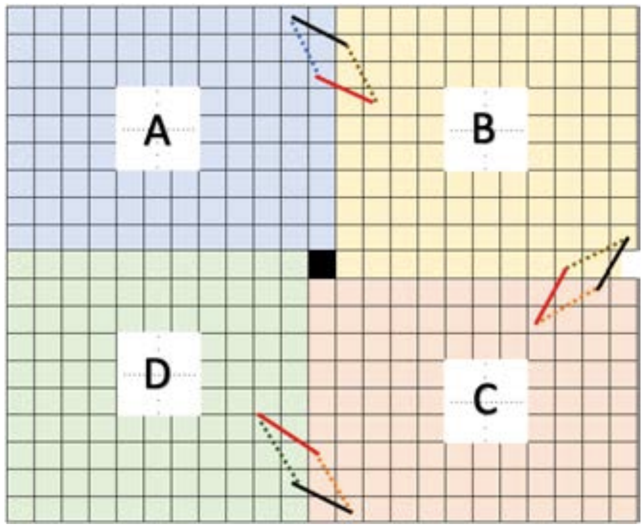
จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{m-1}{2}, 2\right)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m+4k-1}{2}\right)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(\frac{m-5}{2}, \frac{m+4k-3}{2}\right)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{m-5}{2}, 1\right)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $\left(1, \frac{m+4k-1}{2}\right)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $\left(\frac{m-1}{2}, \frac{m+4k-1}{2}\right)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(2,1)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $\left(1, \frac{m+4k-1}{2}\right)_A$

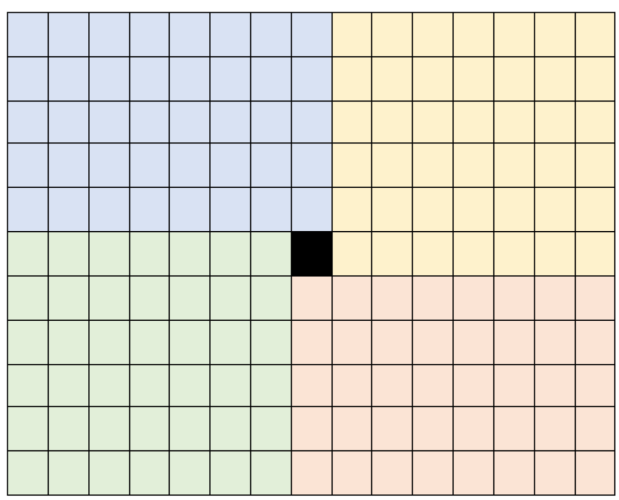
สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 3.5



รูป 3.5 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดาน

ตัวอย่าง 3.1 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(11, 15,1)$ นั่นคือ $m = 11, k = 1$

แบ่งกระดานวงแหวน $(11,15,1)$ เป็น 4 กระดาน เป็นกระดานย่อยขนาด 5×8 จำนวน 2 กระดาน และกระดานย่อยขนาด 6×7 จำนวน 2 กระดาน ดังรูป 3.6



รูป 3.6 แนวการแบ่งกระดานวงแหวน $(11,15,1)$

จะสามารถหาเส้นทางเดินม้าแบบปิดในแต่ละกระดานย่อย ๆ 4 กระดาน ได้ดังรูป

1_A	6_A	27_A	22_A	29_A	34_A	11_A	16_A	1_B	8_B	19_B	34_B	3_B	10_B	17_B
26_A	21_A	2_A	7_A	12_A	17_A	30_A	35_A	20_B	35_B	2_B	9_B	18_B	33_B	4_B
5_A	40_A	23_A	28_A	33_A	8_A	15_A	10_A	7_B	42_B	27_B	36_B	5_B	16_B	11_B
20_A	25_A	38_A	3_A	18_A	13_A	36_A	31_A	28_B	21_B	6_B	15_B	26_B	37_B	32_B
39_A	4_A	19_A	24_A	37_A	32_A	9_A	14_A	41_B	14_B	23_B	30_B	39_B	12_B	25_B
38_D	31_D	24_D	13_D	40_D	29_D	22_D		22_B	29_B	40_B	13_B	24_B	31_B	38_B
25_D	12_D	39_D	30_D	23_D	14_D	41_D	14_C	9_C	32_C	37_C	24_C	19_C	4_C	39_C
32_D	37_D	26_D	15_D	6_D	21_D	28_D	31_C	36_C	13_C	18_C	3_C	38_C	25_C	20_C
11_D	16_D	5_D	36_D	27_D	42_D	7_D	10_C	15_C	8_C	33_C	28_C	23_C	40_C	5_C
4_D	33_D	18_D	9_D	2_D	35_D	20_D	35_C	30_C	17_C	12_C	7_C	2_C	21_C	26_C
17_D	10_D	3_D	34_D	19_D	8_D	1_D	16_C	11_C	34_C	29_C	22_C	27_C	6_C	1_C

ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่งทั้ง 2 คู่ บนกระดาน B และ กระดาน C และ ยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$(1,7)_A$ -$(3,8)_A$ บนกระดาน A

และยกเลิกการเดินผ่านตำแหน่ง 1 คู่ คือ

$(3,6)_D$ - $(5,7)_D$ บนกระดาน D

แล้วเริ่มการเดินม้าจากตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนถึงตำแหน่ง $(3,8)_A$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน B ที่ตำแหน่ง$(4,2)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง$(6,5)_B$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน C ที่ตำแหน่ง $(2,5)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง$(5,2)_C$ แล้วเดินม้าข้ามไปกระดาน D ที่ตำแหน่ง $(5,7)_D$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน D ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน D ไปจนถึงตำแหน่ง $(3,6)_D$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน C ที่ตำแหน่ง $(3,1)_C$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน C ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน C ไปจนถึงตำแหน่ง $(1,7)_C$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน B ที่ตำแหน่ง $(5,7)_B$

จากนั้นเดินม้าบนกระดาน B ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน B ไปจนถึงตำแหน่ง $(2,1)_B$ แล้วจึงเดินม้าข้ามกลับมากระดาน A ที่ตำแหน่ง $(1,7)_A$

สุดท้ายเดินม้าบนกระดาน A ด้วยเส้นทางการเดินแบบปิดของม้าบนกระดาน A ไปจนกลับมาตำแหน่งเริ่มต้น ดังรูป 3.7

1_A	6_A	27_A	22_A	29_A	34_A	11_A	16_A	1_B	8_B	19_B	34_B	3_B	10_B	17_B
26_A	21_A	2_A	7_A	12_A	17_A	30_A	35_A	20_B	35_B	2_B	9_B	18_B	33_B	4_B
5_A	40_A	23_A	28_A	33_A	8_A	15_A	10_A	7_B	42_B	27_B	36_B	5_B	16_B	11_B
20_A	25_A	38_A	3_A	18_A	13_A	36_A	31_A	28_B	21_B	6_B	15_B	26_B	37_B	32_B
39_A	4_A	19_A	24_A	37_A	32_A	9_A	14_A	41_B	14_B	23_B	30_B	39_B	12_B	25_B
38_D	31_D	24_D	13_D	40_D	29_D	22_D		22_B	29_B	40_B	13_B	24_B	31_B	38_B
25_D	12_D	39_D	30_D	23_D	14_D	41_D	14_C	9_C	32_C	37_C	24_C	19_C	4_C	39_C
32_D	37_D	26_D	15_D	6_D	21_D	28_D	31_C	36_C	13_C	18_C	3_C	38_C	25_C	20_C
11_D	16_D	5_D	36_D	27_D	42_D	7_D	10_C	15_C	8_C	33_C	28_C	23_C	40_C	5_C
4_D	33_D	18_D	9_D	2_D	35_D	20_D	35_C	30_C	17_C	12_C	7_C	2_C	21_C	26_C
17_D	10_D	3_D	34_D	19_D	8_D	1_D	16_C	11_C	34_C	29_C	22_C	27_C	6_C	1_C

รูป 3.7 การเดินของม้าที่เดินเชื่อมระหว่างกระดาน

เมื่อเรานำมาเรียงเขียนแนวการเดินทั้งกระดานใหม่จะได้ดังรูป 3.8

1	6	151	146	153	158	135	140	115	122	133	106	117	124	131
150	145	2	7	136	141	154	159	134	107	116	123	132	105	118
5	164	147	152	157	8	139	10	121	114	99	108	119	130	125
144	149	162	3	142	137	160	155	100	11	120	129	98	109	104
163	4	143	148	161	156	9	138	113	128	13	102	111	126	97
72	79	86	55	70	81	88		12	101	112	127	14	103	110
85	56	71	80	87	54	69	44	91	26	21	34	39	96	19
78	73	84	53	62	89	82	27	22	45	40	15	20	33	38
57	52	63	74	83	68	61	90	43	92	25	30	35	18	95
64	77	50	59	66	75	48	23	28	41	46	93	16	37	32
51	58	65	76	49	60	67	42	47	24	29	36	31	94	17

รูป 3.8 การเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(11,15,1)$

บทที่ 4

ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

4.1 ข้อสรุป

โครงงานฉบับนี้พิจารณาการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ เมื่อ m, n ที่เป็นจำนวนเต็มคี่บางจำนวน โดยสามารถหาเงื่อนไขที่รับประกันการมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้าบนกระดานวงแหวนได้ดังต่อไปนี้

กระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ $m, n \geq 3$	การมีอยู่ของการเดินแบบปิดของม้า
$m = n$ และ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่ไม่เท่ากับ 5	มีการเดินแบบปิดของม้า
$n = 5$	ไม่มีการเดินแบบปิดของม้า
$n = m + 4k$, $m \geq 11$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก	มีการเดินแบบปิดของม้า

4.2 ข้อเสนอแนะ

โครงงานฉบับนี้สามารถศึกษาต่อไปได้ โดยสามารถหาเงื่อนไขการมีอยู่ของการเดินม้าแบบปิดบนกระดานวงแหวนแบบอื่น ๆ ได้อีก เช่น ขนาดของรูเป็น $r \times r$ เมื่อ $r \geq 2$ และ กระดานวงแหวน $(m, n, 1)$ กรณีที่ $m \neq n$ ในรูปแบบอื่น ๆอีก เช่น กรณีที่ 4 หาร $n - m$ ไม่ลงตัว

เอกสารอ้างอิง

[1] G.L. Chia and S.-H. Ong (2005). Generalized knight's tours on rectangular chessboards, Discrete Applied Mathematics, 150.

[2] A.L. Schwenk (1991). Rectangular chessboards have a knight's tour, Math. Magazine, 64, 325-332.

[3] H.R. Wiitala (1996). The knight's tour problem on boards with holes, Research Experiences for Undergraduates Proceedings, 132-151.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การเดินของม้าบนกระดานที่มีรูบางกระดาน
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Knight's tour on some annulus board
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตรจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
ผู้ดำเนินการ	นางสาว ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์ เลขประจำตัวนิสิต 5833531523 สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

การเดินของม้าบนกระดานหมากรุกเป็นเรื่องที่น่าสนใจในทางคณิตศาสตร์ โดยม้าจะเดินไปในแนวนอนหรือแนวตั้งจำนวนสองช่องแล้วหมุนในระนาบเดียวกัน 90 องศากับแนวเดิมและเดินต่อไปอีกหนึ่งช่อง สำหรับกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ถ้าแทนแต่ละช่องของหมากรุกด้วยตำแหน่ง (i, j) ม้าที่อยู่ในตำแหน่ง (i, j) จะสามารถเดินไปได้อย่างมาก 8 ตำแหน่ง โดยไปอยู่ในตำแหน่ง $(i \pm 1, j \pm 2)$ หรือ $(i \pm 2, j \pm 1)$ การเดินของม้าแบบปิด คือ การเดินของม้าโดยที่เดินไปทุกๆ ช่องของกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ เพียงหนึ่งครั้ง แล้วจบการเดินด้วยตำแหน่งเริ่มต้น

ในปี ค.ศ. 1991 Schwenk ได้พิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 (Schwenk) บนกระดานหมากรุกขนาด $m \times n$ โดยที่ $m \le n$ จะมีการเดินของม้าแบบปิดได้ ยกเว้นถ้าเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

a) m และ n เป็นจำนวนคี่ทั้งคู่ หรือ

b) m = 1 หรือ 2 หรือ 4 หรือ

c) m = 3 และ n = 4 หรือ 6 หรือ 8

นอกจากนี้ในบางครั้งแทนที่จะหาการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด m x n เรายังสามารถหาการเดินของม้าแบบเปิดบนกระดานหมากรุกขนาด m x n ได้อีกด้วย การเดินของม้าแบบเปิด คือการเดินของม้าที่เดินไปในทุกๆ ช่องของกระดานหมากรุกขนาด m x n เพียงครั้งเดียว แต่จุดเริ่มต้นของม้าอยู่คนละตำแหน่งกับจุดสิ้นสุดของการของเดินม้า ในปี ค.ศ. 2005 Chia และ Ong ได้คิดและเผยแพร่บทพิสูจน์เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับการมีอยู่ของการเดินของม้าแบบเปิดบนกระดานหมากรุกขนาด m x n ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2 (Chia และ Ong) บนกระดานหมากรุกขนาด m x n โดยที่ $m \le n$ จะมีการเดินของม้าแบบเปิดได้เสมอ ยกเว้นกรณีใดกรณีหนึ่งต่อไปนี้เป็นจริง

a) m = 1 หรือ 2 หรือ

b) m = 3 และ n = 3 หรือ 5 หรือ 6 หรือ

c) m = 4 และ n = 4

นักวิจัยหลายคนหันไปให้ความสนใจกับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวน (m, n, r) กล่าวคือ การเดินของม้าบนกระดานหมากรุกขนาด m x n ซึ่ง $m, n \ge 3$, $r \ge 1$ และ $m, n \ge 2r$ โดยที่ส่วนตรงกลางกระดานขนาด r x r ขาดหายไป

ในโครงงานฉบับนี้จะศึกษาเงื่อนไขเกี่ยวกับการมีอยู่ของการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานวงแหวน (m, n, 1) เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคี่บางจำนวน

วัตถุประสงค์

เพื่อศึกษาเงื่อนไขการมีอยู่ของการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานวงแหวน (m, n, 1) เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคี่บางจำนวน

ขอบเขตของโครงงาน

โครงงานนี้สนใจเฉพาะการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานวงแหวน (m, n, 1) เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคี่บางจำนวนเท่านั้น

วิธีการดำเนินงาน

1) ศึกษาการเดินของม้าแบบเปิดและการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด 8 x 8
2) ศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนหลากหลายขนาด
3) ศึกษารูปแบบและเทคนิคการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนหลากหลายขนาด
4) หาขนาดกระดานวงแหวนที่มีการเดินของม้าแบบปิด และรูปแบบการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนดังกล่าว

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้รูปแบบการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานวงแหวน (m, n, 1) เมื่อ m และ n เป็นจำนวนคี่บางจำนวนเท่านั้น
2) ได้ฝึกวิธีการคิด การวิเคราะห์ การประยุกต์ใช้ การตั้งคำถามและหาคำตอบ

ระยะเวลาการดำเนินงาน

ขั้นตอนการดำเนินการ	เดือน								
	ก.ค.	**ส.ค.**	**ก.ย.**	**ต.ค.**	**พ.ย.**	**ธ.ค.**	**ม.ค.**	**ก.พ.**	**มี.ค.**
1. ศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องและเสนอหัวข้อโครงงาน									
2. ดำเนินการโครงงาน - ศึกษาลักษณะการเดินของม้าแบบเปิดและการเดินของม้าแบบปิดบนกระดานหมากรุกขนาด 8 x 8									

- ศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนหลากหลายขนาด - ศึกษารูปแบบและเทคนิคการเดินของม้าบนกระดานวงแหวนหลากหลายขนาด - หาขนาดกระดานวงแหวนที่มีการเดินของม้าแบบปิด และรูปแบบการเดินของม้าบนกระดาน									
3. เขียนรายงานและนำเสนอโครงงาน									

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

Microsoft Word

Microsoft Powerpoint

กระดาษ A4

สมุดตาราง

แฟลชไดร์ฟ

และเครื่องพิมพ์ cannon

งบประมาณ

1) สมุดแบบตาราง 500 บาท
2) กระดาษ A4 1500 บาท
3) อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล 500 บาท
4) หมึกพิมพ์ 1500 บาท
5) ค่าถ่ายเอกสาร 1000 บาท

เอกสารอ้างอิง

A.L. Schwenk (1991). Rectangular chessboards have a knight’s tour, Math. Magazine, 64, 325-332.

G.L. Chia and S-H Ong, Generalized knight’s tours on rectangular chessboards, Discrete Applied Mathematics, 150 (2005).

ประวัติผู้เขียน

นางสาว ปัญญาพร ทรัพย์วรฤทธิ์
ID 5833531523
สาขา คณิตศาสตร์
ภาควิชา คณิตศาสตร์และ
วิทยาการคอมพิวเตอร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย