โครงการ
การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ปัญหาการลงสีบนกราฟภายใต้เงื่อนไขการเกิดรุ้ง
Colouring Problems on Graphs under Condition of Existence of Rainbows

ชื่อนิสิต นางสาวกุลสินี บุญถนอม 583 35046 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปัญหาการลงสีบนกราฟภายใต้เงื่อนไขการเกิดรุ้ง

นางสาวกุลสินี บุญถนอม

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561

Colouring Problems on Graphs under Condition of Existence of Rainbows

Kunsinee Boonthanom

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics

Department of Mathematics and Computer Science

Faculty of Science

Chulalongkorn University

Academic Year 2018

หัวข้อโครงงาน ปัญหาการลงสีบนกราฟภายใต้เงื่อนไขการเกิดรุ้ง

โดย นางสาวกุลสินี บุญถนอม

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่ง ของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พงษ์เดช มนทกานติรัตน์)

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

กุลสินี บุญถนอม : ปัญหาการลงสีบนกราฟภายใต้เงื่อนไขการเกิดรุ้ง (Colouring Problems on Graphs under Condition of Existence of Rainbows) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ, 34 หน้า.

ในโครงงานนี้เรานับจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดและนับจำนวนวิธีในการลงสีด้านของกราฟที่มีลักษณะเฉพาะแบบหนึ่งภายใต้เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับรุ้ง ซึ่งเป็นสามเหลี่ยมที่จุดยอดทุกจุด [ด้านทุกด้าน] มีสีต่างกัน

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต กุลสินี บุญถนอม
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ
ปีการศึกษา 2561

5833504623: MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : GRAPH COLOURING / RAINBOW

KUNSINEE BOONTHANOM: COLOURING PROBLEMS ON GRAPHS UNDER CONDITION OF EXISTENCE OF RAINBOWS.

ADVISOR : ASST.PROF.TEERAPHONG PHONGPATTANACHAROEN, Ph.D., 34 pp.

In this project, we count the number of ways to colour vertices and the number of ways to colour edges of a certain class of graphs concerning rainbows, which are triangles whose vertices [edges] are coloured with three distinct colours.

Department :Mathematics and Computer Science Student's Signature กุลสินี บุญถนอม

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ

Academic Year : 2018

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง “ปัญหาการลงสีบนกราฟ” สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานโครงงานจึงใคร่ขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญที่กรุณารับเป็นที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้คำปรึกษา ชี้ให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานมาตลอดตั้งแต่เริ่มต้นจนทำให้โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงอย่างสมบูรณ์และนอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำตลอดระยะเวลาที่เข้ามาศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย รวมทั้งเพื่อน ๆ ที่คอยให้ความช่วยเหลือ

สุดท้ายนี้หวังว่าโครงงานของข้าพเจ้าจะเป็นประโยชน์แก่ผู้ที่สนใจไม่มากก็น้อย และหากมีความผิดพลาดประการใดก็ขออภัยมา ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

สารบัญตาราง

หน้า

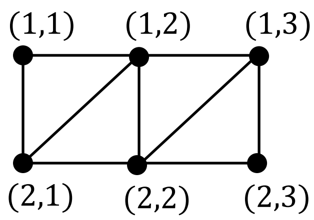
บทที่ 1
บทนำ

ปัญหาการลงสีบนกราฟเริ่มมีการศึกษาในปี ค.ศ. 1852 โดย Francis Guthrie [3] ได้สังเกตเห็นว่าเราสามารถใช้สีเพียงสี่สีก็เพียงพอในการระบายแผนที่โดยไม่ให้พื้นที่ที่มีเส้นเขตแดนร่วมกันมีสีเดียวกัน ซึ่งต่อมาข้อความข้างต้นได้รับการพิสูจน์และกลายเป็นทฤษฎีบทที่เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในชื่อ The four colour theorem

ในโครงงานนี้เราได้ทำการค้นคว้างานวิจัยเกี่ยวกับปัญหาการลงสีบนกราฟแบบหนึ่งเรียกว่า การลงสีของกัลไล (Gallai colouring) [1], [2] โดยที่การลงสีของกัลไลเป็นการลงสีบนด้านของกราฟโดยที่ไม่มีสามเหลี่ยมใดในกราฟที่ใช้สีต่างกันทั้งสามด้าน โดยเราได้ทำการศึกษาปัญหาดังกล่าวบนกราฟที่มีลักษณะเฉพาะแบบหนึ่งซึ่งเราให้นิยามตามบทนิยาม 1.1 ทั้งนี้เรายังได้ศึกษาปัญหาการลงสีลักษณะดังกล่าวบนเซตของจุดยอดเช่นกัน

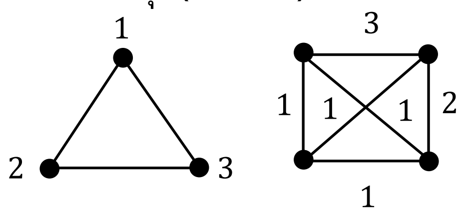
บทนิยาม 1.1 สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ กำหนดให้ $\Gamma_n = (V, E)$ เป็นกราฟที่มี
$V = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,n), (2,1), (2,2), \dots, (2,n)\}$ และ
$E = \left\{\{(a,b),(c,d)\} \in \binom{V}{2} : |a-c| + |b-d| = 1 \text{ หรือ } (a-c)(b-d) = -1\right\}$
เมื่อ $\binom{V}{2}$ คือเซตของเซตย่อยที่มีขนาด 2 ของเซต V

ตัวอย่าง 1.1 เราสามารถวาดกราฟของ Γ_3 ได้ดังนี้



ภาพที่ 1.1 กราฟ Γ_3

บทนิยาม 1.2 เราจะเรียกสามเหลี่ยมใด ๆ ที่ถูกลงสีบนจุดยอด [ด้าน] แล้วจุดยอดทุกจุด [ด้านทุกด้าน] ของสามเหลี่ยมนั้นมีสีแตกต่างกันว่า**รุ้ง (rainbow)**



ภาพที่ 1.2 ตัวอย่างกราฟและการลงสีที่ทำให้เกิดรุ้ง

ในการศึกษาปัญหาการลงสีนี้เราเรียกการลงสีบนจุดยอด [ด้าน] ของกราฟใด ๆ โดยที่ไม่เกิดรุ้งว่าการลงสีจุดยอด [ด้าน] แบบ g และเรากำหนดให้ $g_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดแบบ g บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สี ซึ่งได้ผลตามทฤษฎีบท 1.1 และกำหนดให้ $\overline{g}_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีด้านแบบ g บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สี ซึ่งได้ผลตามทฤษฎีบท 1.2

ทฤษฎีบท 1.1 สำหรับจำนวนนับ n และ k ใด ๆ โดยที่ $k \geq 3$ จะได้ว่า

$$g_{n,k} = \frac{k(k-1-\sqrt{k-1})}{2(k-2)}\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^n + \frac{k(k-1+\sqrt{k-1})}{2(k-2)}\left(k-2\sqrt{k-1}\right)^n$$

$$+\frac{\left(\sqrt{k-1}-1\right)k}{2k-4}\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^n + \frac{\left(1+\sqrt{k-1}\right)k}{4-2k}\left(k-2\sqrt{k-1}\right)^n$$

ทฤษฎีบท 1.2 สำหรับจำนวนนับ n และ k ใด ๆ จะได้ว่า $\overline{g}_{n,k} = k(3k-2)^{2(n-1)}$

เราเรียกการลงสีบนจุดยอด [ด้าน] ของกราฟที่ทำให้สามเหลี่ยมใด ๆ ในกราฟนั้นเป็นรุ้งเสมอว่าการลงสีแบบ r ทั้งนี้เรากำหนดให้ $r_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดแบบ r บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สีซึ่งได้ผลตามทฤษฎีบท 1.3 และ $\overline{r}_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีด้านแบบ r บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สี ซึ่งได้ผลตามทฤษฎีบท 1.4

ทฤษฎีบท 1.3 สำหรับจำนวนนับ $n \geq 2$ และ $k \geq 3$ ใด ๆ จะได้ว่า $r_{n,k} = k(k-1)(k-2)^{2(n-1)}$

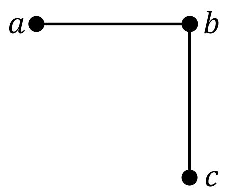
ทฤษฎีบท 1.4 สำหรับจำนวนนับ $n \geq 2$ และ $k \geq 3$ ใด ๆ จะได้ว่า $\overline{r}_{n,k} = k[(k-1)(k-2)]^{2(n-1)}$

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงนิยามและความรู้พื้นฐานเบื้องต้นที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟ โดยเฉพาะในส่วนที่เกี่ยวกับปัญหาการลงสี

บทนิยาม 2.1 กราฟ G คือคู่อันดับ (V, E) โดยที่ V แทนเซตจำกัดซึ่งไม่เป็นเซตว่างและ E แทนเซตของเซตย่อยของ V ที่มีขนาดเท่ากับสอง โดยเราเรียกสมาชิกใน V ว่า**จุดยอด (vertex)** และเรียกสมาชิกใน E ว่า**ด้าน (edge)**

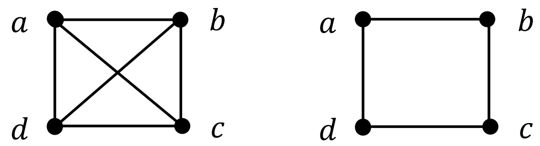
ตัวอย่างที่ 2.1 $G = (V, E)$ เป็นกราฟ โดยที่ $V = \{a, b, c\}$ และ $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$
จะได้กราฟ G เป็นดังนี้



ภาพที่ 2.1 ตัวอย่างกราฟ G

บทนิยาม 2.2 ให้ $G = (V_1, E_1)$ และ $H = (V_2, E_2)$ เป็นกราฟ จะกล่าวว่ากราฟ H เป็น**กราฟย่อย (subgraph)** ของ G ถ้า $V_2 \subseteq V_1$ และ $E_2 \subseteq E_1$

ตัวอย่างที่ 2.2 ให้กราฟ G และ H เป็นดังนี้



กราฟ G กราฟ H

ภาพที่ 2.2 กราฟ H เป็นกราฟย่อยของ G

จะได้ว่ากราฟ H เป็นกราฟย่อยของกราฟ G

บทนิยาม 2.3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ K_n แทนกราฟที่มี n จุดยอดและจุดยอดสองจุดใด ๆ มีด้านเชื่อมเสมอ เราจะเรียกกราฟชนิดนี้ว่า**กราฟบริบูรณ์ (complete graph)**

K_3 K_4

ภาพที่ 2.3 ตัวอย่างกราฟบริบูรณ์

กฎการนับ

1.กฎการคูณ

ถ้างานอย่างหนึ่งสามารถทำให้เสร็จได้ใน k ขั้นตอน โดยที่

ขั้นตอนที่ 1 มีวิธีการทำงาน n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีวิธีการทำงาน n_2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 มีวิธีการทำงาน n_3 วิธี

$\vdots$ $\vdots$

ขั้นตอนที่ k มีวิธีการทำงาน n_k วิธี

แล้วจะได้ว่าจำนวนวิธีการทำงานนี้เท่ากับ $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2.3 มีกางเกงที่แตกต่างกัน 2 ตัวและมีเสื้อต่างกัน 2 ตัว เราจะมีวิธีการแต่งตัวที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จะเห็นว่ามีการทำงาน 2 ขั้นตอนคือขั้นการเลือกกางเกงและขั้นตอนเลือกเสื้อ โดยในขั้นตอนแรกเราสามารถเลือกกางเกงได้ 2 วิธีและในขั้นที่สองเราสามารถเลือกเสื้อได้ 2 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดในการทำงานหรือจำนวนวิธีในการแต่งตัวทั้งหมดเท่ากับ 2 × 2 = 4 วิธี

2. กฎการบวก

ในการทำงานอย่างหนึ่งมีวิธีการทำ k วิธี คือวิธีที่ 1 ถึง วิธีที่ k โดย

การทำงานวิธีที่ 1 สามารถทำได้ n_1 วิธี

การทำงานวิธีที่ 2 สามารถทำได้ n_2 วิธี

$\vdots \qquad \vdots$

การทำงานวิธีที่ k สามารถทำได้ n_k วิธี

และวิธีการทำงานแต่ละวิธีแตกต่างกัน แล้วจำนวนวิธีทำงานนี้เท่ากับ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 2.4 ถ้าต้องการเดินทางไปเชียงใหม่ ซึ่งสามารถไปได้โดยรถทัวร์ รถไฟและเครื่องบิน ถ้าในแต่ละวันมีรถทัวร์ไปเชียงใหม่ 5 เที่ยว รถไฟ 3 เที่ยว และเครื่องบิน 4 เที่ยว มีวิธีในการเดินทางไปเชียงใหม่ได้แตกต่างกันกี่วิธี

วิธีทำ เลือกเดินทางโดยรถทัวร์ได้ 5 วิธี และเลือกเดินทางโดยรถไฟ 3 วิธี และสุดท้ายเลือกเดินทางโดยเครื่องบิน 4 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีในการเดินทางไปเชียงใหม่มีทั้งหมด 5+3+4=10 วิธี

ตัวอย่างที่ 2.5 มีเลขโดด 10 ตัว ได้แก่ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 นำมาสร้างจำนวนคู่ที่มีสามหลักได้กี่วิธี

วิธีทำ เห็นได้ว่าเราสามารถแบ่งกลุ่มจำนวนคู่ที่มีสามหลักออกมาได้เป็น 2 กลุ่ม

กลุ่มที่ 1 คือเลขสามหลักที่มีหลักหน่วยเป็น 0 ซึ่งเลือกหลักหน่วยได้ 1 วิธี เลือกหลักสิบได้ 10 วิธี และเลือกหลักร้อยได้ 9 วิธี ดังนั้นขั้นตอนที่ 1 สามารถทำได้ 1×10×9=90 วิธี

กลุ่มที่ 2 คือเลขสามหลักที่มีหลักหน่วยไม่เป็น 0 ซึ่งเลือกหลักหน่วยได้ 4 วิธี เลือกหลักสิบได้ 10 วิธี และเลือกหลักร้อยได้ 9 วิธี ดังนั้นขั้นตอนที่ 2 สามารถทำได้ 4×10×9=360 วิธี

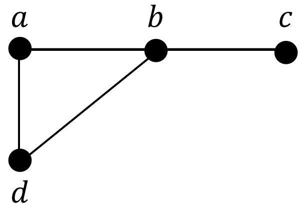
ดังนั้นสามารถสร้างจำนวนคู่ที่มีสามหลักได้ทั้งหมด 90+360=450 วิธี

การลงสีกราฟ

บทนิยาม 2.4 ให้ K เป็นเซตไม่ว่างขนาดจำกัดและ $G = (V, E)$ เป็นกราฟ เราจะเรียก $f : V \longrightarrow K$ ว่าการลงสีจุดยอดของ G และเรียก $g : E \longrightarrow K$ ว่าการลงสีด้านของ G

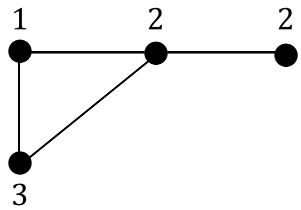
เพื่อความสะดวกเราจะให้ $K = \{1, 2, \ldots, k\}$ โดยที่ k เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่างที่ 2.6 ให้ $G = (V, E)$ เป็นกราฟดังรูป



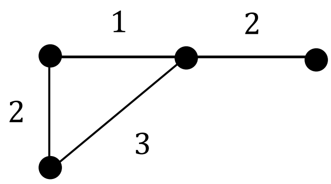
ภาพที่ 2.4 กราฟ $G = (V, E)$

ถ้าให้ $f : V \longrightarrow \{1, 2, 3,4\}$ โดย $f(a) = 1, f(b) = f(c) = 2$ และ $f(d) = 3$
เราจะได้ว่า f เป็นการลงสีจุดยอดของ G ซึ่งสามารถแสดงเป็นภาพ (โดยตัดชื่อของจุดยอดออก) ได้ดังนี้



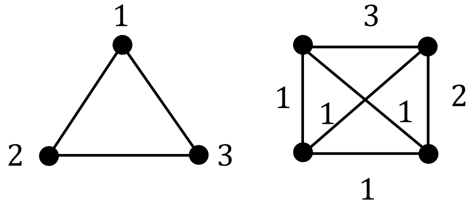
ภาพที่ 2.5 แสดงการลงสีจุดยอดของกราฟ

และถ้าให้ $g : E \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ โดยที่ $g(\{a, b\}) = 1, g(\{b, c\}) = g(\{a, d\}) = 2$ และ$(\{d, b\}) = 3$
เราจะได้ว่า g เป็นการลงสีด้านของ G ซึ่งสามารถแสดงเป็นภาพ (โดยตัดชื่อของจุดยอดออก) ได้ดังนี้



ภาพที่ 2.6 แสดงการลงสีด้านของกราฟ

บทนิยาม 2.5 เราจะเรียกสามเหลี่ยมใด ๆ ที่ถูกลงสีบนจุดยอด [ด้าน] แล้วจุดยอดทุกจุด [ด้านทุกด้าน] ของสามเหลี่ยมนั้นมีสีแตกต่างกันว่า**รุ้ง (rainbow)**



ภาพที่ 2.7 ตัวอย่างกราฟและการลงสีที่ทำให้เกิดรุ้ง

บทที่ 3
ปัญหาการลงสีบนกราฟ

ในบทนี้เราจะหาจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดและจำนวนวิธีในการลงสีด้านบนกราฟ Γ_n โดยไม่เกิดรุ้งและแบบที่เกิดรุ้งเสมอ ทั้งนี้เพื่อความสะดวกเราจะเรียกการลงสีบนจุดยอด [ด้าน] ของ Γ_n โดยที่ไม่เกิดรุ้งว่าการลงสีจุดยอด [ด้าน] แบบ g และเรียกการลงสีบนจุดยอด [ด้าน] ของ Γ_n ที่ทำให้สามเหลี่ยมใด ๆ ในกราฟนั้นเป็นรุ้งเสมอว่าการลงสีจุดยอด [ด้าน] แบบ r

สำหรับจำนวนนับ n และ k ใด ๆ

ให้ $g_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดแบบ g โดยใช้สีไม่เกิน k สี

$\overline{g}_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีด้านแบบ g โดยใช้สีไม่เกิน k สี

$r_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดแบบ r โดยใช้สีไม่เกิน k สี

$\overline{r}_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีด้านแบบ r โดยใช้สีไม่เกิน k สี

3.1 การหา $g_{n,k}$

ในกรณี $k=1$ และ $k=2$ เห็นได้ชัดว่า $g_{n,1}=1$ และ $g_{n,2}=4^n$ ในหัวข้อนี้เราจึงทำการหาสูตรแบบปิดของ $g_{n,k}$ ในกรณีที่ $k \geq 3$ ดังแสดงในทฤษฎีบท 3.1.1

ทฤษฎีบท 3.1.1 สำหรับจำนวนนับ $n \geq 2$ และ k ใด ๆ ถ้า $a_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดแบบ g บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สี โดยที่จุดยอด $(1,n)$ และ $(2,n)$ มีสีต่างกัน และ $b_{n,k}$ แทนจำนวนวิธีในการลงสีจุดยอดแบบ g บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สี โดยที่จุดยอด $(1,n)$ และ $(2,n)$ มีสีเหมือนกัน

แล้วจะได้ว่า 1. $g_{n,k}=a_{n,k}+b_{n,k}$ (1)

2. $a_{n,k}=ka_{n-1,k}+2(k-1)b_{n-1,k}$ (2)

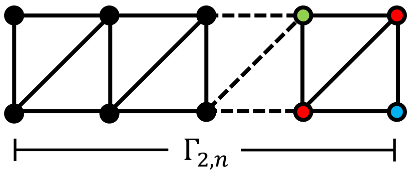
3. $b_{n,k}=2a_{n-1,k}+kb_{n-1,k}$ (3)

บทพิสูจน์ สำหรับจำนวนนับ n และ k ใด ๆ กำหนดให้ $A_{n,k}$ แทนเซตของการลงสีจุดยอดแบบ g บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สี โดยที่จุดยอด $(1,n)$ และ $(2,n)$ มีสีต่างกันและให้ $B_{n,k}$ แทนเซตของการลงสีจุดยอดแบบ g บนกราฟ Γ_n โดยใช้สีไม่เกิน k สี โดยที่จุดยอด $(1,n)$ และ $(2,n)$ มีสีเหมือนกัน ดังนั้น $a_{n,k}=|A_{n,k}|$ และ $b_{n,k}=|B_{n,k}|$ และเห็นได้ชัดว่า $g_{n,k}=a_{n,k}+b_{n,k}$

ในขั้นต่อไปเราจะแสดงว่า $a_{n,k} = ka_{n-1,k} + 2(k-1)b_{n-1,k}$ และ $b_{n,k} = 2a_{n-1,k} + kb_{n-1,k}$

โดยเราจะเริ่มที่การแสดงว่า $a_{n,k} = ka_{n-1,k} + 2(k-1)b_{n-1,k}$
กำหนดให้ $C = \{f \in A_{n,k} : f(1,n-1) \neq f(2,n-1)\}$ และ
$D = \{f \in A_{n,k} : f(1,n-1) = f(2,n-1)\}$

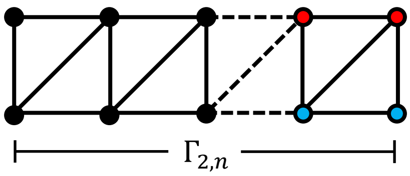
ในการหาขนาดของ C เราจะแบ่งเซต C เป็นสองเซตย่อย โดยพิจารณาว่าจุดยอด $(2,n-1)$ มีสีเหมือนกับจุดยอด $(1,n)$ หรือมีสีเหมือนจุดยอด $(2,n)$ โดยกำหนดให้
$C_1 = \{f \in C : f(2,n-1) = f(1,n)\}$



ภาพที่ 3.1.1 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต C_1

ซึ่งจะได้ว่า $|C_1| = (k-1)a_{n-1,k}$

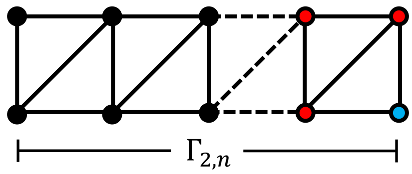
ต่อไปเราให้ $C_2 = \{f \in C : f(2,n-1) = f(2,n)\}$ ดังนั้นถ้า $f \in C_2$ แล้ว $f(2,n-1) \neq f(1,n)$ และ $f(2,n-1) \neq f(1,n-1)$ และเพราะว่า f เป็นการลงสีแบบ g ทำให้ $f(1,n-1) = f(1,n)$ จึงได้ว่า ถ้า $f \in C_2$ แล้ว $f(2,n-1) = f(2,n)$ และ
$f(1,n-1) = f(1,n)$



ภาพที่ 3.1.2 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต C_2

ซึ่งจะได้ว่า $|C_2| = |A_{n-1,k}| = a_{n-1,k}$
เพราะว่า $C = C_1 \dot\cup C_2$ ดังนั้น $|C| = |C_1| + |C_2| = (k-1)a_{n-1,k} + a_{n-1,k} = ka_{n-1,k}$

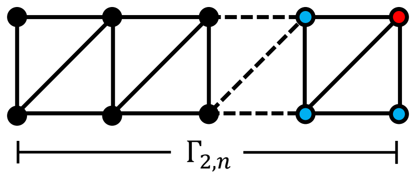
ต่อไปจะทำการหาขนาดของ D เราจะแบ่งเซต D เป็นสองเซตย่อย โดยพิจารณาว่าจุดยอด $(2,n-1)$ มีสีเหมือนกับจุดยอด $(1,n)$ หรือมีสีเหมือนจุดยอด $(2,n)$ โดยกำหนดให้
$D_1 = \{f \in D : f(2,n-1) = f(1,n)\}$ ดังนั้นถ้า $f \in D_1$ จะได้ว่า
$f(1,n-1) = f(2,n-1) = f(1,n) \neq f(2,n)$



ภาพที่ 3.1.3 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต D_1

ซึ่งจะได้ว่า $|D_1| = (k-1)b_{n-1,k}$

ต่อไปให้ $D_2 = \{f \in D : f(2,n-1) = f(2,n)\}$ ดังนั้นถ้า $f \in D_2$ จะได้ว่า $f(1,n-1) = f(2,n-1) = f(2,n) \neq f(1,n)$



ภาพที่ 3.1.4 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต D_2

ซึ่งจะได้ว่า $|D_2| = (k-1)b_{n-1,k}$ เช่นกัน

เพราะว่า $D = D_1 \dot\cup D_2$ ดังนั้น

$|D| = |D_1| + |D_2| = (k-1)b_{n-1,k} + (k-1)b_{n-1,k} = 2(k-1)b_{n-1,k}$

และเนื่องจาก $A = C \dot\cup D$ ดังนั้น $|A_{n,k}| = |C| + |D|$ จึงได้ว่า

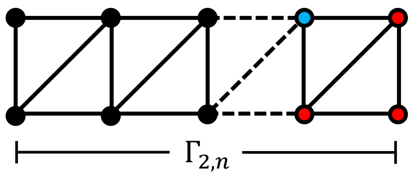
$a_{n,k} = ka_{n-1,k} + 2(k-1)b_{n-1,k}$

ต่อไปจะแสดงว่า $b_{n,k} = 2a_{n-1,k} + kb_{n-1,k}$ โดยให้

$E = \{f \in B_{n,k} : f(1,n-1) \neq f(2,n-1)\}$ และ

$F = \{f \in B_{n,k} : f(1,n-1) = f(2,n-1)\}$

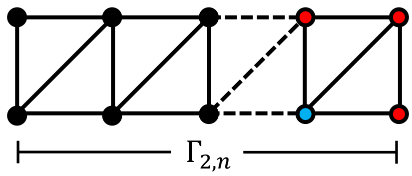
ในการหาขนาดของ E เราจะแบ่งเซต E เป็นสองเซตย่อย โดยพิจารณาว่าจุดยอด $(2,n-1)$ และ $(1,n)$ มีสีเดียวกันหรือไม่ โดยกำหนดให้ $E_1 = \{f \in E : f(2,n-1) = f(1,n)\}$ ดังนั้นถ้า $f \in E_1$ จะได้ว่า $f(2,n-1) = f(2,n) = f(1,n) \neq f(1,n-1)$



ภาพที่ 3.1.5 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต E_1

ซึ่งจะได้ว่า $|E_1| = |A_{n-1,k}| = a_{n-1,k}$

ต่อไปให้ $E_2 = \{f \in E : f(2, n-1) \neq f(1, n)\}$ และเพราะว่า f เป็นการลงสีแบบ g ทำให้ $f(1, n-1) = f(1, n)$ จึงได้ว่า ถ้า $f \in E_2$ แล้ว
$f(2, n-1) \neq f(2, n) = f(1, n) = f(1, n-1)$

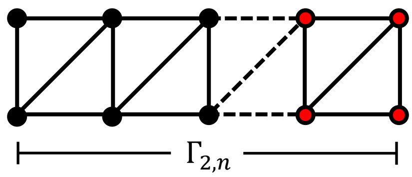


ภาพที่ 3.1.6 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต E_2

ซึ่งจะได้ว่า $|E_2| = |A_{n-1,k}| = a_{n-1,k}$

เพราะว่า $E = E_1 \dot{\cup} E_2$ ดังนั้น $|E| = |E_1| + |E_2| = a_{n-1,k} + a_{n-1,k} = 2a_{n-1,k}$

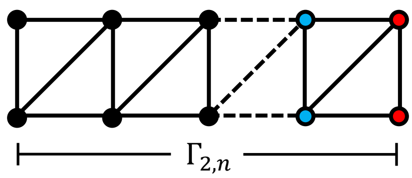
ต่อไปจะทำการหาขนาดของ F เราจะแบ่งเซต F เป็นสองเซตย่อย โดยพิจารณาว่าจุดยอด $(2, n-1)$ และ $(1, n)$ มีสีเดียวกันหรือไม่ โดยกำหนดให้ $F_1 = \{f \in F : f(2, n-1) = f(1, n)\}$ ดังนั้นถ้า $f \in F_1$ จะได้ว่า $f(1, n-1) = f(2, n-1) = f(1, n) = f(2, n)$



ภาพที่ 3.1.7 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต F_1

ซึ่งจะได้ว่า $|F_1| = |B_{n-1,k}| = b_{n-1,k}$

ต่อไปให้ $F_2 = \{f \in F : f(2, n-1) \neq f(1, n)\}$ ดังนั้นถ้า $f \in F_2$ จะได้ว่า
$f(1, n-1) = f(2, n-1)$ และ $f(1, n) = f(2, n)$



ภาพที่ 3.1.8 แสดงรูปแบบการลงสีของเซต F_2

ซึ่งจะได้ว่า $|F_2| = (k-1)b_{n-1,k}$

เพราะว่า $F = F_1 \dot{\cup} F_2$ ดังนั้น $|F| = |F_1| + |F_2| = b_{n-1,k} + (k-1)b_{n-1,k} = kb_{n-1,k}$

และเนื่องจาก $B = E \dot{\cup} F$ ดังนั้น $|B_{n,k}| = |E| + |F|$ จึงได้ว่า $b_{n,k} = 2a_{n-1,k} + kb_{n-1,k}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $a_{n,k} = ka_{n-1,k} + 2(k-1)b_{n-1,k}$ และ $b_{n,k} = 2a_{n-1,k} + kb_{n-1,k}$

□

จากทฤษฎีบท 3.1.1 จะทำการหารูปทั่วไปของ $g_{n,k}$ โดยหา $a_{1,k}, a_{2,k}$, $b_{1,k}$ และ $b_{2,k}$ เพื่อใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการแก้สมการ

1. หา $\boldsymbol{a_{1,k}}$

พิจารณา Γ_1 สามารถลงสีจุดยอด $(1,1)$ ได้ k วิธี และเนื่องจากต้องการลงสีให้จุดยอดหลักที่ n มีสีต่างกันจึงสามารถลงสีจุดยอด $(2,1)$ ได้ $k-1$ วิธี ดังนั้น $a_{1,k} = k(k-1)$ (4)

2. หา $\boldsymbol{b_{1,k}}$

พิจารณา Γ_1 สามารถลงสีจุดยอด $(1,1)$ ได้ k วิธีและเนื่องจากต้องการลงสีให้จุดยอดหลักที่ n มีสีเหมือนกันจึงสามารถลงสีจุดยอด $(2,1)$ ได้ 1 วิธี ดังนั้น $b_{1,k} = k$ (5)

3. หา $\boldsymbol{a_{2,k}}$

จาก (2) ในทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a_{2,k} &= ka_{1,k} + 2(k-1)b_{1,k} \\ &= k \cdot k(k-1) + 2(k-1) \cdot k \\ &= k(k-1)(k+2) \end{aligned} \tag{6}$$

4. หา $\boldsymbol{b_{2,k}}$

จาก (3) ในทฤษฎีบท 3.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} b_{2,k} &= 2a_{n-1,k} + kb_{n-1,k} \\ &= 2 \cdot k(k-1) + k \cdot k \\ &= k(3k-2) \end{aligned} \tag{7}$$

ทฤษฎีบท 3.1.2 สำหรับจำนวนนับ n และ $k \geq 3$ ใด ๆ จะได้ว่า $g_{n,k} = a_{n,k} + b_{n,k}$ โดยที่

$$a_{n,k} = \frac{k(k-1-\sqrt{k-1})}{2(k-2)}\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^n + \frac{k(k-1+\sqrt{k-1})}{2(k-2)}\left(k-2\sqrt{k-1}\right)^n$$

$$b_{n,k} = \frac{(\sqrt{k-1}-1)k}{2k-4}\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^n + \frac{(1+\sqrt{k-1})k}{4-2k}\left(k-2\sqrt{k-1}\right)^n$$

บทพิสูจน์ หารูปทั่วไปของ $\boldsymbol{a_{n,k}}$

จาก (2) $\qquad b_{n-1,k} = \dfrac{a_{n,k}}{2(k-1)} - \dfrac{k}{2(k-1)} a_{n-1,k} \qquad (8)$

จะได้ $\qquad b_{n,k} = \dfrac{a_{n+1,k}}{2(k-1)} - \dfrac{k}{2(k-1)} a_{n,k} \qquad (9)$

แทน (9) ลงใน (3) $\qquad \dfrac{a_{n+1,k}}{2(k-1)} - \dfrac{k}{2(k-1)} a_{n,k} = 2a_{n-1,k} + kb_{n-1,k}$

จาก (8) จะได้ $\qquad \dfrac{a_{n+1,k}}{2(k-1)} - \dfrac{k}{2(k-1)} a_{n,k} = 2a_{n-1,k} + \left[\dfrac{ka_{n,k}}{2(k-1)} - \dfrac{k^2}{2(k-1)} a_{n-1,k}\right]$

$$\frac{a_{n+1,k}}{2(k-1)} - \frac{2k}{2(k-1)} a_{n,k} - \left(2 - \frac{k^2}{2(k-1)}\right) a_{n-1,k} = 0$$

$$a_{n+1,k} - 2ka_{n,k} - [4(k-1) - k^2]a_{n-1,k} = 0$$

จะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ $\quad r^2 - 2kr - [4(k-1) - k^2] = 0$

เมื่อแก้สมการหาค่า r จะได้ $\quad r = k \pm 2\sqrt{k-1}$

และผลเฉลยของสมการจะอยู่ในรูป

$$a_{n,k} = \alpha_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right)^n + \alpha_2\left(k - 2\sqrt{k-1}\right)^n$$ โดยที่ α_1 และ α_2 เป็นค่าคงตัว

ต่อไปเราจะหาค่า α_1 และ α_2 จากปัญหาค่าเริ่มต้นของ $a_{n,k}$
จาก (4) และ (6) จะได้

$$\alpha_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right) + \alpha_2\left(k - 2\sqrt{k-1}\right) = k(k-1) \qquad (10)$$

$$\alpha_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right)^2 + \alpha_2\left(k - 2\sqrt{k-1}\right)^2 = k(k-1)(k+2) \qquad (11)$$

ตามลำดับ

คูณ (10) ด้วย $k + 2\sqrt{k-1}$ จะได้

$$\alpha_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right)^2 + \alpha_2\left(k^2 - 4(k-1)\right) = k(k-1)\left(k + 2\sqrt{k-1}\right) \qquad (12)$$

(11) – (12) จะได้

$$\left(\left(k - 2\sqrt{k-1}\right)^2 - \left(k^2 - 4(k-1)\right)\right)\alpha_2 = k(k-1)\left((k+2) - \left(k + 2\sqrt{k-1}\right)\right)$$

$$\left(k^2 - 4k\sqrt{k-1} + 4(k-1) - k^2 + 4(k-1)\right)\alpha_2 = k(k-1)\left(2 - 2\sqrt{k-1}\right)$$

$$\left(8(k-1)-4k\sqrt{k-1}\right)\alpha_2 = 2k(k-1)\left(1-\sqrt{k-1}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2k(k-1)\left(1-\sqrt{k-1}\right)}{8(k-1)-4k\sqrt{k-1}} = \frac{k(k-1)\left(1-\sqrt{k-1}\right)}{4(k-1)-2k\sqrt{k-1}} = \frac{k\left(k-1+\sqrt{k-1}\right)}{2(k-2)}$$

คูณ (10) ด้วย $k-2\sqrt{k-1}$ จะได้

$$\alpha_1\left(k^2-4(k-1)\right)+\alpha_2\left(k-2\sqrt{k-1}\right)^2 = k(k-1)(k-2\sqrt{k-1}) \qquad (13)$$

(11) – (13) จะได้

$$\left(\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^2-\left(k^2-4(k-1)\right)\right)\alpha_1 = k(k-1)\left((k+2)-\left(k-2\sqrt{k-1}\right)\right)$$

$$\left(k^2+4k\sqrt{k-1}+4(k-1)-k^2+4(k-1)\right)\alpha_1 = k(k-1)\left(2+2\sqrt{k-1}\right)$$

$$\left(8(k-1)+4k(k-1)\right)\alpha_1 = 2k(k-1)\left(1+\sqrt{k-1}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{2k(k-1)\left(1+\sqrt{k-1}\right)}{\left(8(k-1)+4k(k-1)\right)} = \frac{k(k-1)\left(1+\sqrt{k-1}\right)}{4(k-1)+2k\sqrt{k-1}} = \frac{k\left(k-1-\sqrt{k-1}\right)}{2(k-2)}$$

ดังนั้น

$$\alpha_1 = \frac{k(k-1-\sqrt{k-1})}{2(k-2)} \text{ และ } \alpha_2 = \frac{k(k-1+\sqrt{k-1})}{2(k-2)}$$

และจะได้

$$a_{n,k} = \frac{k\left(k-1-\sqrt{k-1}\right)}{2(k-2)}\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^n + \frac{k\left(k-1+\sqrt{k-1}\right)}{2(k-2)}\left(k-2\sqrt{k-1}\right)^n$$

หารูปทั่วไปของ $\boldsymbol{b_{n,k}}$

จาก (3) $\qquad a_{n-1,k} = \frac{b_{n,k}}{2} - \frac{k}{2}b_{n-1,k} \qquad (14)$

จะได้ $\qquad a_{n,k} = \frac{b_{n+1,k}}{2} - \frac{k}{2}b_{n,k} \qquad (15)$

แทน (15) ลงใน (2) $\qquad \frac{b_{n+1,k}}{2} - \frac{k}{2}b_{n,k} = ka_{n-1,k} + 2(k-1)b_{n-1,k}$

จาก (14) จะได้ $\qquad \frac{b_{n+1,k}}{2} - \frac{k}{2}b_{n,k} = \left[\frac{k\cdot b_{n,k}}{2} - \frac{k^2}{2}b_{n-1,k}\right] + 2(k-1)b_{n-1,k}$

$$\frac{b_{n+1,k}}{2} - \frac{2k}{2} b_{n,k} + \left(\frac{k^2}{2} - 2(k-1)\right) b_{n-1,k} = 0$$

$$b_{n+1,k} - 2kb_{n,k} + \left(k^2 - 4(k-1)\right)b_{n-1,k} = 0$$

จะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ $s^2 - 2ks + [k^2 - 4(k-1)] = 0$

เมื่อแก้สมการหาค่า s จะได้ $s = k \pm 2\sqrt{k-1}$

และผลเฉลยของสมการจะอยู่ในรูป

$$b_{n,k} = \beta_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right)^n + \beta_2\left(k - 2\sqrt{k-1}\right)^n$$ โดยที่ β_1 และ β_2 เป็นค่าคงตัว

ต่อไปเราจะหาค่า β_1 และ β_2 จากปัญหาค่าเริ่มต้นของ $b_{n,k}$

จาก (5) และ (7) จะได้

$$\beta_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right) + \beta_2\left(k - 2\sqrt{k-1}\right) = k \tag{16}$$

$$\beta_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right)^2 + \beta_2\left(k - 2\sqrt{k-1}\right)^2 = k(3k-2) \tag{17}$$

ตามลำดับ

คูณ (16) ด้วย $k + 2\sqrt{k-1}$ จะได้

$$\beta_1\left(k + 2\sqrt{k-1}\right)^2 + \beta_2\left(k^2 - 4(k-1)\right) = k\left(k + 2\sqrt{k-1}\right) \tag{18}$$

(17) – (18) จะได้

$$\left(\left(k - 2\sqrt{k-1}\right)^2 - \left(k^2 - 4(k-1)\right)\right)\beta_2 = k\left((3k-2) - \left(k + 2\sqrt{k-1}\right)\right)$$

$$\left(k^2 - 4k\sqrt{k-1} + 4(k-1) - k^2 + 4(k-1)\right)\beta_2 = k\left(2k - 2 - 2\sqrt{k-1}\right)$$

$$\left(8(k-1) - 4k\sqrt{k-1}\right)\beta_2 = 2k\left(k - 1 - \sqrt{k-1}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{2k\left(k - 1 - \sqrt{k-1}\right)}{8(k-1) - 4k\sqrt{k-1}} = \frac{k(\sqrt{k-1} - 1)}{4\sqrt{k-1} - 2k} = \frac{\left(1 + \sqrt{k-1}\right)k}{4 - 2k}$$

คูณ (16) ด้วย $k - 2\sqrt{k-1}$ จะได้

$$\beta_1\left(k^2 - 4(k-1)\right) + \beta_2\left(k - 2\sqrt{k-1}\right)^2 = k\left(k - 2\sqrt{k-1}\right) \tag{19}$$

(17) – (19) จะได้

$$\left(\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^2-\left(k^2-4(k-1)\right)\right)\beta_1=k\left((3k-2)-\left(k-2\sqrt{k-1}\right)\right)$$

$$\left(k^2+4k\sqrt{k-1}+4(k-1)-k^2+4(k-1)\right)\beta_1=k\left(2k-2+2\sqrt{k-1}\right)$$

$$\left(8(k-1)+4k\sqrt{k-1}\right)\beta_1=2k\left(k-1+\sqrt{k-1}\right)$$

$$\beta_1=\frac{2k\left(k-1+\sqrt{k-1}\right)}{8(k-1)+4k\sqrt{k-1}}=\frac{k\left(\sqrt{k-1}+1\right)}{4\sqrt{k-1}+2k}=\frac{\left(\sqrt{k-1}-1\right)k}{2k-4}$$

ดังนั้น

$$\beta_1=\frac{\left(\sqrt{k-1}-1\right)k}{2k-4} \text{ และ } \beta_2=\frac{\left(1+\sqrt{k-1}\right)k}{4-2k}$$

และจะได้

$$b_{n,k}=\frac{\left(\sqrt{k-1}-1\right)k}{2k-4}\left(k+2\sqrt{k-1}\right)^n+\frac{\left(1+\sqrt{k-1}\right)k}{4-2k}\left(k-2\sqrt{k-1}\right)^n$$

3.2 การหา $\overline{g}_{n,k}$

การหา $\overline{g}_{n,k}$ เราได้ผลตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับจำนวนนับ k และ n ใด ๆ จะได้ว่า $\overline{g}_{n,k}=k(3k-2)^{2(n-1)}$

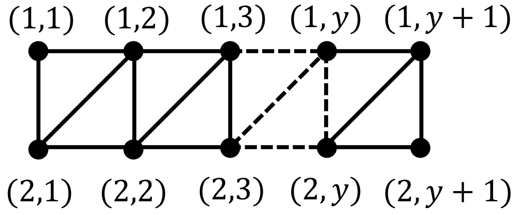
บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน n โดยให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\overline{g}_{n,k}=k(3k-2)^{2(n-1)}$ สำหรับทุกจำนวนนับ k

ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เห็นได้ชัดว่า $\overline{g}_{1,k}=k=k(3k-2)^{2(1-1)}$

ขั้นอุปนัย ให้ y เป็นจำนวนนับใด ๆ สมมติให้ $\overline{g}_{y,k}=k(3k-2)^{2(y-1)}$

พิจารณากราฟ Γ_{y+1}



ภาพที่ 3.2.1 กราฟ Γ_{y+1}

เราทำการลงสีแบบ g บน Γ_{y+1} โดยจะลงสีบนด้านทุกด้านของ Γ_y ซึ่งเห็นได้ว่าจำนวนรูปแบบการลงสีทั้งหมดคือ $\overline{g}_{y,k}$ วิธี จากนั้นลงสี $\{(1,y),(1,y+1)\}$ และ $\{(1,y+1),(2,y)\}$ โดยจำนวนวิธีการลงสีทั้งหมด คือ $k \times k$ วิธีและจำนวนวิธีการลงสีที่ทำให้เกิดรุ้ง คือ $(k-1) \times (k-2)$ วิธี จะได้จำนวนวิธีการลงสีที่ทำให้ไม่เกิดรุ้ง คือ $k^2-(k-1)(k-2)$ วิธี และลงสี $\{(1,y+1),(2,y+1)\}$ และ $\{(2,y),(2,y+1)\}$ โดยจำนวนวิธีการลงสีทั้งหมดคือ $k \times k$ วิธีและจำนวนวิธีการลงสีที่ทำให้เกิดรุ้ง คือ $(k-1) \times (k-2)$ วิธี จะได้จำนวนวิธีการลงสีที่ทำให้ไม่เกิดรุ้ง คือ $k^2-(k-1)(k-2)$ วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีในการลงสีแบบ g บนด้านของ Γ_{y+1} เท่ากับ $\overline{g}_{y,k}[k^2-(k-1)(k-2)]^2$

โดยสมมติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$\begin{aligned}\overline{g}_{y+1,k} &= \overline{g}_{y,k}[k^2-(k-1)(k-2)]^2 \\ &= k(3k-2)^{2(y-1)}(k^2-k^2+3k-2)^2 \\ &= k(3k-2)^{2y} \\ &= k(3k-2)^{2[(y+1)-1]}\end{aligned}$$

ดังนั้น โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $\overline{g}_{n,k} = k(3k-2)^{2(n-1)}$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n

□

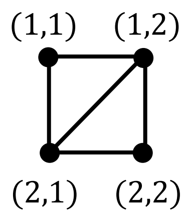
3.3 การหา $r_{n,k}$

ทฤษฎีบท 3.3 สำหรับจำนวนนับ $n \geq 2$ และ $k \geq 3$ ใด ๆ จะได้ว่า $r_{n,k} = k(k-1)(k-2)^{2(n-1)}$

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน $n \geq 2$ โดยให้ $P(n)$ แทนข้อความ $r_{n,k} = k(k-1)(k-2)^{2(n-1)}$ สำหรับทุกจำนวนนับ $k \geq 3$

ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

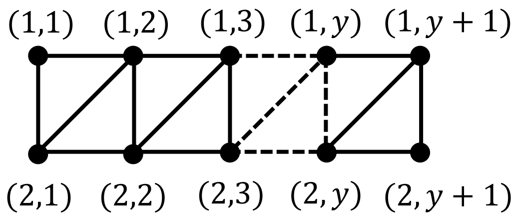
พิจารณากราฟ Γ_2



ภาพที่ 3.3.1 กราฟ Γ_2

เนื่องจากต้องการลงสีให้กราฟเกิดรุ้งทั้งหมด ดังนั้นเราสามารถลงสีจุดยอด (1,1) ได้ k วิธี ลงสีจุดยอด (1,2) ได้ $k-1$ วิธี ลงสีจุดยอด (2,1) ได้ $k-2$ วิธีและลงสีจุดยอด (2,2) ได้ $k-2$ วิธี เห็นได้ว่า $r_{2,k} = k(k-1)(k-2)^{2(2-1)}$

ขั้นอุปนัย ให้ y เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยที่ $y \geq 2$ สมมติให้ $r_{y,k} \ = k(k-1)(k-2)^{2(y-1)}$
พิจารณากราฟ Γ_{y+1}



ภาพที่ 3.3.2 กราฟ Γ_{y+1}

เราทำการลงสีแบบ r บน Γ_{y+1} โดยจะลงสีบนจุดยอด $(1,1),(1,2),\ldots,(1,y),(2,1),(2,2),\ldots,(2,y)$ ซึ่งเห็นได้ว่าจำนวนรูปแบบการลงสีทั้งหมดบน $2y$ จุดยอด ลงได้ทั้งหมด $r_{y,k}$ วิธี จากนั้นเลือกลงสีจุดยอด $(1,y+1)$ ได้ $k-2$ วิธี และเลือกลงสีจุดยอด $(2,y+1)$ ได้ $k-2$ วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีในการลงสีแบบ r บนจุดยอดของ Γ_{y+1} เท่ากับ $r_{y,k}(k-2)^2$

โดยสมมติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$\begin{aligned} r_{y+1,k} &= r_{y,k}(k-2)^2 \\ &= k(k-1)(k-2)^{2(y-1)}(k-2)^2 \\ &= k(k-1)(k-2)^{2y} \\ &= k(k-1)(k-2)^{2[(y+1)-1]} \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $r_{n,k} = \ k(k-1)(k-2)^{2(n-1)}$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq 2$ และ $k \geq 3$

หมายเหตุ จากนิยามของ $r_{n,k}$ เราจะได้ว่า $r_{1,k} = k^2$ และ $r_{2,1} = r_{2,2} = 0$

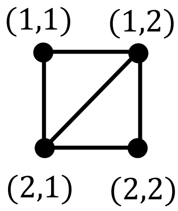
$\square$

3.4 การหา $\bar{r}_{n,k}$

ทฤษฎีบท 3.4 สำหรับจำนวนนับ $n \geq 2$ และ $k \geq 3$ ใด ๆ จะได้ว่า $\bar{r}_{n,k} = k[(k-1)(k-2)]^{2(n-1)}$

บทพิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน $n \geq 2$ โดยให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\bar{r}_{n,k} = k[(k-1)(k-2)]^{2(n-1)}$ สำหรับทุกจำนวนนับ $k \geq 3$

ขั้นฐาน จะแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง
พิจารณากราฟ Γ_2

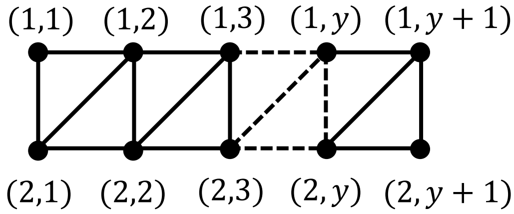


ภาพที่ 3.4.1 กราฟ Γ_2

เนื่องจากต้องการลงสีให้กราฟเกิดรุ้งทั้งหมด ดังนั้นเราสามารถลงสีด้าน $\{(1,1),(2,1)\}$ ได้ k วิธี ต่อไปลงสีด้าน $\{(1,1),(1,2)\}$ ได้ $k-1$ วิธี ลงสีด้าน $\{(2,1),(1,2)\}$ ได้ $k-2$ วิธี ลงสีด้าน $\{(2,2),(2,1)\}$ ได้ $k-1$ วิธี และลงสีด้าน $\{(2,2),(1,2)\}$ ได้ $k-2$ วิธี

เห็นได้ว่า $\overline{r}_{2,k} = k[(k-1)(k-2)]^{2(2-1)}$

ขั้นอุปนัย ให้ y เป็นจำนวนนับใด ๆ โดยที่ $y \geq 2$ สมมติให้ $\overline{r}_{y,k} = k[(k-1)(k-2)]^{2(y-1)}$ พิจารณากราฟ Γ_{y+1}



ภาพที่ 3.4.2 กราฟ Γ_{y+1}

เราทำการลงสีแบบ r บน Γ_{y+1} โดยจะลงสีบนด้านทุกด้านของ Γ_y ซึ่งเห็นได้ว่าจำนวนรูปแบบการลงสีทั้งหมดคือ $\overline{r}_{y,k}$ วิธี จากนั้นเลือกลงสีด้าน $\{(1,y),(1,y+1)\}$ ได้ $k-1$ วิธี ต่อไปเลือกลงสีด้าน $\{(1,y+1),(2,y)\}$ ได้ $k-2$ วิธี ลงสีด้าน $\{(1,y+1),(2,y+1)\}$ ได้ $k-1$ วิธี และลงสีด้าน $\{(2,y),(2,y+1)\}$ ได้ $k-2$ วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีในการลงสีแบบ r บนจุดยอดของ Γ_{y+1} เท่ากับ $\overline{r}_{y,k}[(k-1)(k-2)]^2$

โดยสมมติฐานของการอุปนัยได้ว่า
$$\begin{aligned}\overline{r}_{y+1,k} &= \overline{r}_{y,k}[(k-1)(k-2)]^2\\ &= k[(k-1)(k-2)]^{2(y-1)}[(k-1)(k-2)]^2\\ &= k[(k-1)(k-2)]^{2y}\\ &= k[(k-1)(k-2)]^{2[(y+1)-1]}\end{aligned}$$

ดังนั้น โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $\overline{r}_{n,k} = k[(k-1)(k-2)]^{2(n-1)}$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq 2$ และ $k \geq 3$

หมายเหตุ จากนิยามของ $\overline{r}_{n,k}$ เราจะได้ว่า $\overline{r}_{1,k} = k$ และ $\overline{r}_{2,1} = \overline{r}_{2,2} = 0$

$\square$

3.5 ตัวอย่างการแทนค่า $\boldsymbol{n}$ และ $\boldsymbol{k}$

ในหัวข้อนี้จะแทนค่า n และ k เพื่อหา $g_{n,k}$, $\overline{g}_{n,k}$, $r_{n,k}$ และ $\overline{r}_{n,k}$ซึ่งได้ค่าตามตารางดังนี้

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	4	9	16	25
2	1	16	51	112	205
3	1	62	257	832	1,825
4	1	256	1,731	6,208	16,405
5	1	1,024	10,089	46,336	147,625

ตารางที่ 3.5.1 แสดงค่า $g_{n,k}$

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	1	32	147	400	845
3	1	512	7,203	40,000	142,805
4	1	8,192	352,947	4,000,000	24,134,045
5	1	131,072	17,294,403	400,000,000	4,078,653,605

ตารางที่ 3.5.2 แสดงค่า $\bar{g}_{n,k}$

n \ k	1	2	3	4	5
1	1	4	9	16	25
2	0	0	6	48	180
3	0	0	6	192	1,620
4	0	0	6	768	14,580
5	0	0	6	3,072	131,220

ตารางที่ 3.5.3 แสดงค่า $r_{n,k}$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	0	0	12	144	720
3	0	0	48	5,184	103,680
4	0	0	192	186,624	14,929,920
5	0	0	768	6,718,464	2,149,908,480

ตารางที่ 3.5.4 แสดงค่า $\bar{r}_{n,k}$

เอกสารอ้างอิง

[1] Bastos J. D. O, Benevides F. S, Mota G. O, Sau I, Counting Gallai 3-colourings of complete graphs, *ArXiv e-prints* (May 2018): 1-26.

[2] Gyárfás A. and Sárközy G. N, Gallai colourings of non-complete graphs, *Discrete Mathematics* 310, no. 5 (March 2010): 977–980.

[3] Thomas R., An Update on the Four-Colour Theorem, *Notices of the American Mathematical Society* 45, No. 7 (August 1998): 848-859.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	ปัญหาการลงสีบนกราฟ
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Colouring Problems on Graphs
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีรพงษ์ พงษ์พัฒนเจริญ
ผู้ดำเนินการ	นางสาวกุลสินี บุญถนอม เลขประจำตัวนิสิต 5833504623 สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

เมื่อกล่าวถึงเรื่องทฤษฎีกราฟ ปัญหาที่ได้รับความสนใจอย่างมากคือปัญหาการลงสีกราฟ ซึ่งมีการกล่าวถึงครั้งแรกในปี ค.ศ. 1852 คือ ทฤษฎีบทสี่สี (The Four Colour Theorem) ซึ่งเป็นปัญหาการระบายสีแผนที่โดยไม่ให้พื้นที่ที่มีเส้นเขตแดนร่วมกันมีสีเดียวกัน จากความพยายามในการแก้ปัญหานี้ ทำให้เกิดแนวคิดและบทนิยามพื้นฐานสำหรับการลงสีแบบต่าง ๆ บนกราฟ

ปัญหาการลงสีได้มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องมากมาย เช่น ในปี ค.ศ. 2004 มีผู้ศึกษาปัญหาการลงสีด้านโดยไม่เกิดสามเหลี่ยมที่แต่ละด้านมีสีต่างกัน(Rainbow) บนกราฟบริบูรณ์ [3] นอกจากนี้ในปี ค.ศ. 2010 มีผู้ศึกษาปัญหาการลงสีแบบไม่เกิดรุ้งบนกราฟไม่บริบูรณ์ [4] และในปี ค.ศ. 2018 มีผู้ศึกษาปัญหาการลงสีแบบไม่เกิดรุ้งบนกราฟบริบูรณ์ [2]

ในโครงงานนี้เราจะศึกษาปัญหาการลงสีบนจุดยอดและการลงสีบนด้านภายใต้เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับการลงสีที่ทำให้เกิดและไม่เกิดรุ้งบนกราฟ $\Gamma_{m,n}$ ซึ่งนิยามดังนี้

สำหรับจำนวนเต็มบวก m, n, a และ b ใด ๆ กำหนดให้ $\Gamma_{m,n} = (V, E)$

โดยที่ $V = \{V_{11}, V_{12}, \dots, V_{1n}, V_{21}, V_{22}, \dots, V_{2n}, V_{m1}, V_{m2}, \dots, V_{mn}\}$ และ

$$E = \left\{ \{V_{ab}, V_{cd}\} \in \binom{V}{2} : \ |a-c| + |b-d| = 1 \text{ หรือ } (a-c)(b-d) = -1 \right\}$$

เมื่อ $\binom{\boldsymbol{V}}{\boldsymbol{2}}$ คือเซตของเซตย่อยที่มีขนาด 2 ของเซต $\boldsymbol{V}$

วัตถุประสงค์

โครงงานนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาจำนวนวิธีในการลงสีภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ที่สนใจ บนกราฟ $\Gamma_{m,n}$ โดยใช้สีจำนวน k สี เมื่อ $k \geq 3$

ขอบเขตของโครงงาน

คำนวณหาวิธีในการลงสีบนกราฟ $\Gamma_{m,n}$ ภายใต้เงื่อนไข ต่อไปนี้

1. ลงสีบนด้านของกราฟโดยที่ไม่เกิดรุ้ง
2. ลงสีบนจุดยอดของกราฟโดยที่ไม่เกิดรุ้ง
3. ลงสีบนจุดยอดของกราฟโดยที่เกิดรุ้ง

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาปัญหา และกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัยเรื่องการลงสีกราฟ
3. ศึกษาการหาจำนวนวิธีในการลงสี
4. พิสูจน์ว่าคำตอบที่ได้เป็นจริง
5. ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา
6. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	**สิงหาคม 2561 - เมษายน 2562**								
	ส.ค.	**ก.ย.**	**ต.ค.**	**พ.ย.**	**ธ.ค.**	**ม.ค.**	**ก.พ.**	**มี.ค.**	**เม.ย.**
1. ศึกษาปัญหาและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา									
2. สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัยเรื่องการลงสีกราฟ									
3. ศึกษาการหาจำนวนวิธีในการลงสี									
4. พิสูจน์ว่าคำตอบที่ได้เป็นจริง									
5. ตรวจสอบความถูกต้องของเนื้อหา									
6. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. สามารถนำวิธีในการนับการลงสีแบบต่าง ๆ มาประยุกต์ใช้ในการหาคำตอบของปัญหาที่สนใจได้
2. ทราบคำตอบที่ต้องการหาและสามารถพิสูจน์ได้ว่าคำตอบที่ได้เป็นจริง
3. เพื่อพัฒนาวินัยตนเองและความรับผิดชอบต่อหน้าที่

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. Notebook
2. กระดาษ A4
3. โปรแกรม Microsoft word และ Mathematica

งบประมาณ

1. กระดาษ A4 80 แกรม
2. อุปกรณ์เครื่องเขียน
3. ค่าจัดทำรูปเล่ม

เอกสารอ้างอิง

[1] Benevides F. S, Hoppen C., and Sampaio R. M, Edge-colourings of graphs avoiding complete graphs with a prescribed colouring, *ArXiv e-prints* (May 2016): 1-23.

[2] Bastos J. D. O, Benevides F. S, Mota G. O, Sau I, Counting Gallai 3-colourings of complete graphs, *ArXiv e-prints* (May 2018): 1-26.

[3] Gyárfás A. and Simonyi G., Edge colourings of complete graphs without tricoloured triangles, *Journal of Graph Theory* 46, no. 3 (April 2004): 211–216.

[4] Gyárfás A. and Sárközy G. N, Gallai colourings of non-complete graphs, *Discrete Mathematics* 310, no. 5 (March 2010): 977–980.

[5] Thomas R., An Update on the Four-Colour Theorem, *Notices of the American Mathematical Society* 45, No. 7 (August 1998): 848-859.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวกุลสินี บุญถนอม

เลขประจำตัวนิสิต 5833504623

สาขาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย