โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม

Inequalities for Logarithmic Derivatives

ชื่อนิสิต นายติณณ์ รุ่นใหม่ **เลขประจำตัว** 5833519023

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2561

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม

นายติณณ์ รุ่นใหม่

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

Inequalities for Logarithmic Derivatives

Tin Runmai

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน	อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม
โดย	นายติณณ์ รุ่นใหม่
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร.พิเชฐ ชาวหา)

ติณณ์ รุ่นใหม่: อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม (Inequalities for Logarithmic Derivatives) อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก: ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย, 27 หน้า.

โครงงานการวิจัย เรื่อง "อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม" มีจุดมุ่งหมาย เพื่อศึกษาอสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม (Inequalities for Logarithmic Derivatives) ในกรณีพหุนามและเศษส่วนพหุนาม และขยายผลลัพธ์ที่ได้ไปสู่ฟังก์ชันอื่นๆ กล่าวคือ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง พิจารณาอสมการในรูป $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq \alpha$ โดย $\alpha > 0$ เป็นค่าคงตัว สังเกตว่าพจน์ $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln f(x)$ พจน์ดังกล่าวนี้มีชื่อเรียกว่า อนุพันธ์เชิงลอการิทึม (Logarithmic Derivatives) ของฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นที่ทราบกันว่าเซตของผลเฉลยของอสมการดังกล่าว ในกรณีที่ f เป็นพหุนาม ประกอบด้วยช่วงที่มีผลรวมของความยาวช่วงน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{2n}{\alpha}$ และในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันเศษส่วนของพหุนาม ประกอบด้วยช่วงที่มีผลรวมของความยาวช่วงน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{8n}{\alpha}$

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ติณณ์ รุ่นใหม่

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก [signature]

ปีการศึกษา 2561

5833519023: MAJOR MATHEMATICS

TIN RUNMAI : INEQUALITIES FOR LOGARITHMIC DERIVATIVES.

ADVISOR : ASST. PROF. SUJIN KHOMRUTAI, Ph.D., 27 pp.

The topic of the research is "Inequalities for Logarithmic Derivatives". The objectives of this research are to study Inequalities for Logarithmic Derivatives of polynomial, rational of polynomial and to apply for another functions. Specifically, when f is a real-valued function, we consider the inequality of the form $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq \alpha$ where $\alpha > 0$ is a constant. We observe that $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln f(x)$; this term is called the Logarithmic Derivative of f . It is well-known that the solution set of this inequality, in the case that f is a polynomial, consists of intervals such that the sum of their lengths is less than or equal to $\frac{2n}{\alpha}$, and in the case f is a rational function of polynomials, consists of intervals such that the sum of their lengths is less than or equal to $\frac{8n}{\alpha}$

Department: Mathematics and Computer Science Student's Signature

Field of Study: Mathematics Advisor's Signature

Academic Year: 2018

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานการวิจัยในหัวข้อเรื่อง "อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม" เสร็จสมบูรณ์ได้ทั้งนี้ได้รับความอนุเคราะห์ ความช่วยเหลือ และการสนับสนุนจากบุคคลและหน่วยงานดังต่อไปนี้

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ได้นำหัวข้อเรื่องนี้มาเป็นโครงงาน ตลอดจนให้คำปรึกษา ถ่ายทอดความรู้ ประสบการณ์ ชี้แนะแนวทางการทำงาน และเข้มงวดกวดขัน เอาใจใส่เป็นอย่างดีมาโดยตลอด จนโครงงานนี้บรรลุตามวัตถุประสงค์

ตลอดจนขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล, รองศาสตราจารย์ ดร.พิเชฐ ชาวหา อาจารย์กรรมการสอบในครั้งนี้ และคณาจารย์ทุก ๆ ท่านที่ได้ถ่ายทอดความรู้วิชาการ ให้คำชี้แนะ และประสบการณ์ต่าง ๆ ตลอดระยะเวลาที่ข้าพเจ้าได้เข้ามาศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย จนสามารถดำเนินโครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

สุดท้ายนี้หวังเป็นอย่างยิ่งว่าผลการวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์ให้ผู้ที่สนใจศึกษาต่อไป

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 หลักการและเหตุผล

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง อสมการในรูป $\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})} \geq \alpha$ โดย $\alpha > 0$ เป็นค่าคงตัว ได้รับความสนใจและมีการศึกษาในวงกว้าง สังเกตว่าพจน์ $\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln\mathrm{f}(\mathrm{x})$ ดังนั้นพจน์ดังกล่าวนี้จึงมีชื่อเรียกว่า อนุพันธ์เชิงลอการิทึม (Logarithmic Derivatives) ของฟังก์ชัน f เป็นที่ทราบกันว่าเซตของผลเฉลยของอสมการดังกล่าวในกรณีที่ f เป็นพหุนาม ประกอบด้วยช่วงที่มีผลรวมของความยาวช่วงน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{2\mathrm{n}}{\alpha}$ และในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันเศษส่วนของพหุนาม ประกอบด้วยช่วงที่มีผลรวมของความยาวช่วงน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{8\mathrm{n}}{\alpha}$

1.2 วัตถุประสงค์

ศึกษาอสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม ในกรณีพหุนามและเศษส่วนพหุนาม

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

พิสูจน์อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึมของฟังก์ชันค่าจริง f โดยเป็นอสมการในรูป $\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})} \geq \alpha$ โดย $\alpha > 0$ เป็นค่าคงตัว และ f เป็นฟังก์ชันพหุนามหรือฟังก์ชันตรรกยะ

1.4 วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. กำหนดบทนิยามต่าง ๆ
3. พิสูจน์ทฤษฎีบทของโครงงาน
4. สรุปผลและจัดทำรายงาน

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้นำความรู้จากวิชาแคลคูลัสและการวิเคราะห์เชิงจริงเบื้องต้นไปแก้ปัญหาในเชิงงานวิจัย

1.6 สัญลักษณ์และความหมาย

1. $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{f'(x)}{f(x)} \geq \alpha\right\}\right)$ โดยที่ $\alpha > 0$ หมายถึง ผลรวมของความยาวช่วงย่อยของอสมการ $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq \alpha$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$, f เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ α เป็นค่าคงตัว

2. P_n หมายถึง เซตของพหุนามดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

บทที่ 2

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากการศึกษาและแก้ไขปัญหา IMO ปี ค.ศ. 1988 ข้อที่ 4 ซึ่งกล่าวว่า "จงแสดงว่าเซตของผลเฉลยของอสมการ $\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geq\frac{5}{4}$ เป็นยูเนียนของช่วงของจำนวนจริงที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน และผลรวมของความยาวช่วงเท่ากับ 1988"
ได้เป็นที่มาของการขยายผลไปสู่อนุพันธ์เชิงลอการิทึมที่ต้องการศึกษา โดยมีบทพิสูจน์ดังต่อไปนี้

บทพิสูจน์. ให้ $f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}$

ให้ $x<1$ จะได้ว่า $x-k<0$ ทุกค่า $k=1,2,\ldots,70$

ฉะนั้น $\frac{k}{x-k}<0$ ทุกค่า $k=1,2,\ldots,70$

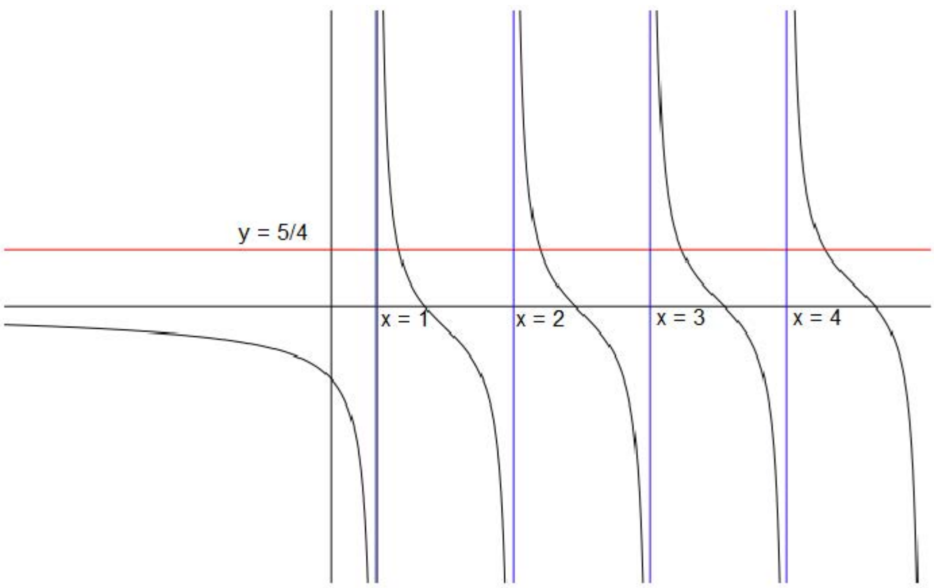
$\therefore \sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}<0$ ฉะนั้น $f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}<0$ ทุกค่า $x<1$

$\therefore \left\{x\,\middle|\,\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geq\frac{5}{4}\right\}\cap(-\infty,1)=\emptyset$

$\therefore \sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geq\frac{5}{4}$ ไม่มีผลเฉลยบนช่วง $(-\infty,1)$

ให้ $S=\left\{x\,\middle|\,f(x)\geq\frac{5}{4}\right\}$ และ $i\in\{2,3,\ldots,71\}$

$\therefore f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(i-1,i)$



เนื่องจาก $f'(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{-k}{(x-k)^2} = -(\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{(x-k)^2}) < 0$ ทุกค่า x บนช่วง $(i-1, i)$

$\therefore$ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้บนช่วง $(i-1, i)$ ----- (1)

$\therefore$ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง $(i-1, i)$ ----- (2)

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to i^-} \frac{i}{x-i} = -\infty$ และ $\lim\limits_{x \to i^-} \frac{k}{x-k} = \frac{k}{i-k}$ ทุกค่า $k \neq i$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to i^-} \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = -\infty$ ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{x \to i^-} f(x) = -\infty$ ----- (3)

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to i^+} \frac{i}{x-i} = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to i^+} \frac{k}{x-k} = \frac{k}{i-k}$ ทุกค่า $k \neq i$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to i^+} \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \infty$ ทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{x \to i^+} f(x) = \infty$ ----- (4)

จาก (1) , (2) , (3) , (4) จะได้ว่า $f(x) = \frac{5}{4}$ มีรากบนช่วง $(i-1, i)$ เพียงค่าเดียว

ให้ x_{i-1} เป็นรากของ $f(x) = \frac{5}{4}$ บนช่วง $(i-1, i)$ ----- (5)

จะได้ว่า $f(x) = \frac{5}{4}$ มีราก 70 ตัวบนช่วง $(1,71)$

จาก (1) , (3) , (4) , (5) จะได้ว่า $\left\{x \,\middle|\, f(x) \geq \frac{5}{4}\right\} \cap (i-1, i) = (i-1, x_{i-1}]$

$\therefore$ $x_1, x_2, \ldots, x_{70}$ เป็นรากของ $f(x) = \frac{5}{4}$ บนช่วง $(1,71)$

โดยที่ $1 < x_1 < 2 < x_2 < \cdots < 70 < x_{70} < 71$

และ $S = \left\{x \,\middle|\, f(x) \geq \frac{5}{4}\right\} = (1, x_1] \cup (2, x_2] \cup \ldots \cup (70, x_{70}]$

ให้ $|S|$ แทน ผลรวมความยาวช่วงย่อยใน S

$$\therefore |S| = \sum_{k=1}^{70}(x_k - k) = \sum_{k=1}^{70} x_k - \sum_{k=1}^{70} k = \sum_{k=1}^{70} x_k - \frac{70(70+1)}{2} = \sum_{k=1}^{70} x_k - 2485$$

ให้

$$p(x) = \prod_{k=1}^{70}(x-k) - \frac{4}{5}\sum\nolimits_{k=1}^{70}(k \prod_{j=1, j\neq k}^{70}(x-j))$$

ฉะนั้น $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 70

ให้ $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots + p_{69} x^{69} + p_{70} x^{70}$

จะได้ว่า $p(x) = 0$

ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} (k \prod_{j=1, j\neq k}^{70} (x-j)) = \prod_{k=1}^{70} (x-k)$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{70}(x-k)}\left(\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} (k \prod_{j=1, j\neq k}^{70} (x-j))\right) = 1$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} (k \frac{\prod_{j=1, j\neq k}^{70}(x-j)}{\prod_{k=1,}^{70}(x-k)}) = 1$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = 1$$

ก็ต่อเมื่อ

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \frac{5}{4}$$

$\therefore x_1, x_2, \dots, x_{70}$ เป็นรากของ $f(x) = \frac{5}{4}$ ก็ต่อเมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_{70}$ เป็นรากของ $p(x) = 0$

เนื่องจาก $\prod_{k=1}^{70}(x-k)$ เป็นพหุนามดีกรี 70

ให้

$$\prod_{k=1}^{70}(x-k) = A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{69} x^{69} + a_{70} x^{70}$$

$$\therefore a_{69} = -(1 + 2 + \cdots . +70)$$

เนื่องจาก

$$\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70} (k \prod_{j=1, j\neq k}^{70} (x-j))$$

เป็นพหุนามดีกรี 69

ให้

$$\frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}(k\prod_{j=1,j\neq k}^{70}(x-j)) = B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{68}x^{68} + b_{69}x^{69}$$

$$\therefore b_{69} = \frac{4}{5}(1+2+\cdots.+70)$$

จาก $p(x) = p_0 + p_1x + \cdots + p_{69}x^{69} + p_{70}x^{70}$

จะได้ว่า $p_0 + p_1x + \cdots + p_{69}x^{69} + p_{70}x^{70}$

$$= \prod_{k=1}^{70}(x-k) - \frac{4}{5}\sum_{k=1}^{70}(k\prod_{j=1,j\neq k}^{70}(x-j))$$

$$= (a_0 + a_1x + \cdots + a_{70}x^{70}) - (b_0 + b_1x + \cdots + +b_{69}x^{69})$$

$$= \Big(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_{69}x^{69} - b_{69}x^{69}) \ + a_{70}x^{70}\Big)$$

เนื่องจาก $x_1, x_2, \ldots, x_{70}$ เป็นรากของ $p(x) = 0$

$$\therefore \sum_{k=1}^{70} x_k = -p_{69} = -(a_{69} - b_{69}) = b_{69} - a_{69}$$

$$= \frac{4}{5}(1+2+\cdots+70) + (1+2+\cdots.+70) = 4{,}483$$

$$\therefore |S| = \sum_{k=1}^{70} x_k - 2 = 4{,}483 - 2{,}485 = 1{,}998$$

นอกจากนี้ จากงานวิจัยเรื่อง Inequalities for Logarithmic Derivatives ของ Peter Borwein & Tamás Erdélyi [3] ได้กล่าวไว้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{r'(x)}{r(x)} \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{cn}{\alpha}, \alpha > 0$ เมื่อ r เป็นฟังก์ชันตรรกยะที่เศษและส่วนมีดีกรี n ทั้งคู่ และ c เป็นค่าคงตัวที่ไม่ขึ้นกับ n ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาอนุพันธ์เชิงลอการิทึมในบทถัดไป

บทที่ 3
ผลการดำเนินงาน

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $p \in P_n$ มีรากจริงทั้งหมด n ราก แล้ว $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \alpha\right\}\right) = \frac{n}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

บทพิสูจน์. สมมติให้ $p \in P_n$ มีรากจริง n ราก ซึ่งเพียงพอที่จะแสดงสำหรับ $\alpha = 1$

พิจารณาเมื่อ p มีรากต่างกันทั้งหมด โดยให้เป็น $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$

ให้ $p(x) = A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ โดยที่ $A > 0$ ----- (*)

จะได้ว่า

$$p'(x) = A[(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) + (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) + \cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})]$$

$$\therefore \frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{A[(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_n) + \cdots + (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})]}{A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)}$$

$$= \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i}$$

พิจารณา $\lim_{x\to\alpha_i^+} \frac{p'(x)}{p(x)}$, $\lim_{x\to\alpha_i^-} \frac{p'(x)}{p(x)}$ สำหรับ $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ และ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p'(x)}{p(x)}$

(1) $$\lim_{x\to\alpha_i^+} \frac{p'(x)}{p(x)} = \lim_{x\to\alpha_i^+} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i}\right) = \lim_{x\to\alpha_i^+} \left(\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}\right)$$

$$= \lim_{x\to\alpha_i^+} \left(\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_{i-1}}\right) + \lim_{x\to\alpha_i^+} \left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right) + \lim_{x\to\alpha_i^+} \left(\frac{1}{x-\alpha_{i+1}} + \frac{1}{x-\alpha_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\alpha_i-\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_i-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i-1}}\right) + \lim_{x\to\alpha_i^+} \left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right) + \left(\frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i+1}} + \frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i+2}} + \cdots + \frac{1}{\alpha_i-\alpha_n}\right)$$

เนื่องจาก $x - \alpha_i > 0$ เมื่อ $x \to \alpha_i^+$

ดังนั้น $\lim_{x\to\alpha_i^+} \left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right) = +\infty$ ทำให้ได้ว่า $\lim_{x\to\alpha_i^+} \frac{p'(x)}{p(x)} = +\infty$

(2) $$\lim_{x\to\alpha_i^-} \frac{p'(x)}{p(x)} = \lim_{x\to\alpha_i^-} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_i}\right) = \lim_{x\to\alpha_i^-} \left(\frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{x-\alpha_n}\right)$$

$$= \lim_{x \to \alpha_i^-}\left(\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_{i-1}}\right)+\lim_{x \to \alpha_i^-}\left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right)$$

$$+\lim_{x \to \alpha_i^-}\left(\frac{1}{x-\alpha_{i+1}}+\frac{1}{x-\alpha_{i+2}}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha_i-\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_i-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i-1}}\right)+\lim_{x \to \alpha_i^-}\left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i+1}}+\frac{1}{\alpha_i-\alpha_{i+2}}+\cdots+\frac{1}{\alpha_i-\alpha_n}\right)$$

เนื่องจาก $x-\alpha_i<0$ เมื่อ $x \to \alpha_i^-$

ดังนั้น $\lim_{x \to \alpha_i^-}\left(\frac{1}{x-\alpha_i}\right)=-\infty$ ทำให้ได้ว่า $\lim_{x \to \alpha_i^-}\frac{p'(x)}{p(x)}=-\infty$

(3) $\lim_{x \to \pm\infty}\frac{p'(x)}{p(x)}=\lim_{x \to \pm\infty}\left(\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_n}\right)=0$

จะแสดงว่า สำหรับ $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $f_i(x)=\frac{p'(x)}{p(x)}$ เป็นฟังชันลดเมื่อ $x \in (\alpha_i,\alpha_{i+1})$

ให้ $x_1,x_2 \in (\alpha_i,\alpha_{i+1})$ สำหรับ $i \in \{1,2,\dots,n\}$ โดยที่ $x_1<x_2$

จะได้ว่า $\frac{1}{x_1-\alpha_1}+\frac{1}{x_1-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x_1-\alpha_n}>\frac{1}{x_2-\alpha_1}+\frac{1}{x_2-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x_2-\alpha_n}$

ดังนั้น $f_i(x_1)=\frac{p'(x_1)}{p(x_1)}<\frac{p'(x_2)}{p(x_2)}=f_i(x_2)$

จึงสรุปได้ว่า สำหรับ $i \in \{1,2,\dots,n\}$, $f_i(x)=\frac{p'(x)}{p(x)}$ เป็นฟังชันลดเมื่อ $x \in (\alpha_i,\alpha_{i+1})$

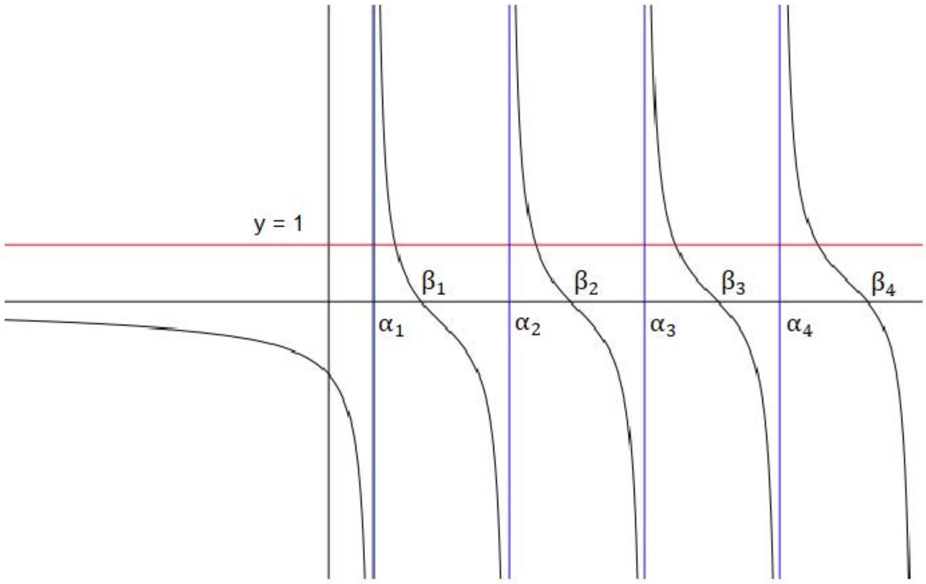
ให้ $\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_n$ เป็นรากจริงของ $p-p'$

จะได้ว่า $p(x)-p'(x)=0$ หรือ $\frac{p'(x)}{p(x)}=1$ เมื่อ $x=\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$

พิจารณากราฟของ $\frac{p'(x)}{p(x)}$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\}=(\alpha_1,\beta_1]\cup(\alpha_2,\beta_2]\cup\dots\cup(\alpha_n,\beta_n]$

$$\therefore m\left(\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\}\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$



จาก (*) แทน $A = 1$

จะได้ว่า $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ เมื่อ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

$\therefore p(x) - p'(x)$
$= (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0) - (nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1)$
$= x^n + (a_{n-1} - n)x^{n-1} + \cdots + (a_0 - a_1)$
$\therefore \sum_{i=1}^{n} \beta_i = -(a_{n-1} - n) = n - a_{n-1}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -a_{n-1}$
ดังนั้น $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\}\right) = n - a_{n-1} - (-a_{n-1}) = n$

พิจารณาเมื่อ p มีรากซ้ำ

กรณี 1 มีรากซ้ำ 2 ตัว คือ $\alpha_1 = \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n$

จะได้ว่า $p(x) = (x - \alpha_1)^2(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \dots (x - \alpha_n)$

$\therefore p'(x) = 2(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_n) +$
$(x - \alpha_1)^2[(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) \dots (x - \alpha_n)]'$

จะได้ว่า $p(\alpha_1) - p'(\alpha_1) = 0$ นั่นคือ $\alpha_1 = \beta_1$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_1, \beta_1] \cup (\alpha_2, \beta_2] \cup \dots \cup (\alpha_n, \beta_n]$

เนื่องจาก $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1$ ทำให้ได้ว่า $(\alpha_1, \beta_1] = \emptyset$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_2, \beta_2] \cup (\alpha_3, \beta_3] \cup \ldots \cup (\alpha_n, \beta_n]$

$$\therefore m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\}\right) = \sum_{i=2}^{n} \beta_i - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$= -(a_{n-1} - n) - (-a_{n-1}) = n$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวสามารถขยายไปสู่กรณีที่มีรากซ้ำอย่างมาก 2 ตัว ที่มากกว่า 1 ชุดได้

กรณี 2 มีรากซ้ำ 3 ตัว คือ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 < \alpha_4 < \cdots < \alpha_n$

จะได้ว่า $p(x) = (x - \alpha_1)^3 (x - \alpha_4)(x - \alpha_5) \ldots (x - \alpha_n)$

$$\therefore p'(x) = 3(x - \alpha_1)^2 (x - \alpha_4)(x - \alpha_5) \ldots (x - \alpha_n) + (x - \alpha_1)^3 [(x - \alpha_4)(x - \alpha_5) \ldots (x - \alpha_n)]'$$

จะได้ว่า $p(\alpha_1) - p'(\alpha_1) = p(\alpha_2) - p'(\alpha_2) = 0$ นั่นคือ $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_1, \beta_1] \cup (\alpha_2, \beta_2] \cup \ldots \cup (\alpha_n, \beta_n]$

เนื่องจาก $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2$ ทำให้ได้ว่า $(\alpha_1, \beta_1] = (\alpha_2, \beta_2] = \emptyset$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_3, \beta_3] \cup (\alpha_4, \beta_4] \cup \ldots \cup (\alpha_n, \beta_n]$

$$\therefore m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\}\right) = \sum_{i=3}^{n} \beta_i - \sum_{i=3}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$= -(a_{n-1} - n) - (-a_{n-1}) = n$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวสามารถขยายไปสู่กรณีที่มีรากซ้ำอย่างมาก 3 ตัว ที่มากกว่า 1 ชุดได้

กรณี 3 มีรากซ้ำ 4 ตัว คือ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 < \alpha_5 < \cdots < \alpha_n$

จะได้ว่า $p(x) = (x - \alpha_1)^4 (x - \alpha_5)(x - \alpha_6) \ldots (x - \alpha_n)$

$$\therefore p'(x) = 4(x - \alpha_1)^3 (x - \alpha_5)(x - \alpha_6) \ldots (x - \alpha_n) + (x - \alpha_1)^4 [(x - \alpha_5)(x - \alpha_6) \ldots (x - \alpha_n)]'$$

จะได้ว่า $p(\alpha_1) - p'(\alpha_1) = p(\alpha_2) - p'(\alpha_2) = p(\alpha_3) - p'(\alpha_3) = 0$

นั่นคือ $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_1, \beta_1] \cup (\alpha_2, \beta_2] \cup \ldots \cup (\alpha_n, \beta_n]$

เนื่องจาก $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$

ทำให้ได้ว่า $(\alpha_1, \beta_1] \cup (\alpha_2, \beta_2] = (\alpha_3, \beta_3] = \emptyset$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_4, \beta_4] \cup (\alpha_5, \beta_5] \cup \ldots \cup (\alpha_n, \beta_n]$

$$\therefore m\left(\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\}\right) = \sum_{i=4}^{n} \beta_i - \sum_{i=4}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$
$$= -(a_{n-1} - n) - (-a_{n-1}) = n$$

ผลลัพธ์ดังกล่าวสามารถขยายไปสู่กรณีที่มีรากซ้ำอย่างมาก 4 ตัว ที่มากกว่า 1 ชุดได้

กรณี n - 1 มีรากซ้ำ n ตัว คือ $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$

เนื่องจาก α_1 เป็นรากของ $p(x)$ จะได้ว่า α_1 เป็นรากของ $p'(x)$ ด้วย

จะได้ว่า α_1 เป็นรากของ $p(x) - p'(x)$ นั่นคือ $\alpha_1 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1}$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_1, \beta_1] \cup (\alpha_2, \beta_2] \cup \ldots \cup (\alpha_n, \beta_n]$

เนื่องจาก $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1}$

ทำให้ได้ว่า $(\alpha_1, \beta_1] = (\alpha_2, \beta_2] = \cdots = (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}] = \emptyset$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\} = (\alpha_n, \beta_n]$

$$\therefore m\left(\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq 1\right\}\right) = \beta_n - \alpha_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$
$$= -(a_{n-1} - n) - (-a_{n-1}) = n$$

บทแทรก 1 ถ้า $\alpha_i \in \mathbb{R}, c_i > 0, i = 1,2,\dots,n$ และ $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$

แล้ว $m\left(\left\{x \in \mathbb{R}: \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x-\alpha_i} \geq \alpha\right\}\right) = \frac{1}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

บทพิสูจน์. สมมติให้ $\alpha_i \in \mathbb{R}, c_i > 0, i = 1,2,\dots,n$ และ $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$

กรณี 1 $c_i \in \mathbb{Q}$ สำหรับ $i = 1,2,\dots,n$

จะมี $a_i, b \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $c_i = \frac{a_i}{b}$ ทุก $i = 1,2,\dots,n$

จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x-\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b(x-\alpha_i)}$

พิจารณา $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b(x-\alpha_i)} \geq \alpha$ โดยที่ $\alpha > 0$

ก็ต่อเมื่อ $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x-\alpha_i} \geq b\alpha$ โดยที่ $\alpha > 0$

จาก $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ จะได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} a_i = b$

ให้ $p(x) = (x-\alpha_1)^{a_1}(x-\alpha_2)^{a_2} \dots (x-\alpha_n)^{a_n}$ โดยที่ $\sum_{i=1}^{n} a_i = b$

จะได้ว่า $\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \frac{a_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{a_n}{x-\alpha_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{x-\alpha_i}$

โดย ทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R}: \frac{p'(x)}{p(x)} \geq b\alpha\right\}\right) = \frac{b}{b\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

กรณี 2 $c_i \in \mathbb{R}$ สำหรับ $i = 1,2,\dots,n$

จะได้ว่าทุก $k \in \mathbb{N}$ จะมีลำดับของจำนวนตรรกยะ $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_n^{(k)} \in \mathbb{Q}$

ซึ่ง $\lim\limits_{k\to\infty} c_i^{(k)} = c_i$ สำหรับ $i = 1,2,\dots,n$

โดยวิธีการ Normalize จะสมมติให้ $c_1^{(k)} + c_2^{(k)} + \cdots + c_n^{(k)} = 1$

จะได้ $1 = \lim\limits_{k\to\infty}[c_1^{(k)} + c_2^{(k)} + \cdots + c_n^{(k)}] = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \sum_{i=1}^{n} c_i$

เนื่องจาก $c_1^{(k)}, c_2^{(k)}, \dots, c_n^{(k)} \in \mathbb{Q}$

จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R}: \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^{(k)}}{x-\alpha_i} \geq \alpha\right\}\right) = \frac{1}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

พิจารณา $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^{(k)}}{x-\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{c_i^{(k)}}{x-\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x-\alpha_i}$

จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R}: \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x-\alpha_i} \geq \alpha\right\}\right) = \frac{1}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

บทตั้ง 1 ถ้า $p \in P_n$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกบนช่วง $[a, b]$ แล้วจะมี $q, s \in P_n$ ที่ไม่เป็นลบบนช่วง $[a, b]$ และมีรากจริงทั้งหมดบนช่วง $[a, b]$ ซึ่ง $p(x) = q(x) + s(x)$

ทฤษฎีบท 2 ให้ $p \in P_n$ จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{2n}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

บทพิสูจน์. ให้ $p \in P_n$ และ $\alpha > 0$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{p'(x)}{p(x)} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{p'(x)}{p(x)} = 0$

$\therefore \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \alpha\right\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต (เนื่องจาก $\alpha > 0$)

$\therefore$ จะมี $a, b \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \alpha\right\} \subseteq [a, b]$

เนื่องจาก $p^2 \in P_{2n}$ เป็นบวกเสมอบนช่วง $[a, b]$

$\therefore$ จะมี $q, s \in P_{2n}$ ที่ไม่เป็นลบบนช่วง $[a, b]$ ที่ $p^2(x) = q(x) + s(x)$

สำหรับ $x \in [a, b]$

จะได้ว่า $0 \leq q(x) \leq p^2(x)$ และ $0 \leq s(x) \leq p^2(x)$

และ q, s มีรากจริงทั้งหมดบนช่วง $[a, b]$

$$\therefore \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \alpha\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(p^2)'(x)}{p^2(x)} \geq 2\alpha\right\}$$

พิจารณา $\frac{(p^2)'(x)}{p^2(x)} \geq 2\alpha$ ก็ต่อเมื่อ $(p^2)'(x) \geq 2\alpha p^2(x)$

นั่นคือ $q'(x) + s'(x) \geq 2\alpha(q(x) + s(x))$

เนื่องจาก q, s มีรากจริงทั้งหมดบนช่วง $[a, b]$ โดย ทฤษฎีบท 1

จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{q'(x)}{q(x)} \geq 2\alpha\right\}\right) = m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{s'(x)}{s(x)} \geq 2\alpha\right\}\right) = \frac{n}{\alpha}$

$\therefore m\left(\left\{x \in [a, b] : \frac{(p^2)'(x)}{p^2(x)} \geq 2\alpha\right\}\right)$

$= m\big(\{x \in [a, b] : q'(x) + s'(x) \geq 2\alpha(q(x) + s(x))\}\big) \leq \frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\alpha} = \frac{2n}{\alpha}$

ทฤษฎีบท 3 ถ้า $r = \frac{p}{q}$ เมื่อ $p, q \in P_n$ จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{r'(x)}{r(x)} \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{8n}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

บทพิสูจน์. สมมติให้ $r = \frac{p}{q}$ เมื่อ $p, q \in P_n$

จะได้ว่า $r' = \left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{qp' - pq'}{q^2}$ ฉะนั้น $\frac{r'}{r} = \left(\frac{qp' - pq'}{q^2}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{p'}{p} - \frac{q'}{q}$

สำหรับ $\alpha > 0$

จะได้ว่า $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{r'(x)}{r(x)} \geq \alpha\right\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{q'(x)}{q(x)} \leq -\frac{\alpha}{2}\right\}$

โดย ทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{4n}{\alpha}$

ให้ $s(x) = q(-x)$

จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{q'(x)}{q(x)} \leq -\frac{\alpha}{2}\right\}\right) = m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{s'(x)}{s(x)} \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \leq \frac{4n}{\alpha}$

$\therefore m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{r'(x)}{r(x)} \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{4n}{\alpha} + \frac{4n}{\alpha} = \frac{8n}{\alpha}$

บทที่ 4
สรุปผล

จากการศึกษาอนุพันธ์เชิงลอการิทึมของฟังก์ชันค่าจริง จะได้ทฤษฎีบทและบทแทรกดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1

ถ้า $p \in P_n$ มีรากจริงทั้งหมด n ราก แล้ว $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \alpha\right\}\right) = \frac{n}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

บทแทรก 1

ถ้า $\alpha_i \in \mathbb{R}, c_i > 0, i = 1,2, \ldots, n$ และ $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$ แล้ว $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x-\alpha_i} \geq \alpha\right\}\right) = \frac{1}{\alpha}$
โดยที่ $\alpha > 0$

บทตั้ง 1

ถ้า $p \in P_n$ ซึ่งมีค่าเป็นบวกบนช่วง $[a, b]$ แล้วจะมี $q, s \in P_n$ ที่ไม่เป็นลบบนช่วง $[a, b]$
และมีรากจริงทุกรากบนช่วง $[a, b]$ ซึ่ง $p(x) = q(x) + s(x)$

ทฤษฎีบท 2

ให้ $p \in P_n$ จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{p'(x)}{p(x)} \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{2n}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

ทฤษฎีบท 3

ถ้า $r = \frac{p}{q}$ เมื่อ $p, q \in P_n$ จะได้ว่า $m\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{r'(x)}{r(x)} \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{8n}{\alpha}$ โดยที่ $\alpha > 0$

รายการอ้างอิง

1. ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2553). **The Twenty–Ninth IMO 1988, Canberra, Australia.** ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 34 รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (1983-1997). หน้า 145-148. กรุงเทพมหานคร: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, และ ยุวรีย์ พันธ์กล้า. (2561). **แคลคูลัส 1 (CALCULUS I).** กรุงเทพมหานคร: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. Borwein, P. and Erdélyi, T. (1995). **Inequalities for Logarithmic Derivatives.** In Polynomials and Polynomial inequalities. Pp. 344-347. New York: Springer-Verlag

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Inequalities for Logarithmic Derivatives
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุจินต์ คมฤทัย
ผู้ดำเนินการ	นายติณณ์ รุ่นใหม่ เลขประจำตัวนิสิต 5833519023
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
	คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง อสมการในรูป $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq \alpha$ โดย $\alpha > 0$ เป็นค่าคงตัว ได้รับความสนใจและมีการศึกษาในวงกว้าง สังเกตว่าพจน์ $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx}\ln f(x)$ ดังนั้นพจน์ดังกล่าวนี้จึงมีชื่อเรียกว่า อนุพันธ์เชิงลอการิทึม (Logarithmic Derivatives) ของฟังก์ชัน f เป็นที่ทราบกันว่าเซตของผลเฉลยของอสมการดังกล่าวในกรณีที่ f เป็นพหุนาม ประกอบด้วยช่วงที่มีผลรวมของความยาวช่วงน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{2n}{\alpha}$ และในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันเศษส่วนของพหุนาม ประกอบด้วยช่วงที่มีผลรวมของความยาวช่วงน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{8n}{\alpha}$

วัตถุประสงค์

ศึกษาอสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึม ในกรณีพหุนามและเศษส่วนพหุนาม

ขอบเขตของโครงงาน

พิสูจน์อสมการสำหรับอนุพันธ์เชิงลอการิทึมของฟังก์ชันค่าจริง f โดยเป็นอสมการในรูป $\frac{f'(x)}{f(x)} \geq \alpha$ โดย $\alpha > 0$ เป็นค่าคงตัว และ f เป็นฟังก์ชันพหุนามหรือฟังก์ชันตรรกยะ

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. กำหนดบทนิยามต่างๆ
3. พิสูจน์ทฤษฎีบทของโครงงาน
4. สรุปผลและจัดทำรายงาน

ระยะเวลาการทำงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน	2561					2562			
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้อง									
2. กำหนดบทนิยามต่างๆ									
3. พิสูจน์ทฤษฎีบทของโครงงาน									
4. สรุปผลและจัดทำรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้นำความรู้จากวิชาแคลคูลัสและการวิเคราะห์เชิงจริงเบื้องต้นไปแก้ปัญหาในเชิงงานวิจัย

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. เครื่องคอมพิวเตอร์
2. เครื่องพิมพ์
3. กระดาษ
4. เครื่องเขียน

งบประมาณ

1. ค่ากระดาษ A4 600 บาท
2. ค่าถ่ายเอกสารและจัดทำรูปเล่ม 400 บาท
3. ค่าวารสารและหนังสืออ้างอิงที่เกี่ยวข้อง 3,000 บาท

เอกสารอ้างอิง

1. ดำรงค์ ทิพย์โยธา. (2553). **The Twenty–Ninth IMO 1988, Canberra, Australia.** ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 34 รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (1983-1997). หน้า 145-148. กรุงเทพมหานคร: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ดำรงค์ ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ, และ ยุวรีย์ พันธ์กล้า. (2561). **แคลคูลัส 1 (CALCULUS I).** กรุงเทพมหานคร: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. Borwein, P. and Erdélyi, T. (1995). **Inequalities for Logarithmic Derivatives.** In Polynomials and Polynomial inequalities. Pp. 344-347. New York: Springer-Verlag

ประวัติผู้เขียน

นายติณณ์ รุ่นใหม่ รหัสนิสิต 5833519023
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย