โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องบางขนาด
Tiling on some Deficient Rectangular Boards by L-Trominoes

ชื่อนิสิต นางสาวณัฏฐณิชา สงวนพันธ์ 583 35149 23

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2561

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทคัดย่อและแฟ้มข้อมูลฉบับเต็มของโครงงานทางวิชาการที่ให้บริการในคลังปัญญาจุฬาฯ (CUIR)
เป็นแฟ้มข้อมูลของนิสิตเจ้าของโครงงานทางวิชาการที่ส่งผ่านทางคณะที่สังกัด
The abstract and full text of senior projects in Chulalongkorn University Intellectual Repository(CUIR)
are the senior project authors' files submitted through the faculty.

การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องบางขนาด

นางสาวณัฏฐณิชา สงวนพันธ์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ปีการศึกษา 2561
ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Tiling on some Deficient Rectangular Boards by L-Trominoes

Miss Nattanicha Sanguanpan

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science
Chulalongkorn University
Academic Year 2018

Copyright of Chulalongkorn University

หัวข้อโครงงาน	การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องบางขนาด
โดย	นางสาวณัฏฐณิชา สงวนพันธ์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

..... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

..... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล)

..... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.อธิปัตย์ ธำรงธัญลักษณ์)

ณัฏฐณิชา สงวนพันธ์ : การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องบางขนาด. (Tiling on some Deficient Rectangular Boards by L-Trominoes) อ.ที่ปรึกษาโครงงาน : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ, 25 หน้า.

โครงงานนี้ขยายแนวคิดของ Chu และ Johnsonbaugh จากการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $n \times n$ มาเป็นการพิจารณาการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $m \times n$ บางขนาด เมื่อ m และ n เป็นจำนวนนับที่แตกต่างกัน

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ณัฏฐณิชา สงวนพันธ์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน

ปีการศึกษา 2561

5833514923 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORDS : DEFICIENT RECTANGULAR BOARDS / L-TROMINOES

NATTANICHA SANGUANPAN : Tiling on some Deficient Rectangular Boards by L-Trominoes. ADVISOR : ASST. PROF. RATINAN BOONKLURB, Ph.D., 25 pp.

This project extends the idea of Chu and Johnsonbaugh from tiling $n \times n$ deficient boards with L-trominoes to be tiling on some $m \times n$ deficient board with L-trominoes where m and n are distinct positive integers.

Department : Mathematics and Computer Science Student's Signature ณัฐณิชา สงวนพันธ์

Field of Study : Mathematics Advisor's Signature

Academic Year : 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานนี้สำเร็จลุล่วงเพราะได้รับการอนุเคราะห์อย่างเต็มที่จากบุคคลเหล่านี้ ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ความดูแลเอาใจใส่เป็นอย่างดี ตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ มาโดยตลอดระยะเวลาการทำโครงงานจนทำให้โครงงานเล่มนี้เสร็จสมบูรณ์ ขอขอบคุณรองศาสตราจารย์ ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล และอาจารย์ ดร.อธิปัตย์ ธำรงธัญลักษณ์ อาจารย์กรรมการคุมสอบครั้งนี้ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะและการตรวจทาน ทำให้โครงงานมีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น ขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์สำหรับงบประมาณในการทำโครงงาน ท้ายนี้ข้าพเจ้าขอขอบคุณเพื่อน ๆ และครอบครัวที่เป็นกำลังใจให้โครงงานเล่มนี้ผ่านลุล่วงไปได้ด้วยดี

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... จ

กิตติกรรมประกาศ ..... ฉ

สารบัญ ..... ช

สารบัญภาพ ..... ฌ

บทที่ 1 บทนำและความรู้ทั่วไป 1

บทที่ 2 การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด $m \times n$ บางขนาด 4

บทที่ 3 บทสรุปและข้อเสนอแนะ 11

เอกสารอ้างอิง 12

ภาคผนวก แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal ปีการศึกษา 2561 13

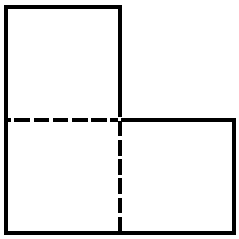
ประวัติผู้เขียน 17

สารบัญภาพ

หน้า

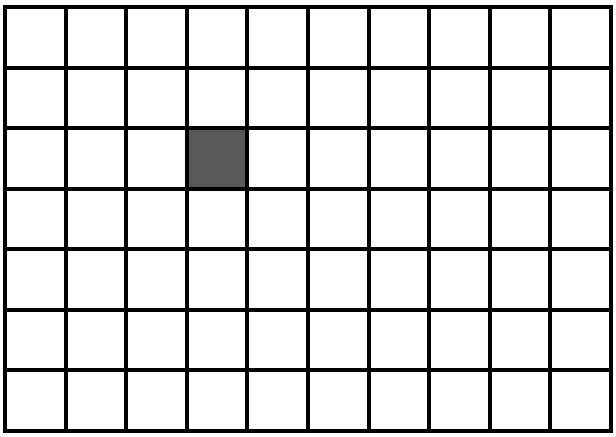
ภาพที่ 1.1 กระเบื้องแอล-โทรมิโน 1
ภาพที่ 1.2 กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 1
ภาพที่ 1.3 ตัวอย่างการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่อง
ขนาด 7×10 ที่มีรูอยู่ที่ตำแหน่ง $(3,4)$ 2
ภาพที่ 2.1 การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7
เมื่อกำหนดให้รูอยู่ที่ตำแหน่ง (i, j) เมื่อ $i \in \{1,2,3,4\}$ และ $j \in \{1,2,3\}$.....4
ภาพที่ 2.2 การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7
เมื่อกำหนดให้รูอยู่ที่ตำแหน่ง (i, j) เมื่อ $i \in \{1,2,3,4\}$ และ $j \in \{4,5,6,7\}$.....4
ภาพที่ 2.3 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3)$ ออกเป็นสี่ส่วน.....5
ภาพที่ 2.4 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^2 \times (2^2 + 3(l + 1))$
เมื่อรูของกระดานอยู่ในคอลัมน์ที่ i เมื่อ $1 \leq i \leq 4 + 3l$).....6
ภาพที่ 2.5 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$
เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มคู่ ออกเป็นสี่ส่วน.....7
ภาพที่ 2.6 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$
เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มคี่ ออกเป็นสี่ส่วน.....8
ภาพที่ 2.7 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 ออกเป็นสามส่วน
โดยมีรูอยู่ในกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7 9
ภาพที่ 2.8 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6(k + 1))$
ออกเป็นสามส่วน.....10

บทที่ 1
บทนำและความรู้พื้นฐาน



ภาพ 1.1 กระเบื้องแอล-โทรมิโน

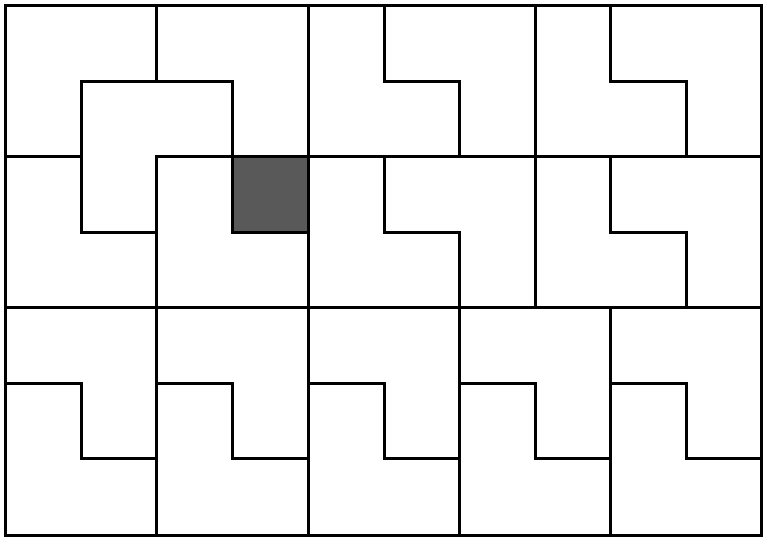
กระเบื้องแอล-โทรมิโน (L-tromino) คือ กระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 1×1 ที่ต่อกัน 3 ชิ้นเป็นรูปตัวแอลโดยที่กระเบื้องแต่ละแผ่นจะต้องมีอย่างน้อย 1 ด้านที่ติดกับกระเบื้องอีกแผ่นอย่างแนบสนิท ดังภาพ 1.1 ซึ่งในการนำกระเบื้องดังกล่าวลงไปปูจะสามารถพลิกกระเบื้องแอล-โทรมิโนไปในทิศทางใดก็ได้



ภาพ 1.2 กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10

กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $m \times n$ (Deficient board) คือ กระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด $m \times n$ ที่มีรูขนาด 1×1 จำนวน 1 รูอยู่ตำแหน่งใด ๆ ก็ได้บนกระดาน โดยการระบุตำแหน่งของรูบนกระดานจะใช้ระบบเดียวกันกับการระบุตำแหน่งสมาชิกในเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เช่น ในภาพ 1.2 แสดงกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 ที่มีรูอยู่ที่ตำแหน่ง $(3,4)$

เราจะกล่าวว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $m \times n$ ได้ เมื่อไม่ว่ารูขนาด 1×1 จะอยู่ที่ตำแหน่งใดบนกระดานดังกล่าวก็ตาม จะสามารถวางกระเบื้องแอล-โทรมิโนให้ปิดทับกระดานดังกล่าวจนมิด โดยไม่วางเหลื่อมกัน ไม่ตัดแต่งกระเบื้องและไม่ปิดรูนั้น ดังภาพ 1.3 เป็นตัวอย่างการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 ที่มีรูอยู่ที่ตำแหน่ง $(3,4)$



ภาพ 1.3 ตัวอย่างการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 ที่มีรูอยู่ที่ตำแหน่ง $(3,4)$

ในปี ค.ศ. 1986 Chu และ Johnsonbaugh [1] ได้ศึกษาวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $n \times n$ โดยพิจารณาว่าจำนวนนับ n ใดบ้างที่จะทำให้สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $n \times n$ ได้ ในขั้นแรก Chu และ Johnsonbaugh [1] ได้ข้อสังเกตพื้นฐานที่ว่า ถ้าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $n \times n$ ได้แล้ว $3 \mid n^2 - 1$ หรือ $3 \nmid n$ จากนั้นจึงได้พยายามพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 1.1 [1] สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times 2^k$ เมื่อ $k \geq 1$ ได้

ทฤษฎีบทประกอบ 1.2 [1] ถ้าตำแหน่งของรูอยู่ที่มุมทั้งสี่ของกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 5×5 แล้ว จะสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานดังกล่าวได้

ทฤษฎีบทประกอบ 1.3 [1] สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด $(2i) \times (3j)$ เมื่อ $i, j \geq 1$ ได้

ทฤษฎีบทประกอบ 1.4 [1] สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×7 ได้

จากทฤษฎีบทประกอบที่ได้มาทั้งหมดทำให้ Chu และ Johnsonbaugh [1] สามารถใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มาพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักดังต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบท 1.1 [1] ถ้า n เป็นจำนวนคี่ที่ $n > 5$ และ $3 \nmid n$ แล้วสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $n \times n$ ได้

ทฤษฎีบท 1.2 [1] ถ้า n เป็นจำนวนคู่ที่ $n > 1$ และ $3 \nmid n$ แล้วสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $n \times n$ ได้

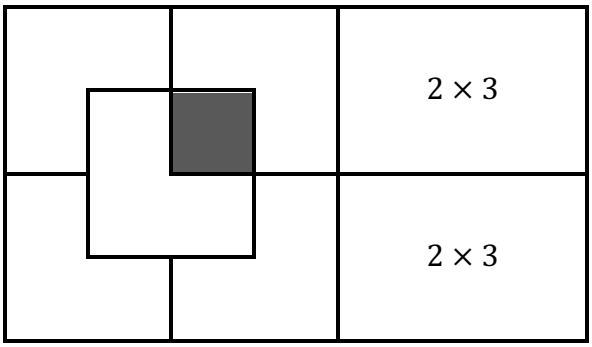
ทฤษฎีบท 1.3 [1] ถ้า $n \neq 5$ จะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $n \times n$ ได้ก็ต่อเมื่อ $3 \nmid n$

จากผลงานของ Chu และ Johnsonbaugh [1] ทำให้ข้าพเจ้าได้แรงบันดาลใจในการทำโครงงานฉบับนี้ โดยโครงงานนี้ต้องการขยายแนวคิดของ Chu และ Johnsonbaugh [1] ไปสู่การปูกระเบื้องลักษณะเดียวกันลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $m \times n$ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกบางจำนวนที่ $m \neq n$ ซึ่งแน่นอนว่าเราจะพิจารณาเพียงจำนวนเต็ม m และ n ที่ $3 \mid (mn - 1)$ เท่านั้น

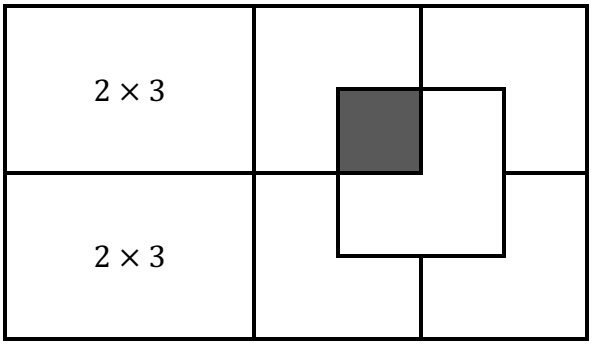
บทที่ 2
การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $m \times n$ บางขนาด

ทฤษฎีบท 2.1 สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^n \times (2^n + 3)$ เมื่อ $n \geq 2$ ได้

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
<u>ขั้นฐาน</u> ให้ $n = 2$ จะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7 ได้ดังแสดงในภาพ 2.1 และ 2.2



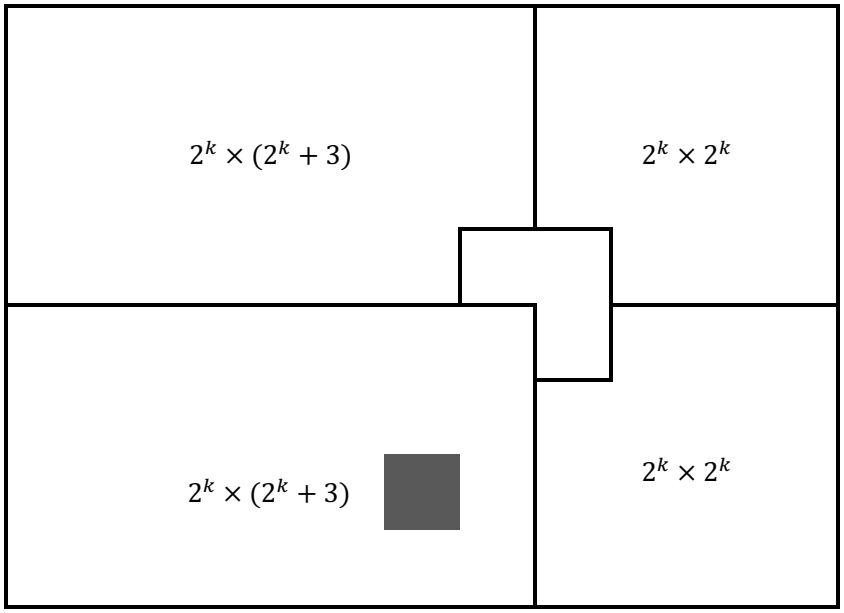
ภาพ 2.1 การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7 เมื่อกำหนดให้รูอยู่ที่ตำแหน่ง (i, j) เมื่อ $i \in \{1,2,3,4\}$ และ $j \in \{1,2,3\}$



ภาพ 2.2 การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7 เมื่อกำหนดให้รูอยู่ที่ตำแหน่ง (i, j) เมื่อ $i \in \{1,2,3,4\}$ และ $j \in \{4,5,6,7\}$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 2$ สมมติว่า สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times (2^k + 3)$ ได้

พิจารณากระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3)$ จะได้ว่าสามารถแบ่งกระดานนี้ออกเป็นสี่ส่วนที่มีขนาดเป็น $2^k \times (2^k + 3)$ เท่ากันสองส่วน และ $2^k \times 2^k$ เท่ากันสองส่วน ดังภาพ 2.3



ภาพ 2.3 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3)$ ออกเป็นสี่ส่วน

โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติให้รูอยู่ตรงตำแหน่งที่แรเงาในภาพ 2.3 จากสมมติฐานอุปนัยจะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times (2^k + 3)$ ในส่วนที่ 1 โดยให้รูอยู่ที่มุมขวาล่างของกระดานส่วนนี้ได้ ต่อมาโดยทฤษฎีบทประกอบ 1.1 จะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times 2^k$ ในส่วนที่ 3 โดยให้รูอยู่ที่มุมซ้ายล่างของกระดานส่วนนี้ได้ และสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times 2^k$ ในส่วนที่ 4 โดยให้รูอยู่ที่มุมซ้ายบนของกระดานส่วนนี้ได้ ซึ่งรูทั้งสามดังกล่าวนี้สามารถปูทับด้วยกระเบื้องแอล-โทรมิโน 1 ชิ้นได้ดังแสดงภาพ 2.3 จึงทำให้ได้ว่า นอกจากนี้โดยสมมติฐานอุปนัยจะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times (2^k + 3)$ ในส่วนที่ 2 โดยรูอยู่ตรงตำแหน่งที่แรเงาได้

จึงได้ว่าไม่ว่ารูจะอยู่ตรงตำแหน่งใดบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่อง $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3)$ แล้วจะสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานนั้นได้เสมอ

ดังนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ทำให้สรุปได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^n \times (2^n + 3)$ เมื่อ $n \geq 2$ ได้ □

ทฤษฎีบท 2.2 สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^n \times (2^n + 3t)$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $t \geq 1$ได้

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

<u>ขั้นฐาน</u> $n = 2$ ให้ t เป็นจำนวนนับที่ $t \geq 1$

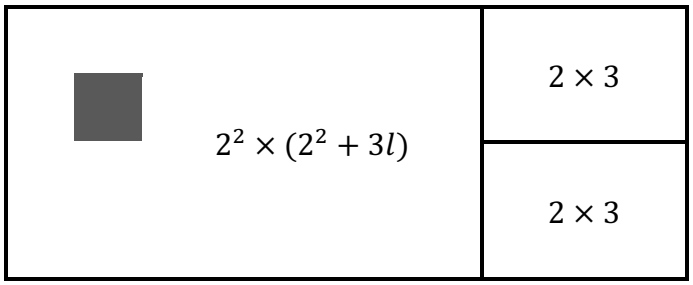
กรณี $t = 1$ เราสรุปได้โดยทฤษฎีบท 2.1 ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^2 \times (2^2 + 3)$ ได้

ต่อมาให้ l เป็นจำนวนนับที่ $l \geq 1$ สมมติว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^2 \times (2^2 + 3l)$ ได้

พิจารณากระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^2 \times (2^2 + 3(l + 1))$ จากความสมมาตรของตำแหน่งรูของกระดาน จึงเพียงพอที่จะพิจารณาในกรณีที่รูของกระดานดังกล่าวอยู่ในคอลัมน์ที่ i เมื่อ $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{2^2+3(l+1)}{2} \right\rceil$ ทำการแบ่งกระดานดังกล่าวออกเป็นสามส่วนขนาด $2^2 \times (2^2 + 3l)$ จำนวน 1 กระดาน และขนาด 2×3 จำนวน 2 กระดานดังภาพ 2.4

เนื่องจาก $\left\lceil \frac{2^2+3(l+1)}{2} \right\rceil < 4 + \frac{3l}{2} < 2^2 + 3l$ ทำให้ได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานทั้งสามนี้ได้ ดังนั้นสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^2 \times (2^2 + 3(l + 1))$ ได้

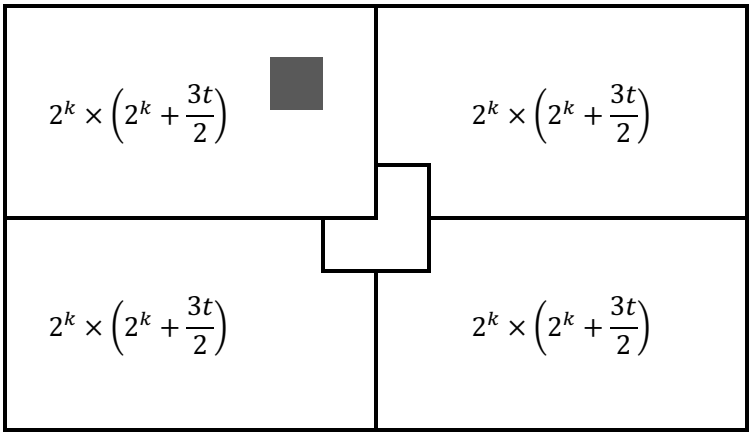
ดังนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^2 \times (2^2 + 3t)$ ได้ เมื่อ t เป็นจำนวนนับที่ $t \geq 1$ ได้



ภาพ 2.4 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^2 \times (2^2 + 3(l + 1))$ เมื่อรูของกระดานอยู่ในคอลัมน์ที่ i เมื่อ $1 \leq i \leq 4 + 3l$

<u>ขั้นอุปนัย</u> ให้ k เป็นจำนวนนับโดยที่ $k \geq 2$ สมมติว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times (2^k + 3t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนนับที่ $t \geq 1$ ได้

กรณี t เป็นจำนวนเต็มคู่ พิจารณากระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$ จะได้ว่าสามารถแบ่งกระดานนี้ออกเป็นสี่ส่วนที่มีขนาดเป็น $2^k \times \left(2^k + \frac{3t}{2}\right)$ เท่ากัน ดังภาพ 2.5

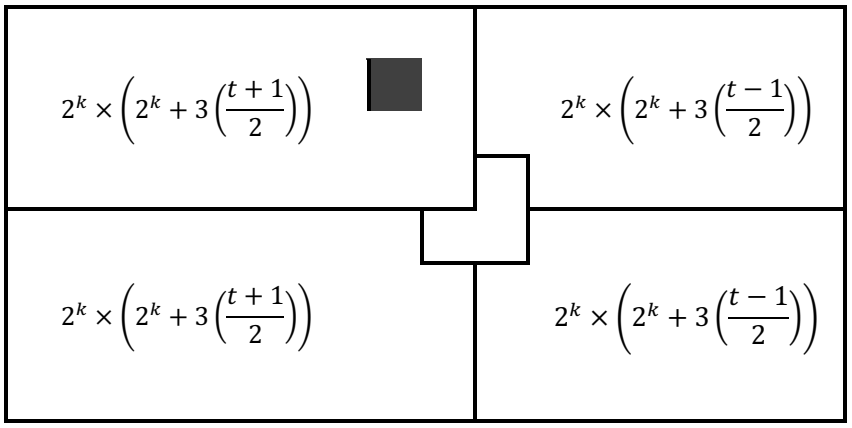


ภาพ 2.5 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มคู่ ออกเป็นสี่ส่วน

โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติให้รูอยู่ตรงตำแหน่งที่แรเงาในภาพ 2.5 จากสมมติฐานอุปนัยจะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + \frac{3t}{2}\right)$ ในส่วนที่ 2 โดยให้รูอยู่ที่มุมขวาบนของกระดานส่วนนี้ได้ สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + \frac{3t}{2}\right)$ ในส่วนที่ 3 โดยให้รูอยู่ที่มุมซ้ายล่างของกระดานส่วนนี้ได้ สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + \frac{3t}{2}\right)$ ในส่วนที่ 4 โดยให้รูอยู่ที่มุมซ้ายบนของกระดานส่วนนี้ได้ ซึ่งรูทั้งสามดังกล่าวนี้สามารถปูทับด้วยกระเบื้องแอล-โทรมิโน 1 ชิ้นได้ดังแสดงภาพ 2.5 นอกจากนี้โดยสมมติฐานอุปนัยจะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + \frac{3t}{2}\right)$ ในส่วนที่ 1 เมื่อรูอยู่ตรงตำแหน่งที่แรเงาได้

จึงทำให้ได้ว่า ไม่ว่ารูจะอยู่ตรงตำแหน่งใดบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว จะสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานนั้นได้เสมอ

กรณี t เป็นจำนวนเต็มคี่ พิจารณากระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$ จะได้ว่าสามารถแบ่งกระดานนี้ออกเป็นสี่ส่วนที่มีขนาดเป็น $2^k \times \left(2^k + 3\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)$ เท่ากันสองส่วน เรียกว่าส่วนที่ 1 และส่วนที่ 2 และที่มีขนาดเป็น $2^k \times \left(2^k + 3\left(\frac{t-1}{2}\right)\right)$ เท่ากันสองส่วน เรียกว่าส่วนที่ 3 และส่วนที่ 4 ดังภาพ 2.6



ภาพ 2.6 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$
เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มคี่ ออกเป็นสี่ส่วน

โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติให้รูอยู่ตรงตำแหน่งที่แรเงาในภาพ 2.6 จากสมมติฐานอุปนัยจะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + 3\left(\frac{t-1}{2}\right)\right)$ ในส่วนที่ 3 โดยให้รูอยู่ที่มุมซ้ายล่างของกระดานส่วนนี้ได้ สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + 3\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)$ ในส่วนที่ 2 โดยให้รูอยู่ที่มุมขวาบนของกระดานส่วนนี้ได้ สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + 3\left(\frac{t-1}{2}\right)\right)$ ในส่วนที่ 4 โดยให้รูอยู่ที่มุมซ้ายบนของกระดานส่วนนี้ได้ ซึ่งรูทั้งสามดังกล่าวนี้สามารถปูทับด้วยกระเบื้องแอล-โทรมิโน 1 ชิ้นได้ดังแสดงภาพ 2.6 นอกจากนี้โดยสมมติฐานอุปนัยจะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^k \times \left(2^k + 3\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)$ ในส่วนที่ 1 เมื่อรูอยู่ตรงตำแหน่งที่แรเงาได้

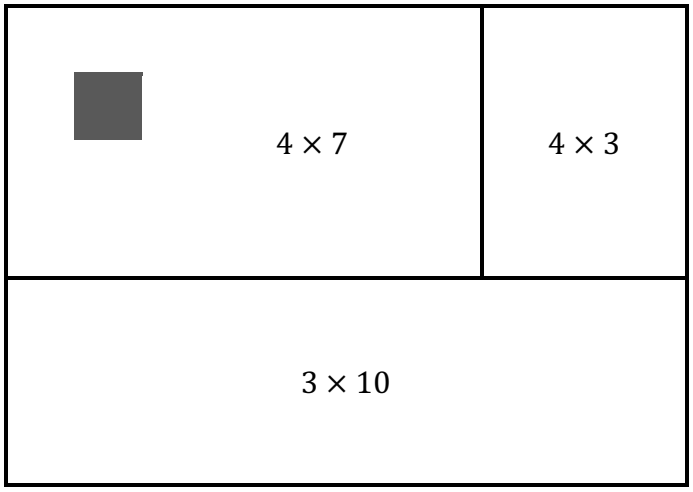
จึงทำให้ได้ว่า ไม่ว่ารูจะอยู่ตรงตำแหน่งใดบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^{k+1} \times (2^{k+1} + 3t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้วจะสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานนั้นได้เสมอ

ดังนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ทำให้สรุปได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^n \times (2^n + 3t)$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $t \geq 1$ ได้ □

ทฤษฎีบท 2.3 สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6t)$ เมื่อ $t \geq 1$ ได้

บทพิสูจน์ จะพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

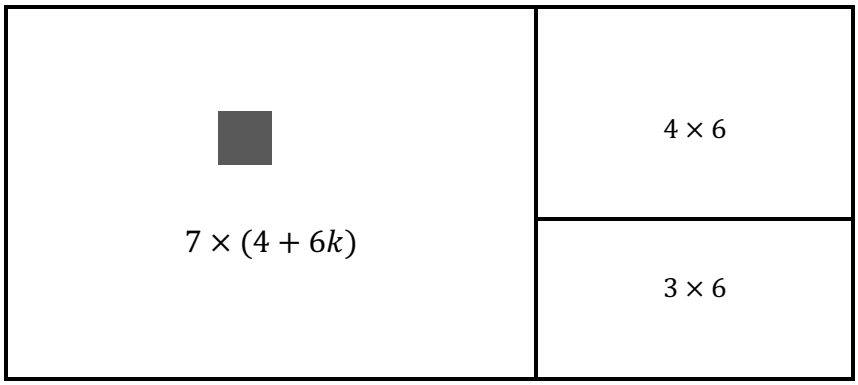
ขั้นฐาน ให้ $t = 1$ จากความสมมาตรของกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 จะเห็นได้ว่าเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาเฉพาะตำแหน่ง (i, j) ของรูเมื่อ $i \in \{1,2,3,4\}$ และ $j \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ เมื่อแบ่งกระดานดังกล่าวออกเป็นสามส่วน ขนาด 4×7, 4×3 และ 3×10 ดังภาพ 2.7 จะได้ว่ารูจะอยู่ในตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7 ซึ่งโดยทฤษฎีบท 2.1 และ ทฤษฎีบทประกอบ 1.3 สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 ได้



ภาพ 2.7 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 7×10 ออกเป็นสามส่วน โดยมีรูอยู่ในกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด 4×7

ขั้นอุปนัย ให้ k เป็นจำนวนนับที่ $k \geq 1$ สมมติว่า สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6k)$ ได้

พิจารณากระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6(k + 1))$ จากความสมมาตรของกระดานดังกล่าว จะเห็นได้ว่าเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาเฉพาะตำแหน่ง (i, j) ของรูเมื่อ $j \in \{1,2,3, \dots ,2 + 3k\}$ จะได้ว่าเมื่อแบ่งกระดานนี้ออกเป็นสามส่วนที่มีขนาดเป็น $7 \times (4 + 6k)$, 4×6 และ 3×6 ดังภาพ 2.8 รูของกระดานจะอยู่ในส่วนที่มีขนาด $7 \times (4 + 6k)$ เท่านั้น



ภาพ 2.8 การแบ่งกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6(k + 1))$ ออกเป็นสามส่วน

โดยสมมติฐานอุปนัยจะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6k)$ ในส่วนที่ 1 โดยรูอยู่ตำแหน่งใด ๆ บนกระดานได้ และโดยทฤษฎีบทประกอบ 1.3 จะได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานขนาด 4×6 และ 3×6 ได้ จึงทำให้ได้ว่าไม่ว่ารูจะอยู่ตรงตำแหน่งใดบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6(k + 1))$ แล้วจะสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานนั้นได้เสมอ

ดังนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ทำให้สรุปได้ว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6t)$ เมื่อ $t \geq 1$ ได้ □

บทที่ 3
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

โครงงานฉบับนี้ได้ข้อสรุปว่า ถ้าขนาดของกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องอยู่ในรูป

(i) $2^n \times (2^n + 3t)$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $t \geq 1$ และ

(ii) $7 \times (4 + 6t)$ เมื่อ $t \geq 1$

แล้วจะสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานดังกล่าวได้

สังเกตว่าสำหรับกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $7 \times (4 + 6t)$ เมื่อ $t = 0$ จะมีขนาดเท่ากับรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $2^n \times (2^n + 3t)$ เมื่อ $n = 2$ และ $t = 1$ ด้วยแนวคิดเดียวกันนี้ ข้าพเจ้าคาดว่าผู้ที่สนใจจะสามารถขยายขนาดกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องจนทำให้ได้ข้อสรุปว่าสามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด $(2^n + 3) \times (2^n + 6l)$ เมื่อ $n \geq 2$ และ $l \geq 1$ ได้

เอกสารอ้างอิง

[1] I-Ping Chu, Richard Johnsonbaugh. Tiling Deficient Boards with Trominoes. Mathematics Magazine, 59 No.1 (1986) 34-40.

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2561

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่อง
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Tiling Deficient Rectangular Boards with L-Trominoes
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ
ผู้ดำเนินการ	นางสาวณัฏฐณิชา สงวนพันธ์ รหัสประจำตัวนิสิต 5833514923
	สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
	คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ในปี ค.ศ. 1986 Chu และ Johnsonbaugh ได้ศึกษาวิธีการปูกระเบื้องขนาด 3 ตารางหน่วยรูปตัวแอลหรือแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสพร่อง ซึ่งก็คือกระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด n x n ที่มีรูขนาด 1 x 1 บนกระดานตรงตำแหน่งใดก็ได้ จากการศึกษาของทั้งสองพบว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ ที่ $n \neq 5$ และ 3 หาร n ไม่ลงตัว สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสพร่องได้เสมอ

ในโครงงานนี้ต้องการขยายแนวคิดของทั้งสองโดยการปูกระเบื้องลักษณะเดียวกันลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n ซึ่งคือกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด m x n ที่มีรูขนาด 1 x 1 บนกระดานตำแหน่งใดก็ได้ และพิจารณาว่ากระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาดใดบ้างที่สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนได้โดยที่รูสามารถอยู่ได้ทุกตำแหน่งบนกระดาน

วัตถุประสงค์

เพื่อหาแบบรูปของ m และ n ที่ทำให้สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n โดยที่รูสามารถอยู่ในตำแหน่งใด ๆ ก็ได้บนกระดาน และหากปูได้จะนำเสนอวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n ดังกล่าว

ขอบเขตของโครงงาน

โครงงานนี้มุ่งศึกษาเฉพาะกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n และการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนเท่านั้น โดยมีเงื่อนไขว่าต้องไม่มีการตัดแต่งกระเบื้อง ไม่ปูกระเบื้องทับกัน และกระเบื้องที่ปูไม่ปิดรูขนาด 1 x 1 บนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องดังกล่าว

วิธีการดำเนินงาน

แผนการศึกษา

1. ศึกษาวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสพร่องแต่ละขนาดและวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานดังกล่าวเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งของรูขนาด 1 x 1 บนกระดาน
2. ศึกษาวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n
3. หาแบบรูปของ m และ n ที่สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n ได้

ระยะเวลาที่ศึกษา

ขั้นตอนการดำเนินการ	เดือน								
	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1. ศึกษาเนื้อหาที่เกี่ยวข้องและเสนอหัวข้อโครงงาน									
2. ดำเนินการโครงงาน - ศึกษาวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีพร่องแต่ละขนาดและวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนลงบนกระดานดังกล่าวเมื่อเปลี่ยนตำแหน่งของรูขนาด 1 x 1 บนกระดาน - ศึกษาวิธีการปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n - หาแบบรูปของ m และ n ที่สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n ได้									
3. เขียนรายงานและนำเสนอโครงงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทราบแบบรูปของ m และ n ที่สามารถปูกระเบื้องแอล-โทรมิโนบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากพร่องขนาด m x n ได้
2. ได้ฝึกฝนการคิด วิเคราะห์ ตั้งคำถามและขยายปัญหา

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

Microsoft Word Microsoft Powerpoint และ กระดาษ A4

งบประมาณ

1. กระดาษ A4 ราคา 1,000 บาท
2. ค่าถ่ายเอกสาร ราคา 1,000 บาท
3. หมึกเครื่องพิมพ์ ราคา 2,000 บาท

เอกสารอ้างอิง

1. สุธี ทวีวัฒนานนท์. (2014). Tiling Deficient Boards with Trominoes. Retrieved October 18, 2018, from https://slideplayer.in.th/slide/2278501/?fbclid=IwAR3RVoDDo3xXrx80JxjI9_VT4 X1WvX2_6rYg74uZyZ6D3k4pGSJ9ndr6ji8.

2. I-Ping Chu, Richard Johnsonbaugh. Tiling Deficient Boards with Trominoes. Mathematics Magazine, 59 No.1 (1986) 34-40.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวณัฏฐณิชา สงวนพันธ์

รหัสนิสิต 5833514923

สาขา คณิตศาสตร์

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย