



ตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ใน รูปแบบ AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE

จากตัวแบบการระดมทุนในกองทุนบำนาญ โดยกำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Autoregressive และ Moving Average ในบทนี้เราจะสร้างตัวแบบการระดมทุน โดยกำหนดอัตราผลตอบแทนการลงทุนอยู่ในรูปแบบ Autoregressive Moving Average ซึ่งตัวแบบดังกล่าว จะอาศัยคุณสมบัติบางประการของทั้งตัวแบบ Autoregressive และ Moving Average มาใช้ในการสร้างตัวแบบ โดยที่ขั้นตอน และวิธีการสร้างตัวแบบนี้เหมือนกับตัวแบบดังกล่าวทั้งสอง ซึ่งวิธีนี้จะเป็นระบบสะสมเงินล่วงหน้าเต็มจำนวน(Fully Funded) เช่นเดียวกัน

5.1 ตัวแบบ Autoregressive Moving Average

ในบทนี้เราจะสร้างตัวแบบอัตราผลตอบแทนการลงทุนที่อยู่ในรูปแบบ Autoregressive Moving Average ในลำดับที่ 1, 1 (ARMA(1, 1))

กำหนดให้ Force of Interest อยู่ในรูปแบบ Stationary ตามกระบวนการ Autoregressive Moving Average ในลำดับที่ 1 (ARMA(1, 1)) ดังนี้

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \theta + \varphi(\delta(t-1) - \theta) + e(t) - \omega e(t-1) \\ &= a + \varphi\delta(t-1) + e(t) - \omega e(t-1)\end{aligned}\quad (5.1.1)$$

เมื่อ $a = (1 - \varphi)\theta$

และ $e(t)$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบปกติที่เหมือนกันและเป็นอิสระจากกัน ซึ่ง $E[e(t)] = 0$ และ $Var[e(t)] = \gamma^2, t = 1, 2, \dots$

การดำเนินการแบบ Autoregressive Moving Average และเงื่อนไขการเป็น Stationary คือ $-1 < \varphi < 1$ และ $-1 < \omega < 1$ ดังนั้นอินเวอร์สของ Autoregressive Moving Average สามารถเขียนในเทอมของ Autoregressive และ Moving Average ได้จากสมการ(5.1.1)ดังนี้

$$(\delta(t) - \theta) - \varphi(\delta(t-1) - \theta) = e(t) - \omega e(t-1)$$

$$(1 - \varphi B)(\delta(t) - \theta) = (1 - \omega B)e(t)$$

เมื่อ B คือ Backward Operator

$$\delta(t) - \theta = (1 - \varphi B)^{-1}(1 - \omega B)e(t)$$

$$\delta(t) - \theta = e(t) + \psi_1 e(t-1) + \psi_2 e(t-2) + \dots$$

เมื่อ $\psi_i = (\varphi - \omega)\varphi^{i-1}, i \geq 1$

หรือ $(1 - \varphi B)(1 - \omega B)^{-1}(\delta(t) - \theta) = e(t)$

$$(\delta(t) - \theta) - \pi_1(\delta(t-1) - \theta) - \dots = e(t)$$

เมื่อ $\pi_i = (\varphi - \omega)\omega^{i-1}, i \geq 1$

ตัวแบบดังกล่าวอัตราผลตอบแทนการลงทุน ณ ปัจจุบัน จะขึ้นอยู่กับระดับของสัมประสิทธิ์ของอัตราผลตอบแทนการลงทุน กับระดับของสัมประสิทธิ์ของความคลาดเคลื่อนในช่วงเวลาที่ผ่านมา ตามหลักของ Box and Jenkins แล้วจะได้ว่า

$$E[\delta(t)] = \theta$$

จากตัวแบบ ARMA(1, 1) จะสามารถกำหนดความสัมพันธ์ของ $Cov[\delta(t), \delta(s)]$ ที่ $|t-s|$ ต่างๆ ได้ดังนี้

กำหนดให้ $\rho_{|t-s|}$ แทน $Cov[\delta(t), \delta(s)]$

$$\rho_0 = E[\delta(t)\delta(t)] = \varphi E[\delta(t)\delta(t-1)] + E[e(t)\delta(t)] - \omega E[e(t-1)\delta(t)]$$

$$\begin{aligned} \text{ซึ่ง} \quad E[e(t)\delta(t)] &= \varphi E[e(t)\delta(t-1)] + E[e(t)e(t)] - \omega E[e(t)e(t-1)] \\ &= \gamma^2 \end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะเห็นว่าเทอม $E[e(t)e(t)] = \gamma^2$ นอกนั้นทุกเทอมมีค่าเท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad E[e(t-1)\delta(t)] &= \varphi E[e(t-1)\delta(t-1)] + E[e(t-1)e(t)] - \omega E[e(t-1)e(t-1)] \\ &= (\varphi - \omega)\gamma^2 \end{aligned}$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะเห็นว่าเทอม $E[e(t-1)\delta(t-1)] = E[e(t-1)e(t-1)] = \gamma^2$ ส่วนเทอมที่เหลือมีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\rho_0 = \varphi\rho_0 + (1 - \varphi\omega + \omega^2)\gamma^2 \quad (5.1.2)$$

จากคุณสมบัติของความแปรปรวนร่วม (Covariance) ของ MA(1) ที่ $|t-s| = 1$ ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\rho_1 = \varphi\rho_0 - \omega\gamma^2$$

และจากความสัมพันธ์ของสมการ(5.1.2)

$$\begin{aligned} \therefore \quad \rho_0 &= \varphi(\varphi\rho_0 - \omega\gamma^2) + (1 - \varphi\omega + \omega^2)\gamma^2 \\ &= \frac{1 - 2\varphi\omega + \omega^2}{1 - \varphi^2}\gamma^2 \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

และจากความสัมพันธ์ของสมการ(5.1.3)

$$\therefore \quad \rho_1 = \frac{\varphi - \varphi^2\omega + \varphi\omega^2 - \omega}{1 - \varphi^2}\gamma^2 \quad (5.1.4)$$

และจากคุณสมบัติของความแปรปรวนร่วม (Covariance) ของ MA(1) ที่ $|t-s| > 1$ ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\rho_2 = \varphi\rho_1$$

$$\rho_3 = \varphi\rho_2 = \varphi^2\rho_1$$

.....

$$\therefore \quad \rho_{|t-s|} = \varphi^{|t-s|-1}\rho_1$$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวข้างต้น จึงสามารถสรุปความสัมพันธ์ต่างๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Var}[\delta(t)] &= \rho_0 \\ &= \frac{1-2\phi\omega + \omega^2}{1-\phi^2} \gamma^2 = \nu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\delta(t), \delta(s)] &= \rho_{|t-s|} \\ &= \phi^{|t-s|-1} \rho_1, \quad |t-s| \geq 1 \end{aligned}$$

เงื่อนไขที่จะทำให้การดำเนินการของ ARMA(1, 1) เป็น Stationary คือ $|\phi| < 1$ และ $|\omega| < 1$ ซึ่งจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้เป็นดังต่อไปนี้

$$E[e^{\delta(t)}] = e^{\theta + \frac{1}{2}\nu^2} = 1 + i$$

$$\text{Var}[e^{\delta(t)}] = e^{2\theta + \nu^2} (e^{\nu^2} - 1)$$

การหาค่า Expected value ของ $F(t)$ และ $C(t)$ ตามที่กำหนดให้การแจกแจงความน่าจะเป็นของ $e(t)$ เป็นไปตามสมมติฐานที่กำหนดไว้ข้างต้น จะสามารถแสดงค่า $EF(t)$ ได้ดังต่อไปนี้

จากสมการ(4.1.1.6)

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] = \exp\{E[\Delta(t)-\Delta(s)] + \frac{1}{2}\text{Var}[\Delta(t)-\Delta(s)]\}$$

$$E[\Delta(t)-\Delta(s)] = (t-s)\theta$$

$$\text{Var}[\Delta(t)-\Delta(s)] = (t-s)\nu^2 + \frac{2\rho_1}{\phi} G(t,s)$$

$$\begin{aligned}
\text{ซึ่ง} \quad G(t, s) &= \sum_{u=s+1}^t \sum_{w=u+1}^t \varphi^{w-u} \\
&= \sum_{u=s+1}^t \sum_{w=x}^{t-u} \varphi^x && \text{เมื่อ } x = w - u \\
&= \sum_{x=1}^{t-s-1} (t-s-x) \varphi^x \\
&= \sum_{x=1}^{t-s} (t-s-x) \varphi^x \\
&= (t-s) \left(\frac{\varphi}{1-\varphi} \right) - \frac{\varphi(1-\varphi^{t-s})}{(1-\varphi)^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{Var}[\Delta(t) - \Delta(s)] = (t-s) V^2 + 2\rho_1 \left[\frac{t-s}{1-\varphi} - \frac{1-\varphi^{t-s}}{(1-\varphi)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
E[e^{\Delta(t) - \Delta(s)}] &= \exp\left\{ (t-s) \left(\theta + \frac{1}{2} V^2 + \frac{\rho_1}{1-\varphi} \right) - \rho_1 \frac{1-\varphi^{t-s}}{(1-\varphi)^2} \right\} \\
&= \zeta^{t-s} e^{-\mu(1-\varphi^{t-s})}
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

$$\therefore E[e^{\Delta(t)}] = \zeta^t e^{-\mu(1-\varphi^t)} \tag{5.1.6}$$

$$\text{เมื่อ} \quad \zeta = \exp\left\{ \theta + \frac{1}{2} V^2 + \frac{\rho_1}{1-\varphi} \right\} = c e^{\frac{\rho_1}{1-\varphi}}$$

$$\text{ซึ่ง} \quad c = \exp\left\{ \theta + \frac{1}{2} V^2 \right\} = E[e^{\delta^{(1)}}] = 1+i$$

$$\text{และ} \quad \mu = \frac{\rho_1}{(1-\varphi)^2}$$

จากสมการ(4.1.1.9) และสมการ(5.1.5) และ (5.1.6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
EF(t) &= F_0 Q^t E[e^{\Delta(t)}] + R \sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s-1} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)}] \\
&= F_0 Q^t \zeta^t e^{-\mu(1-\varphi^t)} + \frac{R}{Q} \sum_{s=0}^{t-1} Q^{t-s} \zeta^{t-s} e^{-\mu(1-\varphi^{t-s})} \\
&= F_0 (Q\zeta)^t e^{-\mu(1-\varphi^t)} + \frac{R}{Q} \sum_{s=0}^{t-1} (Q\zeta)^{t-s} e^{-\mu(1-\varphi^{t-s})}
\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

ถ้ากำหนดให้ $Q\zeta < 1$ แล้ว $\lim_{t \rightarrow \infty} EF(t)$ จะสามารถหาค่าได้ (ทดสอบการลู่เข้าของ $EF(t)$) จากสมการ(4.1.1.10)

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} EF(t) \cong \frac{R}{Q} \frac{Q\zeta}{1-Q\zeta} e^{-\mu} = \frac{AL(k-d)\zeta}{1-Q\zeta} e^{-\mu} \tag{5.1.8}$$

การประมาณค่าจากสมการดังกล่าว จะใช้ค่า φ และ ω ไม่เกิน ± 1 และใช้ค่า V ที่ไม่ใหญ่จนเกินไป

ข้อสังเกตของผลลัพธ์ที่ได้คือ

1) ค่าลิมิตของ $EF(t)$ มีค่าในลักษณะเดียวกับ AR(1) และ MA(1) ซึ่งค่าลิมิตของ $EF(t)$ นั้นไม่เท่ากับ AL ต่างจากกรณีตัวแบบที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนมีคุณสมบัติการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหมือนกัน และเป็นอิสระจากกันในรูปแบบทั่วไป เพราะว่าเงื่อนไขในตัวแบบอัตราผลตอบแทนการลงทุน อยู่ในรูป Exponential ของ $\delta(t)$

2) การทดสอบการลู่เข้าของ $\lim_{t \rightarrow \infty} EF(t)$ จะต้องมึเงื่อนไข $Q\zeta < 1$ ซึ่งจะสมมูลกับ

$$\theta + \frac{1}{2} V^2 + \frac{\rho_1}{1-\varphi} < \ln(1-k)$$

$$\text{หรือ} \quad M_1 = \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta V - 1} \right) > m = M \tag{5.1.9}$$

$$\text{และจาก} \quad c = \exp \left\{ \theta + \frac{1}{2} V^2 \right\} = 1 + i$$

$$\therefore \theta = \ln(1+i) - \frac{1}{2} V^2$$

ตารางที่ 1 แสดงค่าความแตกต่างของ M_t ซึ่งเกิดจากค่า i, V, φ และ ω ที่เปลี่ยนแปลงตามสมการ (5.1.9) โดยค่า $\varphi < 0$ และ $\omega < 0$ ไม่สามารถนำมาใช้กับสมการดังกล่าวได้ เนื่องจากค่าดังกล่าวจะทำให้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $Q\zeta < 1$ จากตารางดังกล่าวจะสรุปได้ดังนี้

ในกรณีที่ i มีค่าคงที่ แล้ว M_t จะลดลงตามค่า ω (ในกรณีที่ V และ φ มีค่าคงที่) ค่าของ M_t จะลดลง ตรงข้ามกับค่า φ ที่เพิ่มขึ้น (เมื่อ V และ ω มีค่าคงที่) และ M_t จะลดลง ตรงข้ามกับค่า V ที่เพิ่มขึ้น (เมื่อ φ และ ω มีค่าคงที่) ส่วนในกรณีที่ i เพิ่มขึ้น แล้ว M_t จะลดลง (เมื่อ V, ω และ φ มีค่าคงที่) และจากความสัมพันธ์ของ $F(t)$ และ $C(t)$ จากสมการ(3.2.1.1.4) คือ

$$EC(t) = NC + k(AL - EF(t))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} EC(t) \cong NC + AL \frac{k(1-Q\zeta)}{1-Q\zeta} e^{-\mu} \quad (5.1.10)$$

การหาค่า Variance ของ $F(t)$ และ $C(t)$ สามารถพิจารณาได้ในลักษณะเดียวกับ AR(1) ที่กล่าวในบทที่ 4 และจากสมการ (4.1.1.14) จะได้ว่า

$$E[F(t)^2] = \frac{2R^2}{Q^2} \sum_{r=1}^{t-1} \sum_{s=0}^{r-1} Q^{t-s} Q^{t-r} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] + \frac{R^2}{Q^2} \sum_{s=0}^{t-1} Q^{2(t-s)} E[e^{2(\Delta(t)-\Delta(s))}]$$

$$E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] = \exp\{(t-s)\theta + (t-r)\theta + \frac{1}{2} \text{Var}[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)]\}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)] &= \text{Var}[\Delta(r) - \Delta(s)] + 4 \text{Var}[\Delta(t) - \Delta(r)] \\ &\quad + 4 \text{Cov}[\Delta(r) - \Delta(s), \Delta(t) - \Delta(r)] \end{aligned}$$

จากลักษณะเดียวกันที่กล่าวมาแล้วในการหาค่า $\text{Var}[\Delta(t) - \Delta(s)]$ ของ $EF(t)$ (หน้าที่ 83) ดังนั้น

$$\text{Var}[\Delta(r) - \Delta(s)] = (r-s)V^2 + 2\rho_1 \left[\frac{r-s}{1-\varphi} - \frac{1-\varphi^{r-s}}{(1-\varphi)^2} \right]$$

$$\text{และ } \text{Var}[\Delta(t) - \Delta(r)] = (t-r)V^2 + 2\rho_1 \left[\frac{t-r}{1-\varphi} - \frac{1-\varphi^{t-r}}{(1-\varphi)^2} \right]$$

เช่นเดียวกับ AR(1) (หน้าที่ 55) ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\Delta(r) - \Delta(s), \Delta(t) - \Delta(r)] &= \frac{\rho_1}{\varphi} \sum_{u=s+1}^r \sum_{w=r+1}^t \varphi^{|u-w|} \\ &= \frac{\rho_1}{(1-\varphi)^2} (1 - \varphi^{t-r} - \varphi^{r-s} + \varphi^{t-s}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Var}[\Delta(t) - \Delta(s) + \Delta(t) - \Delta(r)] &= (t-s + 3(t-r)) \left(V^2 + \frac{2\rho_1}{1-\varphi} \right) \\ &\quad - \frac{2\rho_1}{(1-\varphi)^2} (3 - 2\varphi^{t-r} - 2\varphi^{t-s} + \varphi^{r-s}) \end{aligned}$$

จากเทอมต่างๆ ของ $E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}]$ ที่ได้แสดงมาแล้ว ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} E[e^{\Delta(t)-\Delta(s)+\Delta(t)-\Delta(r)}] &= \exp\left\{ (t-s) \left(\theta + \frac{1}{2} V^2 + \frac{\rho_1}{1-\varphi} \right) + (t-r) \left(\theta + \frac{3}{2} V^2 + \frac{3\rho_1}{1-\varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho_1}{(1-\varphi)^2} (3 - 2\varphi^{t-r} - 2\varphi^{t-s} + \varphi^{r-s}) \right\} \\ &= \zeta^{t-s} \mathfrak{A}^{t-r} \exp\{-3\mu + 2\varphi^{t-r}\mu + 2\varphi^{t-s}\mu - \varphi^{r-s}\mu\} \quad (5.1.11) \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } \mathfrak{A} = \exp\left\{ \theta + \frac{3}{2} V^2 + \frac{3\rho_1}{1-\varphi} \right\}$$

ส่วน $E[e^{2(\Delta(t)-\Delta(s))}]$ จะเป็นไปในลักษณะเดียวกับ สมการ(5.1.11) ในกรณีที่ $r=s$ จะได้ว่า

$$E[e^{2(\Delta(t)-\Delta(s))}] = \zeta^{t-s} \mathfrak{A}^{t-s} \exp\{-4\mu + 4\varphi^{t-s}\mu\} \quad (5.1.12)$$

จากสมการ(4.1.1.14) เมื่อรวมเทอมต่างๆ ของ $E[F(t)^2]$ ที่กล่าวมาแล้วจะได้

$$\begin{aligned}
 E[F(t)^2] &= \frac{2R^2}{Q^2} \sum_{r=1}^{t-1} \sum_{s=0}^{r-1} Q^{t-s} Q^{t-r} \zeta^{t-s} \vartheta^{t-r} \exp\{-3\mu + 2\varphi^{t-r}\mu + 2\varphi^{t-s}\mu - \varphi^{r-s}\mu\} \\
 &+ \frac{R^2}{Q^2} \sum_{s=0}^{t-1} Q^{2(t-s)} \zeta^{t-s} \vartheta^{t-s} \exp\{-4\mu + 4\varphi^{t-s}\mu\} \\
 &= \frac{2R^2}{Q^2} \sum_{r=1}^{t-1} \sum_{s=0}^{r-1} (Q\zeta)^{t-s} (Q\vartheta)^{t-r} \exp\{\mu(-3 + 2\varphi^{t-r} + 2\varphi^{t-s} - \varphi^{r-s})\} \\
 &+ \frac{R^2}{Q^2} \sum_{s=0}^{t-1} (Q^2\zeta\vartheta)^{t-s} \exp\{4\mu(-1 + \varphi^{t-s})\}
 \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

ถ้า $Q\zeta < 1$ และ $Q^2\zeta\vartheta < 1$ แล้วจากสมการ (4.1.1.10) จะได้ว่า

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[F(t)^2] \cong e^{-3\mu} \frac{2R^2 Q \zeta^2 \vartheta}{(1-Q\zeta)(1-Q^2\zeta\vartheta)} + e^{-4\mu} \frac{R^2 \zeta \vartheta}{1-Q^2\zeta\vartheta} \tag{5.1.14}$$

ซึ่งสมการดังกล่าวจะลู่อเข้า ที่ $t \rightarrow \infty$ เมื่อ $Q\zeta < 1$ และ $Q^2\zeta\vartheta < 1$ และสมมูลกับ

$$M_2 = \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{Q^2\zeta\vartheta < 1}{\sqrt{\zeta\vartheta} - 1} \right) > m = M \tag{5.1.15}$$

ตารางที่ 2 แสดงค่าความแตกต่างของ $M_2 < M$, ซึ่งมาจาก i, V, φ และ ω ที่เปลี่ยนแปลงตามสมการ (5.1.15) ซึ่งค่า $\varphi < -0.1$ และ $\omega > -0.1$ ไม่สามารถนำมาใช้กับสมการดังกล่าวได้ เนื่องจากค่าดังกล่าวจะทำให้ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $Q^2\zeta\vartheta < 1$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ครอบคลุมกว่า $Q\zeta < 1$ จากตารางดังกล่าวสามารถสรุปได้ดังนี้

ในกรณีที่ i มีค่าคงที่ แล้ว M_2 จะลดลงตามค่า ω (กรณีที่ V และ φ มีค่าคงที่), M_2 จะลดลง ตรงข้ามกับค่า φ ที่เพิ่มขึ้น(เมื่อ V และ ω มีค่าคงที่) และ M_2 จะลดลง ตรงข้ามกับค่า V

ที่เพิ่มขึ้น(กรณีที่ φ และ ω มีค่าคงที่) ส่วนในกรณีที่ i เพิ่มขึ้น แล้ว M , จะลดลง ตรงข้ามกับค่า i ที่เพิ่มขึ้น(กรณีที่ V , ω และ φ มีค่าคงที่)

จากสมการ(5.1.14) ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}F(t) &\cong \lim_{t \rightarrow \infty} E[F(t)^2] - \lim_{t \rightarrow \infty} E[F(t)]^2 \\ &\cong e^{-3\mu} \frac{2R^2 Q \zeta^2 \exists}{(1-Q\zeta)(1-Q^2\zeta\exists)} + e^{-4\mu} \frac{R^2 \zeta \exists}{(1-Q^2\zeta\exists)} - e^{-2\mu} \frac{R^2 \zeta^2}{(1-Q\zeta)^2} \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

และจากความสัมพันธ์ของ $F(t)$ และ $C(t)$ จากสมการ(3.2.1.1.4) คือ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}C(t) = k^2 \lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}F(t) \quad (5.1.17)$$

การหาช่วงเวลาที่เหมาะสมกับค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบ(Optimal Spread Period) เราจะศึกษาพฤติกรรมของค่าลิมิต $\text{Var}C(t)$ และ $\text{Var}F(t)$ ภายใต้วิธี Spread ของกองทุน บำนาญรายสามัญ ฟังก์ชัน $\text{Var}C(t)$ และ $\text{Var}F(t)$ ขึ้นอยู่กับค่าของ M (หรือสมมูลกับ ฟังก์ชัน k) โดยภายใต้การกำหนดค่าคงที่บางค่า (i, V, φ, ω, M) เราจะสามารถหาช่วงเวลาที่เหมาะสมกับค่าปรับปรุงอัตราเงินสมทบที่ดีที่สุด (M^*) ได้จากการคำนวณ

$$J(M) = \frac{(\text{Var}F(\infty))^2}{|EF(\infty)|} \quad \text{และ} \quad L(M) = \frac{(\text{Var}C(\infty))^2}{|EC(\infty)|} \quad (5.1.18)$$

การคำนวณจะมีการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

เงินเดือน = คงที่ (กำหนดให้เท่ากับ 1)

ตารางเงินเดือน(Salary Scale) = คงที่

NC = ร้อยละ 3 ของเงินเดือน

เงินผลประโยชน์เมื่อเกษียณอายุ(B) = 2/3 ของเงินเดือน (Life Annuity)

อายุเกษียณ = 60 ปี

ค่าพารามิเตอร์ที่นำมาใช้ในการคำนวณได้กำหนดขึ้นดังนี้

$$i : -0.01, +0.005, +0.01, +0.03, +0.05$$

$$V: 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35$$

$$\varphi: +0.1, +0.3, +0.5, +0.7, +0.9$$

$$\omega: -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9$$

$$M: \text{เพิ่มขึ้นทีละ 1 ถึง 100}$$

เมื่อนำเงื่อนไข และค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้น ไปใช้ในการคำนวณค่าในสมการ (5.1.18) ผลลัพธ์ที่ได้ แสดงในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 แสดงค่าความสัมพันธ์ระหว่าง Standard Deviation ของ $F(t)$ และ $C(t)$ ที่ $t \rightarrow \infty$ โดยใช้พารามิเตอร์เพียงบางค่า ($i = 0.01$, $V = 0.05$ และ 0.10) ในการคำนวณเท่านั้น จากตารางดังกล่าวเห็นได้ชัดว่าพารามิเตอร์บางค่า นั้นไม่เป็นไปตามเงื่อนไขการลู่ออกของ $F(t)$ ซึ่งก็คือ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $Q^2 \zeta < 1$ ผลที่ได้จากตารางดังกล่าวสามารถสรุปได้ ดังนี้

1) $J(M)$ เพิ่มขึ้นตาม M (เมื่อ φ , ω คงที่) และลดลงตาม φ ที่ลดลง และ ω ที่เพิ่มขึ้น (เมื่อ M คงที่)

2) $L(M)$ ลดลงตาม φ ที่ลดลง และ ω ที่เพิ่มขึ้น (เมื่อ M คงที่) และลดลงตาม M ที่เพิ่มขึ้น (เมื่อ φ, ω คงที่) ยกเว้นบางค่าซึ่งจะลดลงจนถึงจุดต่ำสุด (M^*) แล้วหลังจากนั้นจะค่อยๆ เพิ่มขึ้น เช่นในตารางที่ 3ก ที่ $M = 50$ ($\varphi = 0.5$, $\omega = -0.5$)

จากความสัมพันธ์ดังกล่าว เมื่อนำ $J(M)$ และ $L(M)$ มาสร้างกราฟ (เมื่อ φ , ω คงที่) จะเกิดกราฟได้ทั้งหมด 4 แบบ (ดูรูปที่ 1) ดังต่อไปนี้

แบบ A : กราฟจะมีจุดต่ำสุดที่ M^* และช่วงเวลาที่เหมาะสมคือ $1 \leq M \leq M^*$

แบบ B : กราฟจะมีจุดต่ำสุดที่ M^* แต่ช่วงเวลาที่เหมาะสมจะเป็น $M_1 \leq M \leq M^*$

แบบ C : กราฟจะมีลักษณะลดลงไปในทิศทางเดียวกัน และไม่มีจุดต่ำสุด ดังนั้นในการเลือกช่วงเวลาที่เหมาะสมอาจจะขึ้นอยู่กับปัจจัยอื่นๆ ที่จะนำมาใช้ในการเลือก M^* และอาจจะขึ้นอยู่กับทัศนคติของแต่ละบุคคลที่จะเลือกใช้ระหว่างค่าการระดมทุน (F) หรือเงินสมทบ (C) ของกองทุนบำนาญ

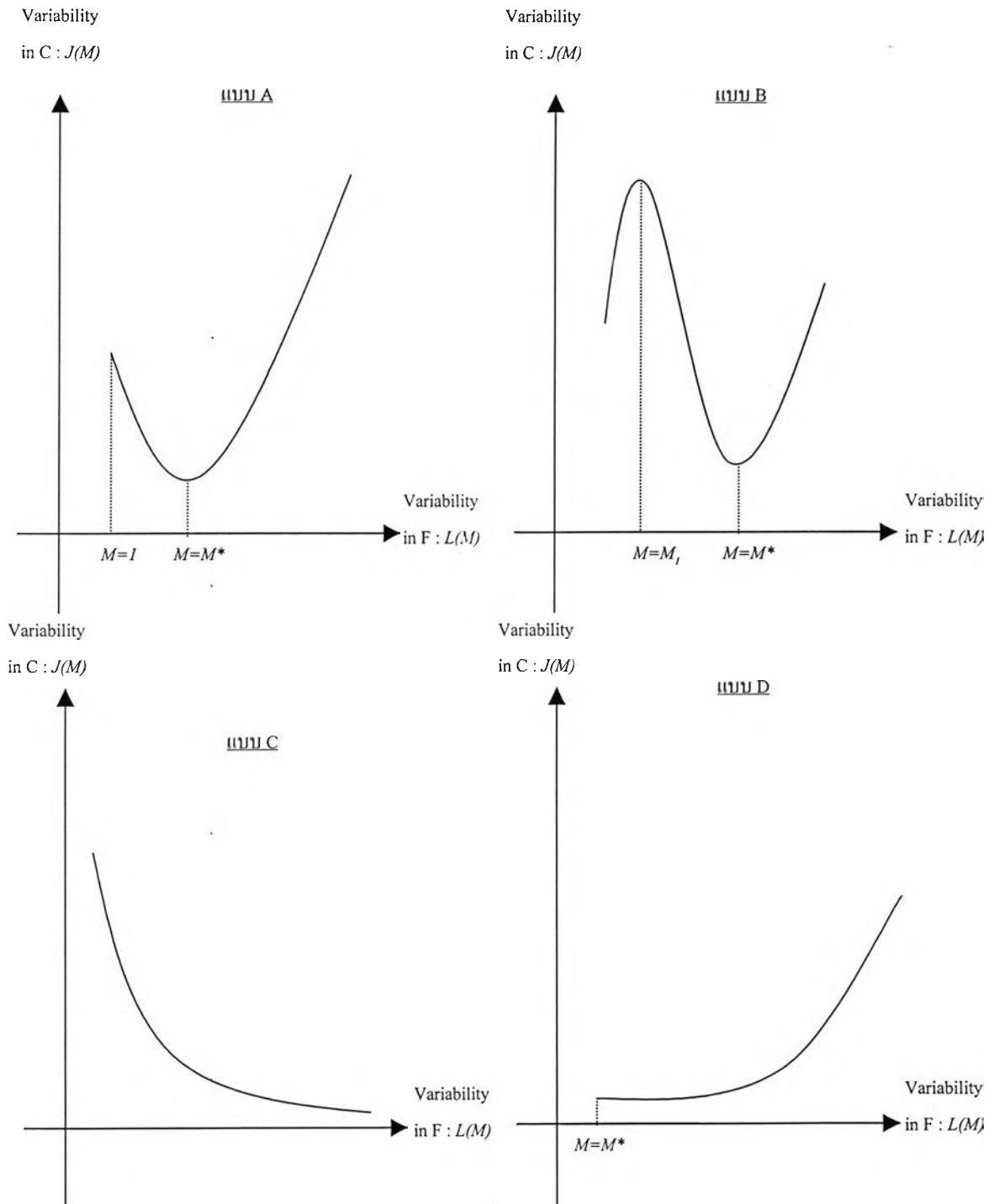
แบบ D : กราฟจะมีลักษณะเพิ่มขึ้นในทิศทางเดียวกัน M^* ที่เหมาะสมจะเท่ากับ 1 หรืออาจจะเป็นค่าอื่นๆ ในกรณีที่ $M = 1$ ไม่เป็นไปตามเงื่อนไข $\rho^2 \zeta < 1$

ตารางที่ 4 – 8 แสดงรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่าง $J(M)$ และ $L(M)$ และช่วงเวลาที่เหมาะสมของ $M (M^*)$ เมื่อกำหนด $\rho = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ และ $\omega = -0.9, -0.7, -0.5, -0.3, -0.1$ (กรณีที่ i, V เป็นไปตามที่กำหนดไว้) ค่าที่แสดงในตารางคือจุดผกผันที่เกิดจากกราฟ $J(M) - L(M)$ ในรูปแบบต่างๆ

จากผลลัพธ์ที่ได้ จะเห็นว่า ที่ $i = -0.01$ ของทุกๆ ρ, ω และ V จะได้กราฟรูปแบบ D ที่มีค่า M^* ต่างกัน (ยกเว้นบางค่าที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไข $\rho^2 \zeta < 1$) และรูปแบบของกราฟส่วนใหญ่จะเป็นรูปแบบ A และ B (ยกเว้น V และ i บางค่า) และกราฟรูปแบบ A และ B จะเกิดขึ้นน้อยลง โดยจะมีกราฟรูปแบบ C และ D เกิดขึ้นมาแทน เมื่อ ρ มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งกราฟที่อยู่ในรูปแบบ A นั้นจะเกิดขึ้นเฉพาะ $\rho = 0.1$ เท่านั้น ส่วนในกรณีที่ $i = 0.05$ และ $V = 0.05$ ของทุกๆ ρ, ω (ยกเว้น $\rho = 0.9$) จะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rho^2 \zeta < 1$ และที่ $\rho = 0.9$ ของทุกๆ i, ω และ V (ยกเว้น $\omega = -0.1$ และ $V = 0.15$) จะเห็นได้ชัดว่า V ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขมีเพียง 2 ค่า คือ $V = 0.05, 0.10$ นอกจากค่าดังกล่าวจะไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rho^2 \zeta < 1$ ซึ่งจุดผกผันที่เกิดจากกราฟ $J(M) - L(M)$ ในรูปแบบต่างๆ จะมีผลกับการเลือกค่า Spread Period ที่เหมาะสมกับตัวแบบที่อยู่ในเงื่อนไขของพารามิเตอร์นั้น



รูปที่ 1 แสดงรูปแบบของความสัมพันธ์ระหว่าง $J(M)$ กับ $L(M)$



หมายเหตุ รูปแบบของกราฟจะแสดงออกมาในสัญลักษณ์ $A(1, M^*)$, $B(M_1, M^*)$, C , $D(M^*)$

ตารางที่ 1 ระยะเวลาที่มากที่สุดของ spread period, M_1 สำหรับ $Q < 1$ ก) $i = 0.01$

V	\varnothing	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
0.05	M_1	297.8	212.4	151.8	96.7	36.8
0.10		173.0	104.3	63.8	34.4	10.9
0.15		111.9	59.8	33.6	17.0	5.3
0.20		77.0	38.0	20.4	10.1	3.2
0.25		55.6	26.1	13.7	6.8	2.3
0.30		41.7	18.9	9.8	4.9	1.8
0.35		32.3	14.3	7.5	3.8	1.5
V	\varnothing	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
0.05	M_1	241.5	187.2	140.0	92.2	36.1
0.10		126.4	86.5	56.8	32.3	10.7
0.15		75.6	47.8	29.5	15.9	5.2
0.20		49.3	29.8	17.8	9.5	3.2
0.25		34.3	20.2	11.9	6.3	2.2
0.30		25.1	14.6	8.6	4.6	1.8
0.35		19.2	11.0	6.5	3.5	1.5
V	\varnothing	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
0.05	M_1	217.6	175.3	134.3	90.0	35.9
0.10		108.2	78.5	53.6	31.4	10.6
0.15		62.5	42.7	27.6	15.4	5.1
0.20		39.9	26.4	16.6	9.2	3.1
0.25		27.4	17.8	11.1	6.1	2.2
0.30		19.9	12.8	8.0	4.5	1.7
0.35		15.1	9.7	6.1	3.4	1.5
V	\varnothing	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
0.05	M_1	207.2	169.9	131.7	89.1	35.7
0.10		100.5	75.0	52.2	30.9	10.5
0.15		57.2	40.5	26.8	15.2	5.1
0.20		36.2	24.9	16.1	9.0	3.1
0.25		24.7	16.8	10.8	6.0	2.2
0.30		17.9	12.1	7.8	4.4	1.7
0.35		13.6	9.1	5.9	3.4	1.5
V	\varnothing	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9
0.05	M_1	203.5	168.0	130.8	88.7	35.7
0.10		97.9	73.8	51.7	30.8	10.5
0.15		55.4	39.7	26.5	15.1	5.1
0.20		34.9	24.4	15.9	9.0	3.1
0.25		23.9	16.4	10.7	6.0	2.2
0.30		17.3	11.8	7.7	4.4	1.7
0.35		13.1	9.0	5.8	3.4	1.5

н)

 $i = 0.03$

V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
0.05	M_1	136.2	105.8	82.9	59.8	28.5
0.10		91.1	63.2	43.9	27.0	10.0
0.15		66.5	41.8	26.5	14.9	5.1
0.20		50.6	29.3	17.5	9.3	3.2
0.25		39.5	21.5	12.3	6.4	2.3
0.30		31.6	16.3	9.1	4.7	1.8
0.35		25.7	12.8	7.0	3.7	1.5
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
0.05	M_1	116.3	96.5	78.2	57.7	28.2
0.10		72.6	55.1	40.2	25.7	9.8
0.15		49.9	35.2	23.8	14.0	5.0
0.20		36.0	24.0	15.5	8.8	3.1
0.25		27.0	17.3	10.8	6.0	2.2
0.30		20.9	13.0	8.0	4.4	1.7
0.35		16.5	10.1	6.2	3.5	1.5
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
0.05	M_1	107.7	92.0	75.9	56.7	28.0
0.10		64.9	51.3	38.4	25.1	9.7
0.15		43.2	32.2	22.6	13.6	4.9
0.20		30.5	21.7	14.6	8.5	3.1
0.25		22.4	15.5	10.2	5.8	2.2
0.30		17.1	11.6	7.5	4.3	1.7
0.35		13.4	9.0	5.8	3.4	1.4
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
0.05	M_1	103.9	89.9	74.8	56.3	27.9
0.10		61.5	49.6	37.6	24.8	9.7
0.15		40.4	30.8	22.0	13.5	4.9
0.20		28.2	20.7	14.2	8.4	3.1
0.25		20.6	14.7	9.9	5.8	2.2
0.30		15.6	11.0	7.3	4.3	1.7
0.35		12.2	8.5	5.6	3.3	1.4
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9
0.05	M_1	102.6	89.2	74.4	56.1	27.9
0.10		60.3	49.0	37.4	24.7	9.7
0.15		39.4	30.4	21.8	13.4	4.9
0.20		27.4	20.3	14.1	8.4	3.1
0.25		20.0	14.5	9.8	5.7	2.2
0.30		15.1	10.8	7.2	4.2	1.7
0.35		11.8	8.3	5.6	3.3	1.4

н)

 $i = 0.05$

V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
0.05	M_1	92.9	74.2	60.0	45.2	23.9
0.10		65.1	47.4	34.7	22.8	9.3
0.15		49.6	33.3	22.4	13.4	4.9
0.20		39.2	24.5	15.5	8.7	3.1
0.25		31.7	18.6	11.2	6.1	2.2
0.30		26.1	14.6	8.5	4.6	1.7
0.35		21.8	11.7	6.7	3.6	1.5
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
0.05	M_1	80.7	68.5	57.0	43.9	23.6
0.10		53.5	42.2	32.2	21.8	9.1
0.15		38.7	28.6	20.4	12.7	4.8
0.20		29.2	20.5	13.9	8.2	3.0
0.25		22.8	15.3	10.0	5.8	2.2
0.30		18.1	11.8	7.5	4.3	1.7
0.35		14.7	9.4	5.9	3.4	1.5
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
0.05	M_1	75.4	65.7	55.5	43.2	23.5
0.10		48.5	39.7	30.9	21.3	9.0
0.15		34.2	26.5	19.4	12.4	4.8
0.20		25.3	18.8	13.2	8.0	3.0
0.25		19.3	13.9	9.4	5.6	2.2
0.30		15.2	10.6	7.1	4.2	1.7
0.35		12.2	8.4	5.6	3.3	1.4
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
0.05	M_1	73.0	64.4	54.9	42.9	23.4
0.10		46.3	38.5	30.4	21.1	9.0
0.15		32.3	25.6	19.0	12.2	4.7
0.20		23.6	18.0	12.8	7.9	3.0
0.25		17.9	13.3	9.2	5.5	2.2
0.30		14.0	10.1	6.9	4.1	1.7
0.35		11.2	8.0	5.4	3.2	1.4
V	φ	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9
0.05	M_1	72.2	63.9	54.6	42.8	23.4
0.10		45.6	38.1	30.2	21.0	9.0
0.15		31.6	25.2	18.8	12.2	4.7
0.20		23.0	17.7	12.7	7.9	3.0
0.25		17.4	13.0	9.1	5.5	2.2
0.30		13.6	10.0	6.8	4.1	1.7
0.35		10.8	7.8	5.3	3.2	1.4

n) $i = 0.01$

V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.05	M_2	*	338.0	220.9	155.5	105.2	61.4	36.4
0.10		*	208.7	110.6	66.0	38.4	19.5	10.8
0.15		*	141.9	64.2	34.9	19.1	9.4	5.2
0.20		*	101.6	41.1	21.3	11.4	5.6	3.2
0.25		*	75.5	28.3	14.3	7.6	3.8	2.3
0.30		*	57.9	20.6	10.3	5.5	2.8	1.8
0.35		*	45.6	15.6	7.8	4.2	2.2	1.5
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
0.05	M_2	313.0	220.9	167.2	126.0	90.0	55.5	35.2
0.10		186.3	110.6	73.3	49.1	31.3	17.3	10.4
0.15		122.9	64.2	39.4	25.0	15.4	8.3	5.0
0.20		85.9	41.1	24.2	15.0	9.2	5.0	3.1
0.25		62.7	28.3	16.3	10.0	6.1	3.4	2.2
0.30		47.4	20.6	11.7	7.2	4.5	2.6	1.7
0.35		36.9	15.6	8.9	5.5	3.4	2.0	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
0.05	M_2	220.9	175.8	141.6	111.5	82.6	52.7	34.6
0.10		110.6	78.9	57.8	41.6	28.1	16.3	10.2
0.15		64.2	42.9	30.0	20.8	13.7	7.8	4.9
0.20		41.1	26.5	18.1	12.5	8.2	4.7	3.0
0.25		28.3	17.9	12.2	8.3	5.5	3.2	2.2
0.30		20.6	12.9	8.7	6.0	4.0	2.4	1.7
0.35		15.6	9.8	6.6	4.6	3.1	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
0.05	M_2	182.8	154.2	128.9	104.4	79.1	51.4	34.3
0.10		83.5	65.2	50.7	38.1	26.6	15.8	10.1
0.15		45.9	34.4	25.9	18.9	12.9	7.6	4.9
0.20		28.5	21.0	15.6	11.3	7.7	4.6	3.0
0.25		19.3	14.1	10.4	7.5	5.2	3.1	2.1
0.30		13.9	10.1	7.5	5.5	3.8	2.4	1.7
0.35		10.5	7.7	5.7	4.2	2.9	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
0.05	M_2	165.6	144.3	123.1	101.2	77.5	50.8	34.2
0.10		72.3	59.3	47.5	36.5	25.9	15.6	10.1
0.15		38.8	30.9	24.2	18.1	12.6	7.5	4.9
0.20		23.8	18.7	14.5	10.8	7.5	4.5	3.0
0.25		16.0	12.5	9.7	7.2	5.0	3.1	2.1
0.30		11.5	9.0	7.0	5.2	3.7	2.3	1.7
0.35		8.7	6.8	5.3	4.0	2.9	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9
0.05	M_2	159.4	140.7	121.0	100.0	76.9	50.6	34.2
0.10		68.4	57.2	46.4	35.9	25.7	15.5	10.0
0.15		36.4	29.7	23.5	17.8	12.5	7.5	4.9
0.20		22.2	18.0	14.1	10.6	7.4	4.5	3.0
0.25		14.9	12.0	9.4	7.1	5.0	3.1	2.1
0.30		10.7	8.6	6.8	5.1	3.7	2.3	1.7

н) $i = 0.03$

V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.05	M_2	*	150.2	108.9	84.3	63.6	42.6	28.3
0.10		*	104.5	65.9	45.0	29.6	16.8	9.9
0.15		*	78.9	44.1	27.4	16.5	8.7	5.0
0.20		*	62.0	31.2	18.1	10.4	5.4	3.1
0.25		*	49.8	23.0	12.8	7.2	3.7	2.2
0.30		*	40.8	17.6	9.5	5.3	2.8	1.7
0.35		*	33.9	13.8	7.3	4.1	2.2	1.5
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
0.05	M_2	141.5	108.9	88.9	72.5	56.7	39.5	27.5
0.10		96.2	65.9	48.7	35.9	25.1	15.1	9.5
0.15		71.1	44.1	30.2	20.8	13.6	7.8	4.8
0.20		54.8	31.2	20.2	13.4	8.5	4.8	3.0
0.25		43.3	23.0	14.3	9.3	5.8	3.3	2.2
0.30		34.9	17.6	10.7	6.8	4.3	2.5	1.7
0.35		28.7	13.8	8.3	5.3	3.4	2.0	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
0.05	M_2	108.9	92.2	78.8	66.3	53.3	37.9	27.2
0.10		65.9	51.5	40.7	31.5	22.9	14.4	9.4
0.15		44.1	32.3	24.2	17.8	12.3	7.4	4.8
0.20		31.2	21.8	15.8	11.3	7.6	4.6	3.0
0.25		23.0	15.6	11.0	7.8	5.3	3.2	2.1
0.30		17.6	11.6	8.2	5.7	3.9	2.4	1.7
0.35		13.8	9.0	6.3	4.4	3.0	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
0.05	M_2	94.8	83.8	73.7	63.2	51.6	37.2	27.0
0.10		53.7	44.6	36.8	29.4	21.9	14.0	9.3
0.15		34.0	27.1	21.4	16.4	11.7	7.2	4.7
0.20		23.2	17.9	13.8	10.3	7.2	4.4	3.0
0.25		16.6	12.6	9.6	7.1	5.0	3.1	2.1
0.30		12.5	9.3	7.1	5.2	3.7	2.3	1.7
0.35		9.7	7.2	5.5	4.1	2.9	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
0.05	M_2	88.3	79.9	71.2	61.8	50.8	36.9	26.9
0.10		48.2	41.5	35.0	28.4	21.4	13.8	9.3
0.15		29.8	24.8	20.2	15.7	11.4	7.1	4.7
0.20		19.9	16.2	12.9	9.9	7.1	4.4	3.0
0.25		14.1	11.4	9.0	6.8	4.9	3.0	2.1
0.30		10.5	8.4	6.6	5.0	3.6	2.3	1.7
0.35		8.1	6.5	5.1	3.9	2.8	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9
0.05	M_2	85.9	78.4	70.4	61.3	50.5	36.7	26.9
0.10		46.3	40.4	34.4	28.0	21.2	13.8	9.3
0.15		28.3	24.0	19.7	15.5	11.3	7.0	4.7
0.20		18.8	15.6	12.6	9.7	7.0	4.4	2.9
0.25		13.3	10.9	8.7	6.7	4.8	3.0	2.1
0.30		9.9	8.1	6.4	4.9	3.6	2.3	1.7
0.35		7.6	6.2	5.0	3.8	2.8	1.9	1.4

V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
0.05	M_2	*	101.4	76.1	60.9	47.7	33.8	23.7
0.10		*	73.4	49.2	35.5	24.6	14.9	9.2
0.15		*	57.5	34.8	23.0	14.7	8.2	4.8
0.20		*	46.7	25.8	16.0	9.6	5.2	3.1
0.25		*	38.7	19.8	11.6	6.8	3.6	2.2
0.30		*	32.6	15.6	8.8	5.1	2.7	1.7
0.35		*	27.7	12.5	6.9	4.0	2.2	1.5
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1
0.05	M_2	96.1	76.1	63.7	53.4	43.2	31.7	23.2
0.10		68.2	49.2	37.9	29.2	21.3	13.6	8.9
0.15		52.5	34.8	25.1	18.1	12.4	7.4	4.7
0.20		42.0	25.8	17.6	12.1	8.0	4.7	3.0
0.25		34.3	19.8	12.9	8.7	5.6	3.3	2.1
0.30		28.5	15.6	9.9	6.5	4.2	2.5	1.7
0.35		24.0	12.5	7.8	5.1	3.3	2.0	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3	-0.3
0.05	M_2	76.1	65.8	57.4	49.5	41.0	30.6	22.9
0.10		49.2	39.8	32.5	26.0	19.7	13.0	8.8
0.15		34.8	26.6	20.7	15.7	11.2	7.0	4.6
0.20		25.8	18.9	14.1	10.4	7.2	4.4	2.9
0.25		19.8	13.9	10.2	7.3	5.1	3.1	2.1
0.30		15.6	10.7	7.7	5.5	3.8	2.4	1.7
0.35		12.5	8.4	6.0	4.3	3.0	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
0.05	M_2	67.4	60.6	54.1	47.5	39.8	30.1	22.8
0.10		41.2	35.2	29.8	24.5	18.9	12.6	8.7
0.15		27.8	22.8	18.5	14.6	10.7	6.8	4.6
0.20		19.9	15.8	12.5	9.6	6.9	4.3	2.9
0.25		14.8	11.5	8.9	6.7	4.8	3.0	2.1
0.30		11.4	8.7	6.7	5.0	3.6	2.3	1.7
0.35		9.0	6.8	5.2	3.9	2.8	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7	-0.7
0.05	M_2	63.3	58.1	52.6	46.5	39.3	29.8	22.7
0.10		37.6	33.1	28.5	23.8	18.5	12.5	8.7
0.15		24.8	21.1	17.6	14.1	10.5	6.7	4.5
0.20		17.4	14.5	11.8	9.2	6.7	4.2	2.9
0.25		12.8	10.4	8.4	6.5	4.7	3.0	2.1
0.30		9.7	7.9	6.3	4.8	3.5	2.3	1.7
0.35		7.7	6.2	4.9	3.8	2.8	1.9	1.4
V	φ	-0.3	-0.1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
	ω	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9	-0.9
0.05	M_2	61.8	57.2	52.0	46.2	39.1	29.8	22.7
0.10		36.3	32.3	28.1	23.5	18.4	12.5	8.7
0.15		23.7	20.5	17.2	13.9	10.4	6.7	4.5
0.20		16.5	14.0	11.5	9.1	6.6	4.2	2.9
0.25		12.1	10.1	8.2	6.4	4.7	3.0	2.1
0.30		9.2	7.6	6.1	4.8	3.5	2.3	1.7
0.35		7.2	5.9	4.8	3.7	2.7	1.8	1.4

ตารางที่ 3 ความสัมพันธ์ของ standard deviation ระหว่าง $F(t)$ กับ $C(t)$ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

ก) $i = 0.01$ และ $V = 0.05$

Spread period (M)	$J(M) = \text{Var}F(\infty)^{1/2} / EF(\infty)$					$L(M) = \text{Var}C(\infty)^{1/2} / EC(\infty)$				
	$\varphi = 0.9$	0.7	0.5	0.3	0.1	$\varphi = 0.9$	0.7	0.5	0.3	0.1
	$\omega = -0.9$	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1	$\omega = -0.9$	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1
1	*	*	*	0.0	0.0	*	*	*	24.2	92.6
5	*	0.2	0.1	0.1	0.1	*	14.3	16.0	27.1	908.9
10	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	11.2	6.0	8.6	14.8	213.1
20	*	0.5	0.4	0.3	0.2	*	3.9	5.5	9.2	68.5
30	*	0.8	0.5	0.4	0.3	*	3.5	4.5	7.1	40.7
40	*	1.2	0.6	0.4	0.3	*	3.9	4.0	6.1	28.7
50	*	5.1	0.8	0.5	0.4	*	12.0	3.9	5.4	22.1
60	*	*	1.1	0.6	0.4	*	*	4.1	5.0	18.0
70	*	*	1.7	0.8	0.5	*	*	5.1	4.8	15.2
80	*	*	*	1.0	0.6	*	*	*	4.8	13.3
90	*	*	*	1.2	0.6	*	*	*	5.1	11.9
100	*	*	*	1.8	0.7	*	*	*	6.2	10.9

ข) $i = 0.01$ และ $V = 0.10$

Spread period (M)	$J(M) = \text{Var}F(\infty)^{1/2} / EF(\infty)$					$L(M) = \text{Var}C(\infty)^{1/2} / EC(\infty)$				
	$\varphi = 0.9$	0.7	0.5	0.3	0.1	$\varphi = 0.9$	0.7	0.5	0.3	0.1
	$\omega = -0.9$	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1	$\omega = -0.9$	-0.7	-0.5	-0.3	-0.1
1	*	*	*	0.1	0.1	*	*	*	16.8	138.0
5	1.1	0.4	0.3	0.3	0.2	2.8	6.6	7.0	10.1	30.9
10	*	0.9	0.5	0.4	0.3	*	3.9	4.4	6.3	18.1
20	*	*	1.2	0.7	0.4	*	*	4.2	4.7	11.9
30	*	*	*	1.1	0.6	*	*	*	4.8	9.8
40	*	*	*	3.6	0.8	*	*	*	10.5	8.9
50	*	*	*	*	1.1	*	*	*	*	8.8
60	*	*	*	*	1.6	*	*	*	*	9.9
70	*	*	*	*	3.4	*	*	*	*	17.1
80	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
90	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
100	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

* ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rho^2 \leq 1$

ตารางที่ 4 รูปแบบของ J - L และ spread period ที่เหมาะสม (M*) ตามรูปแบบการดำเนินการของ ARMA(1, 1)

ก) เมื่อ $\varphi = 0.1, \omega = -0.9$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	A(1, 66)	B(2, 83)	*	*
0.10	D(1)	A(1, 25)	A(1, 27)	B(8, 39)	*
0.15	D(1)	A(1, 13)	A(1, 13)	B(2, 15)	B(4, 18)
0.20	D(1)	A(1, 8)	A(1, 8)	A(1, 19)	B(2, 9)
0.25	D(1)	A(1, 6)	A(1, 6)	A(1, 6)	A(1, 6)
0.30	D(1)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 4)
0.35	D(1)	A(1, 3)	A(1, 3)	A(1, 3)	A(1, 3)

ข) เมื่อ $\varphi = 0.1, \omega = -0.7$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	A(1, 68)	B(2, 85)	*	*
0.10	D(1)	A(1, 26)	A(1, 28)	B(10, 40)	*
0.15	D(1)	A(1, 13)	A(1, 14)	B(2, 16)	B(4, 19)
0.20	D(1)	A(1, 8)	A(1, 8)	A(1, 9)	B(2, 10)
0.25	D(1)	A(1, 6)	A(1, 6)	A(1, 6)	A(1, 6)
0.30	D(1)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 5)
0.35	D(1)	A(1, 3)	A(1, 3)	A(1, 4)	A(1, 4)

ค) เมื่อ $\varphi = 0.1, \omega = -0.5$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	A(1, 71)	B(2, 90)	*	*
0.10	D(1)	A(1, 28)	A(1, 30)	B(20, 44)	*
0.15	D(1)	A(1, 14)	A(1, 15)	B(2, 17)	B(5, 21)
0.20	D(1)	A(1, 9)	A(1, 9)	A(1, 10)	B(2, 11)
0.25	D(1)	A(1, 6)	A(1, 6)	A(1, 6)	A(1, 7)
0.30	D(1)	A(1, 5)	A(1, 5)	A(1, 5)	A(1, 5)
0.35	D(1)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 4)

ง) เมื่อ $\varphi = 0.1, \omega = -0.3$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	A(1, 78)	B(2, 102)	*	*
0.10	D(1)	A(1, 32)	A(1, 35)	B(80, 84)	*
0.15	D(1)	A(1, 17)	A(1, 17)	B(2, 21)	B(15, 26)
0.20	D(1)	A(1, 10)	A(1, 10)	A(1, 11)	B(2, 13)
0.25	D(1)	A(1, 7)	A(1, 7)	A(1, 8)	A(1, 8)
0.30	D(1)	A(1, 5)	A(1, 5)	A(1, 6)	A(1, 6)
0.35	D(1)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 4)	A(1, 4)

จ) เมื่อ $\varphi = 0.1, \omega = -0.1$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 93)	B(6, 127)	*	*
0.10	D(1)	A(1, 40)	A(1, 46)	*	*
0.15	D(1)	A(1, 22)	A(1, 23)	B(2, 27)	C
0.20	D(1)	A(1, 14)	A(1, 14)	A(1, 16)	B(2, 19)
0.25	D(1)	A(1, 9)	A(1, 10)	A(1, 10)	A(1, 11)
0.30	D(1)	A(1, 7)	A(1, 7)	A(1, 7)	A(1, 8)
0.35	D(1)	A(1, 5)	A(1, 5)	A(1, 6)	A(1, 6)

* ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rho^2 \zeta < 1$

ตารางที่ 5 รูปแบบของ J - L และ spread period ที่เหมาะสม (M^*) ตามรูปแบบการดำเนินการของ ARMA(1, 1)

ก) เมื่อ $\phi = 0.3, \omega = -0.9$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 55)	B(2, 65)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 20)	B(2, 21)	B(4, 26)	*
0.15	D(1)	B(2, 10)	B(2, 10)	B(2, 11)	B(3, 12)
0.20	D(1)	B(2, 6)	B(2, 6)	B(2, 7)	B(2, 7)
0.25	D(1)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.30	D(1)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.35	D(1)	D(1)	D(1)	D(1)	C

ข) เมื่อ $\phi = 0.3, \omega = -0.7$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 56)	B(2, 66)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 20)	B(2, 21)	B(4, 27)	*
0.15	D(1)	B(2, 10)	B(2, 11)	B(2, 11)	B(3, 12)
0.20	D(1)	B(2, 7)	B(2, 7)	B(2, 7)	B(2, 7)
0.25	D(1)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.30	D(1)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.35	D(1)	D(1)	D(1)	D(1)	B(2, 3)

ค) เมื่อ $\phi = 0.3, \omega = -0.5$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 57)	B(2, 69)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 21)	B(2, 22)	B(5, 28)	*
0.15	D(1)	B(2, 11)	B(2, 11)	B(2, 12)	B(3, 13)
0.20	D(1)	B(2, 8)	B(2, 7)	B(2, 7)	B(2, 7)
0.25	D(1)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.30	D(1)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.35	D(1)	D(1)	D(1)	D(1)	B(2, 3)

ง) เมื่อ $\phi = 0.3, \omega = -0.3$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 61)	B(2, 75)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 23)	B(2, 24)	B(6, 32)	*
0.15	D(1)	B(2, 12)	B(2, 12)	B(2, 13)	B(4, 15)
0.20	D(1)	B(2, 7)	B(2, 7)	B(2, 8)	B(2, 8)
0.25	D(1)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.30	D(1)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.35	D(1)	D(1)	D(1)	D(1)	D(1)

จ) เมื่อ $\phi = 0.3, \omega = -0.1$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 69)	B(2, 87)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 27)	B(2, 29)	B(15, 42)	*
0.15	D(1)	B(2, 14)	B(2, 14)	B(2, 17)	B(6, 19)
0.20	D(1)	B(2, 9)	B(2, 9)	B(2, 9)	B(2, 10)
0.25	D(1)	B(2, 6)	B(2, 6)	B(2, 6)	B(2, 7)
0.30	D(1)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.35	D(1)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	D(1)

* ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rho^2 \zeta < 1$

ตารางที่ 6 รูปแบบของ J - L และ spread period ที่เหมาะสม (M*) ตามรูปแบบการดำเนินการของ ARMA(1, 1)

ก) เมื่อ $\varphi = 0.5, \omega = -0.9$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 43)	B(2, 48)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 15)	B(2, 15)	B(4, 17)	D(19)
0.15	D(2)	B(2, 8)	B(2, 8)	B(2, 8)	B(3, 8)
0.20	D(2)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.25	D(2)	C	C	C	B(2, 4)
0.30	D(2)	C	C	C	C
0.35	D(2)	C	C	C	C

ข) เมื่อ $\varphi = 0.5, \omega = -0.7$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 43)	B(2, 48)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 15)	B(2, 15)	B(4, 17)	D(22)
0.15	D(2)	B(2, 8)	B(2, 8)	B(2, 8)	B(2, 8)
0.20	D(2)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.25	D(2)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.30	D(2)	C	C	C	C
0.35	D(2)	C	C	C	C

ค) เมื่อ $\varphi = 0.5, \omega = -0.5$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 44)	B(2, 50)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 15)	B(2, 16)	B(4, 18)	C(37)
0.15	D(2)	B(2, 8)	B(2, 8)	B(2, 8)	B(3, 9)
0.20	D(2)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 5)
0.25	D(2)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.30	D(2)	C	C	C	C
0.35	D(2)	C	C	C	C

ง) เมื่อ $\varphi = 0.5, \omega = -0.3$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 46)	B(2, 52)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 16)	B(2, 16)	B(4, 19)	C
0.15	D(2)	B(2, 8)	B(2, 8)	B(2, 9)	B(3, 9)
0.20	D(2)	B(2, 6)	B(2, 5)	B(2, 5)	B(2, 6)
0.25	D(2)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.30	D(2)	C	C	C	C
0.35	D(2)	C	C	C	C

จ) เมื่อ $\varphi = 0.5, \omega = -0.1$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(1)	B(2, 50)	B(2, 58)	*	*
0.10	D(1)	B(2, 18)	B(2, 18)	B(4, 22)	C
0.15	D(2)	B(2, 9)	B(2, 9)	B(2, 10)	B(3, 10)
0.20	D(2)	B(2, 6)	B(2, 6)	B(2, 6)	B(2, 6)
0.25	D(2)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)	B(2, 4)
0.30	D(2)	B(2, 3)	B(2, 3)	B(2, 3)	B(2, 3)
0.35	D(2)	C	C	C	C

* ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rho^2 \leq 1$

ตารางที่ 7 รูปแบบของ J - L และ spread period ที่เหมาะสม (M*) ตามรูปแบบการดำเนินการของ ARMA(1, 1)

ก) เมื่อ $\phi = 0.7, \omega = -0.9$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(2)	B(3, 29)	B(4, 31)	C	*
0.10	D(3)	B(3, 10)	B(3, 10)	B(4, 10)	B(7, 10)
0.15	D(3)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 5)
0.20	D(3)	C	C	C	C
0.25	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(3)
0.30	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)
0.35	*	*	*	*	*

ข) เมื่อ $\phi = 0.7, \omega = -0.7$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(2)	B(3, 29)	B(4, 31)	C	*
0.10	D(3)	B(3, 10)	B(3, 10)	B(4, 10)	B(8, 10)
0.15	D(3)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)
0.20	D(3)	C	C	C	C
0.25	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(3)
0.30	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)
0.35	*	*	*	*	*

ค) เมื่อ $\phi = 0.7, \omega = -0.5$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(2)	B(3, 30)	B(4, 31)	C	*
0.10	D(3)	B(3, 10)	B(3, 10)	B(4, 10)	B(8, 10)
0.15	D(3)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)
0.20	D(3)	C	C	C	C
0.25	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(3)
0.30	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)
0.35	*	*	*	*	*

ง) เมื่อ $\phi = 0.7, \omega = -0.3$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(2)	B(3, 30)	B(4, 32)	C	*
0.10	D(3)	B(3, 10)	B(3, 10)	B(4, 11)	B(8, 10)
0.15	D(3)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)
0.20	D(3)	C	C	C	C
0.25	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(3)
0.30	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)
0.35	*	*	*	*	*

จ) เมื่อ $\phi = 0.7, \omega = -0.1$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(2)	B(3, 32)	B(4, 34)	C	*
0.10	D(2)	B(3, 11)	B(3, 11)	B(4, 11)	D(6)
0.15	D(3)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(3, 6)	B(4, 6)
0.20	D(3)	C	C	C	B(3, 4)
0.25	D(2)	D(2)	D(2)	D(3)	D(3)
0.30	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)
0.35	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)	D(2)

* ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rho^2 \leq 1$

ตารางที่ 8 รูปแบบของ J - L และ spread period ที่เหมาะสม (M*) ตามรูปแบบการดำเนินการของ ARMA(1, 1)

ก) เมื่อ $\varphi = 0.9, \omega = -0.9$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(6)	B(9, 15)	B(9, 15)	B(11, 15)	D(15)
0.10	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)
0.15	*	*	*	*	*
0.20	*	*	*	*	*
0.25	*	*	*	*	*
0.30	*	*	*	*	*
0.35	*	*	*	*	*

ข) เมื่อ $\varphi = 0.9, \omega = -0.7$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(6)	B(9, 15)	B(9, 15)	D(10)	D(15)
0.10	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)
0.15	*	*	*	*	*
0.20	*	*	*	*	*
0.25	*	*	*	*	*
0.30	*	*	*	*	*
0.35	*	*	*	*	*

ค) เมื่อ $\varphi = 0.9, \omega = -0.5$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(6)	B(9, 15)	B(9, 15)	B(11, 14)	D(15)
0.10	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)
0.15	*	*	*	*	*
0.20	*	*	*	*	*
0.25	*	*	*	*	*
0.30	*	*	*	*	*
0.35	*	*	*	*	*

ง) เมื่อ $\varphi = 0.9, \omega = -0.3$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(6)	B(9, 15)	B(9, 15)	D(10)	D(15)
0.10	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)
0.15	*	*	*	*	*
0.20	*	*	*	*	*
0.25	*	*	*	*	*
0.30	*	*	*	*	*
0.35	*	*	*	*	*

จ) เมื่อ $\varphi = 0.9, \omega = -0.1$

V	Interest rate (i)				
	-0.01	0.005	0.01	0.03	0.05
0.05	D(6)	B(9, 15)	B(9, 15)	D(10)	D(16)
0.10	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)	D(5)
0.15	D(2)	*	*	*	*
0.20	*	*	*	*	*
0.25	*	*	*	*	*
0.30	*	*	*	*	*
0.35	*	*	*	*	*

* ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $Q^2 \zeta > 1$

5.2 การจำลองข้อมูล

เพื่อศึกษาความถูกต้องของตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ(สมการ(5.1.7)) ที่ได้สร้างขึ้น จึงทำการจำลองข้อมูล Force of Interest ขึ้นมาในจำนวนที่เหมาะสม แล้วนำข้อมูลดังกล่าวไปใช้กับตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปทั่วไป(สมการ(4.1.1.3)) พร้อมทั้งหาค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนจากผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบดังกล่าว ในทำนองเดียวกันได้ใช้เงื่อนไขในการจำลองข้อมูล Force of Interest ไปใช้กับตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ จากนั้นทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบ เพื่อพิจารณาพฤติกรรมของผลลัพธ์นั้นๆ

ตัวอย่างเช่น:

กำหนดให้ เงินเดือน = คงที่ (กำหนดให้เท่ากับ 1)
 ตารางเงินเดือน(Salary Scale) = คงที่
 $NC =$ ร้อยละ 3 ของเงินเดือน
 เงินผลประโยชน์เมื่อเกษียณอายุ(B) = 2/3 ของเงินเดือน (Life Annuity)
 อายุเกษียณ = 60 ปี
 $i = 0.03$
 $V = 0.10$
 $\varphi = 0.3$
 $\omega = -0.5$

จาก $E[e^{\delta(t)}] = e^{\theta + \frac{1}{2}v^2} = 1 + i$ ดังนั้น $\theta = 0.0246$ ซึ่งจากสมการ(5.1.1) จะได้ตัวแบบ ARMA(1, 1) ดังนี้

$$\delta(t) = 0.0246 + 0.3(\delta(t-1) - 0.0246) + e(t) + 0.5e(t-1) \quad (5.2.1)$$

และจาก $Var[\delta(t)] = \frac{1 - 2\varphi\omega + \omega^2}{1 - \varphi^2} \gamma^2 = v^2$ ดังนั้น $\gamma^2 = 0.0059$ ซึ่งจาก $e(t)$ มีการแจกแจงแบบปกติ และ $E[e(t)] = 0$, $Var[e(t)] = \gamma^2 = 0.0059$ ดังนั้นจึงทำการจำลองข้อมูล $e(t)$ โดยวิธีมอนติ คาร์โล(Monte Carlo Method) ตามเงื่อนไขดังกล่าวขึ้นมาก่อน แล้วจึงนำมาแทนค่าลงในตัวแบบ ARMA(1, 1) ตามสมการ(5.1.19)

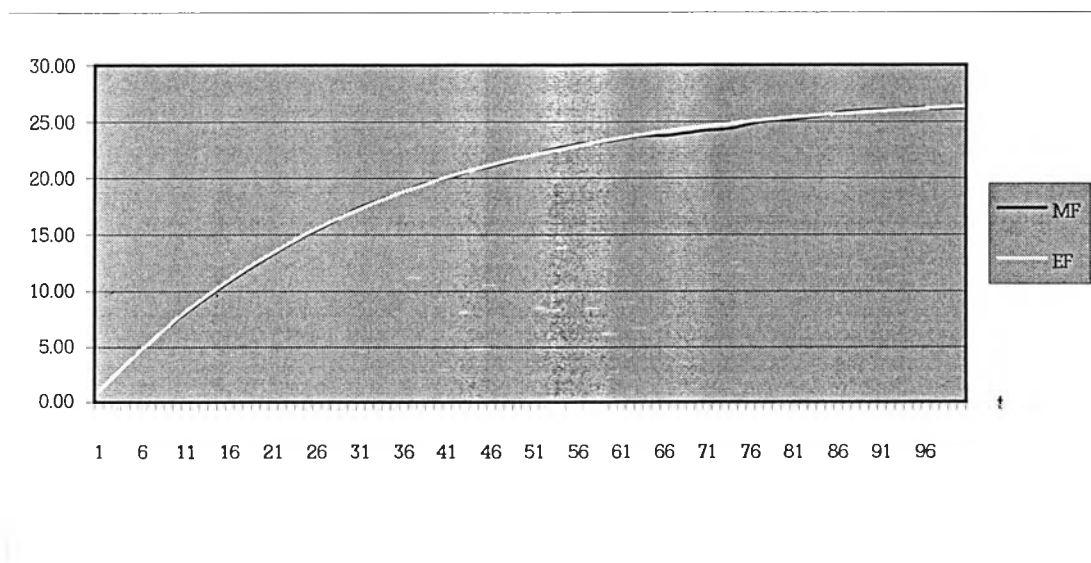
การกำหนดจำนวนตัวอย่างที่จะต้องทำการจำลองในแต่ละชุดให้เพียงพอ ในที่นี้จะมีการกำหนดจากสมการดังต่อไปนี้(สุชาติ ภิระนันท์, 2538: 71)

$$n = \left[\frac{z_{1-\alpha/2} \sqrt{VarF(\infty)}}{E} \right]^2$$

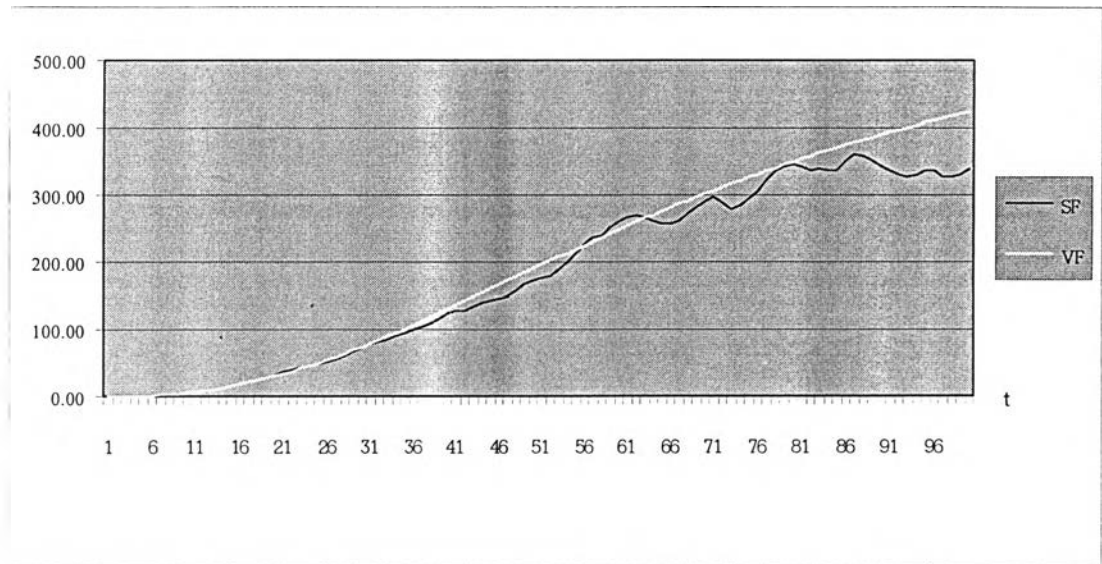
ในที่นี้ ถ้ากำหนดให้ระดับความเชื่อมั่นเป็น 90% ดังนั้น $z_{1-\alpha/2} = z_{0.95} = 1.645$ และ E คือค่าความคลาดเคลื่อนจำกัด(Limit Error)ของ $EF(t)$ และ $VarF(\infty)$ ซึ่งหาค่าได้จากสมการ(5.1.16) จากสมการข้างต้นจะเห็นว่า ค่า n จะมีจำนวนมากหรือน้อยนั้น ขึ้นอยู่กับการกำหนดค่าความคลาดเคลื่อนจำกัด (E) ดังนั้นการทดสอบตัวแบบในครั้งนี้จะกำหนดให้ใช้ $n = 2,550$ เนื่องจากเป็นจำนวนตัวอย่างที่สามารถเห็นพฤติกรรมของค่าเฉลี่ย $F(t)$ ได้ชัดในระดับหนึ่ง

จากการจำลองข้อมูล $e(t)$ เป็นจำนวน 2,550 ชุด และในแต่ละชุดจะมี $t = 1, 2, \dots, 100$ ซึ่งจะนำไปสู่การจำลองข้อมูล $O(t)$ จำนวน 2,550 ชุด แล้วจึงนำไปใช้ในการหาค่า $F(t)$ จากสมการ(4.1.1.3) จากนั้นจึงนำมาหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวน แล้วนำมาเปรียบเทียบกับ $EF(t)$ ที่ได้จากสมการ(5.1.7) และ $VarF(t)$ ที่ได้จากสมการ(5.1.13) จะได้ผลลัพธ์ที่แสดงในรูปที่ 2 – 5

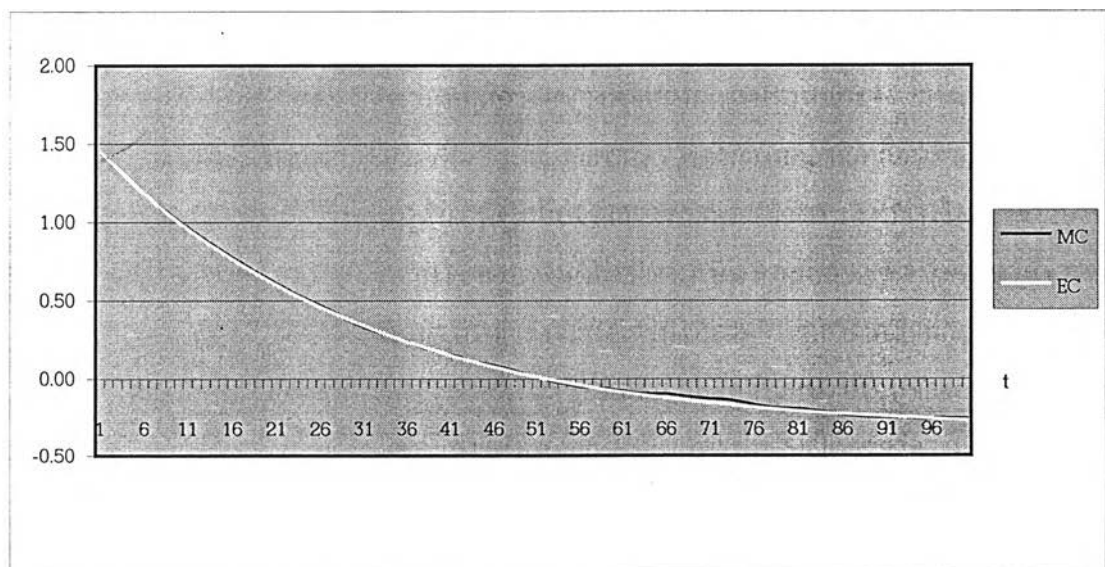
รูปที่ 2 กราฟพฤติกรรมของค่าเฉลี่ยของ $F(t)$ จากการจำลองข้อมูล กับค่า $EF(t)$ จากตัวแบบการระดมทุนในกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ ภายใต้ $i = 0.03, V = 0.10, \varphi = 0.3$ และ $\omega = -0.5$ (เมื่อ MF คือค่าเฉลี่ยของ $F(t)$ จากการจำลองข้อมูล, EF คือค่า $EF(t)$ จากตัวแบบที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ)



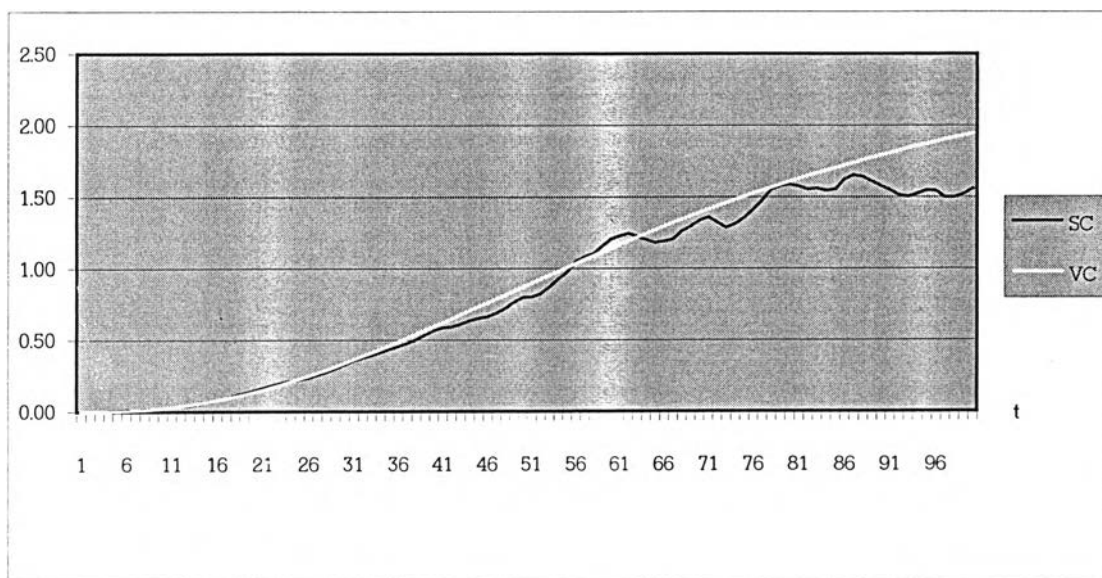
รูปที่ 3 กราฟพฤติกรรมของค่าความแปรปรวนของ $F(t)$ จากการจำลองข้อมูล กับค่า $VarF(t)$ จากตัวแบบการระดมทุนในกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ ภายใต้ $i = 0.03, V = 0.10, \varphi = 0.3$ และ $\omega = -0.5$ (เมื่อ SF คือค่าความแปรปรวนของ $F(t)$ จากการจำลองข้อมูล, VF คือค่า $VarF(t)$ จากตัวแบบที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ)



รูปที่ 4 กราฟพฤติกรรมของค่าเฉลี่ยของ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล กับค่า $EC(t)$ จากตัวแบบการระดมทุนในกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ ภายใต้ $i = 0.03, V = 0.10, \varphi = 0.3$ และ $\omega = -0.5$ (เมื่อ MC คือค่าเฉลี่ยของ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล, EC คือค่า $EC(t)$ จากตัวแบบที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ)



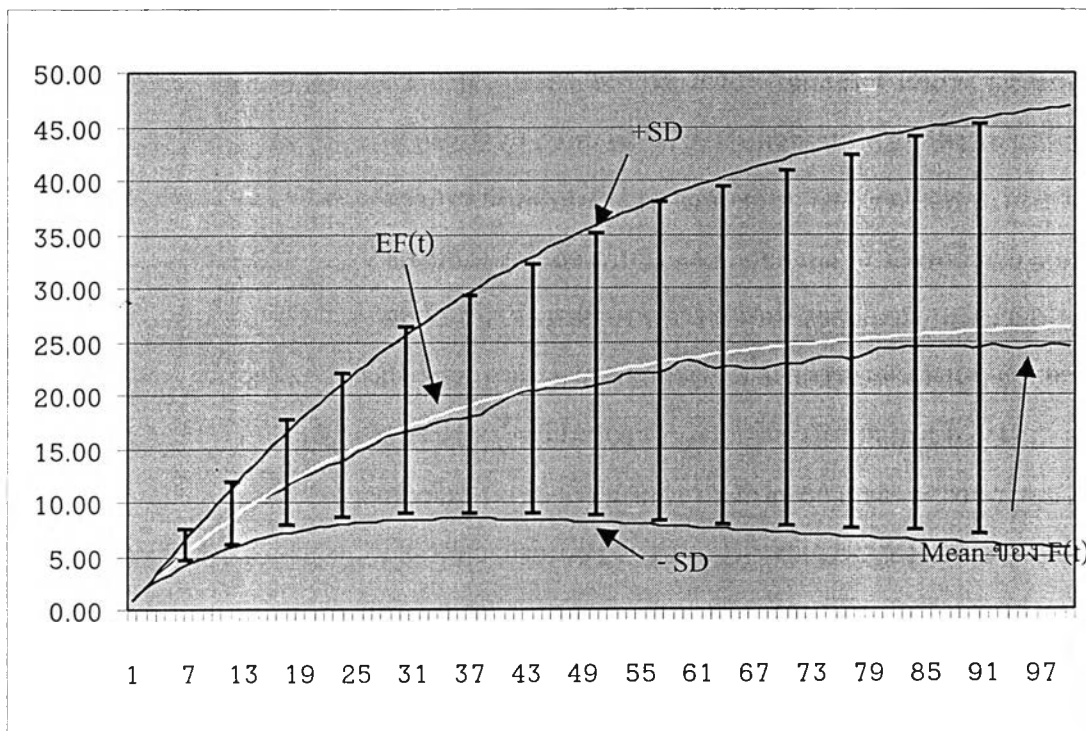
รูปที่ 5 กราฟพฤติกรรมของค่าความแปรปรวนของ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล กับค่า $VarC(t)$ จากตัวแบบการระดมทุนในกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ ภายใต้ $i = 0.03, V = 0.10, \varphi = 0.3$ และ $\omega = -0.5$ (เมื่อ SC คือค่าความแปรปรวนของ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล, VC คือค่า $VarC(t)$ จากตัวแบบที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ)



จากผลลัพธ์ที่ได้จะเห็นว่าพฤติกรรมของค่าเฉลี่ย(Mean) และค่าความแปรปรวน (S^2) ของการระดมทุนของกองทุนบำนาญจากการจำลองข้อมูล มีพฤติกรรมไปในทิศทางเดียวกันกับผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญในรูปผลสำเร็จ โดยพฤติกรรมของค่าเฉลี่ยของ $F(t)$ และ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล จะมีค่าเข้าใกล้ค่า $EF(t)$ และ $EC(t)$ ที่ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย(Mean Square Error: MSE) เท่ากับ 0.0258 และ 0.0001 ตามลำดับ ส่วนพฤติกรรมของค่าความแปรปรวนของ $F(t)$ และ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล จะมีค่าเข้าใกล้ค่า $VarF(t)$ และ $VarC(t)$ ที่ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย เท่ากับ 822.0299 และ 0.0174 ตามลำดับ ทั้งนี้เนื่องจากการกำหนดจำนวนตัวอย่างในการจำลองข้อมูลนั้นใช้ค่าเฉลี่ยเป็นหลัก ซึ่งถ้าหากใช้ค่าความแปรปรวนเป็นหลักแล้ว จำเป็นต้องใช้จำนวนตัวอย่างในการจำลองข้อมูลเป็นจำนวนมาก จึงจะสามารถให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยที่มีค่าน้อยได้

ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของ $F(t)$ จากผลลัพธ์ที่ได้ สามารถแสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย $F(t)$ (ดูรูปที่ 6) โดยช่วงความเชื่อมั่นจะเพิ่มขึ้นตามค่า t เนื่องจากความแปรปรวนของ $F(t)$ มีค่าเพิ่มขึ้นตามค่า t เช่นกัน แต่ช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าว จะเริ่มคงที่ที่ค่า t ในระดับหนึ่ง (t มีค่ามากๆ) ซึ่งแสดงให้เห็นว่า เมื่อ t เพิ่มขึ้นความสามารถในการพยากรณ์จะลดลง

รูปที่ 6 กราฟแสดงช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ย $F(t)$ จากการจำลองข้อมูล ภายใต้ $i = 0.03$, $V = 0.10$, $\varphi = 0.3$ และ $\omega = -0.5$



ในทำนองเดียวกัน หากกำหนดค่า i , V , φ และ ω เปลี่ยนแปลงไป แล้วทำการจำลองข้อมูลเพื่อทำการเปรียบเทียบค่าผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปทั่วไปกับ ตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ สามารถสรุปผลได้ตามตารางที่ 9

ตารางที่ 9 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error: MSE) ของ $EF(t)$, $VarF(t)$, $EC(t)$ และ $VarC(t)$ เมื่อกำหนดค่า i , V , φ และ ω เปลี่ยนไป และ $n = 2,550$

กรณี	i	V	φ	ω	MSE ของ $EF(t)$	MSE ของ $VarF(t)$	MSE ของ $EC(t)$	MSE ของ $VarC(t)$
1	0.03	0.10	0.3	-0.5	0.0258	822.0299	0.0001	0.0174
2	0.03	0.10	0.5	-0.7	0.0444	3,201.7937	0.0003	0.1747
3	0.03	0.15	0.3	-0.5	0.0670	6,704.2986	0.0120	2.5922
4	0.03	0.15	0.5	-0.7	0.1297	7,307.0750	0.0032	4.3089
5	0.05	0.10	0.3	-0.5	0.0097	123.8605	0.0001	0.0063
6	0.05	0.10	0.5	-0.7	0.0172	533.4864	0.0002	0.0564
7	0.05	0.15	0.3	-0.5	0.0285	1,669.3042	0.0004	0.3863
8	0.05	0.15	0.5	-0.7	0.0550	1,455.5477	0.0015	1.0682

ตารางที่ 9 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $EF(t)$, $VarF(t)$, $EC(t)$ และ $VarC(t)$ เฉพาะที่กำหนดค่า i , V , φ และ ω เป็น 8 กรณี(รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ก) จะพบว่า เมื่อ i เพิ่มขึ้น (V, φ, ω คงที่) ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $EF(t)$ จะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยอื่นๆ ($VarF(t)$, $EC(t)$, $VarC(t)$) จะลดลง และเมื่อ V เพิ่มขึ้น (i, φ, ω คงที่) ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของ $VarF(t)$ จะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยอื่นๆ ($EF(t)$, $EC(t)$, $VarC(t)$) จะลดลง และเมื่อมองในภาพรวมของผลลัพธ์ที่ได้จะพบว่า ค่าเฉลี่ยของทั้ง $F(t)$ และ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล จะมีค่าเข้าใกล้กับผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ มากกว่า ค่าความแปรปรวนของทั้ง $F(t)$ และ $C(t)$ จากการจำลองข้อมูล และจะเห็นได้ชัดว่า ทั้งค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนในส่วนของ $C(t)$ จะมีค่าเข้าใกล้ผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ มากกว่า ทั้งค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนในส่วนของ $F(t)$ เนื่องจาก $C(t)$ มาจากความสัมพันธ์ของ $F(t)$ ในสมการ(3.2.1.1.4) จึงทำให้ผลต่างระหว่างผลลัพธ์จากการจำลองข้อมูล กับผลลัพธ์จากตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จลดลง

ในการจำลองข้อมูลที่แสดงข้างต้นนั้น ได้กำหนดจำนวนตัวอย่างของการจำลองข้อมูล 2,550 ชุด ซึ่งจะเห็นว่าค่าที่ได้จากการจำลองข้อมูล กับค่าที่ได้จากตัวแบบการระดมทุนของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จ มีค่าใกล้เคียงกันมากในค่าเฉลี่ยของการระดมทุน ส่วนค่าความแปรปรวนจะมีความใกล้เคียงกันในระดับหนึ่งของช่วงต้นของระยะเวลาการระดมทุน หากทำการจำลองข้อมูลด้วยจำนวนตัวอย่างที่มากขึ้น จำนวนระยะเวลา (t) ที่ทำให้ค่าทั้งสองใกล้เคียงกันก็จะสูงขึ้น ดังนั้นสรุปได้ว่า ค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวนของ $F(t)$ และ $C(t)$ จากตัวแบบการระดมทุน และเงินสมทบของกองทุนบำนาญที่อยู่ในรูปผลสำเร็จนั้นสามารถนำไปใช้ได้

5.3 ตัวอย่างการคำนวณค่าคาดหวังของการระดมทุนและเงินสมทบของกองทุนบำนาญ

ตัวอย่างการคำนวณนี้ต้องการแสดงให้เห็นถึงการนำตัวแบบที่สร้างขึ้นไปใช้กับปัญหา โดยในที่นี้มีทั้งการจัดตั้งบริษัทจำลองขึ้นเพื่อประมาณการระดมทุน และเงินสมทบในกองทุนบำนาญ ตั้งแต่ปี 2002 – 2021 เป็นเวลา 20 ปี โดยแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกคือ การทดสอบตัวแบบการระดมทุน($F(t)$) และเงินสมทบ($C(t)$)ในกองทุนบำนาญที่มีอัตราผลตอบแทนการลงทุนในรูปแบบ ARMA(1, 1) โดยทำการกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ที่จำเป็นขึ้น เพื่อใช้กับตัวแบบที่ได้สร้างขึ้นมาแล้ว ในหัวข้อ 5.1 และทำการทดสอบการลู่เข้าของค่าคาดหวัง และค่าความแปรปรวนของการระดมทุน และเงินสมทบในกองทุนบำนาญ ($EF(t)$, $VarF(t)$, $EC(t)$ และ $VarC(t)$) ตามลำดับ) ในส่วนที่สอง คือ การจำลองข้อมูล จำนวนพนักงานเริ่มต้น จำนวนพนักงานใหม่ และจำนวนพนักงานที่ลาออกในแต่ละปี ซึ่งจำนวนพนักงานดังกล่าวจะถูกสุ่มขึ้นตามอายุ และเพศ ตั้งแต่ปี 2002 – 2021 เป็นเวลา 20 ปี และนำมาใช้กับผลลัพธ์ที่ได้จากส่วนแรก เพื่อประมาณค่าคาดหวังของการระดมทุนและ เงินสมทบในกองทุนบำนาญทั้งหมดในบริษัทต่อไป

กำหนดให้ Force of Interest ($\delta(t)$) ของกองทุนนี้อยู่ในรูปแบบ ARMA(1, 1) ได้ดังนี้

$$\delta(t) = 0.05 - 0.59(\delta(t-1) - 0.05) + e(t) + 0.36e(t-1) \quad (5.3.1)$$

ซึ่งค่า $e(t)$, $t = 1, 2, \dots$ มีการแจกแจงแบบปกติที่เป็นอิสระ และเหมือนกัน(IID) และ $E[e(t)] = 0$ และ $Var[e(t)] = \gamma^2 = 0.0002$

ตามหลักของ Box and Jenkins จะได้ว่า

$$E[\delta(t)] = \theta = 0.05$$

$$Var[\delta(t)] = V^2 = 0.0002$$

จากความสัมพันธ์ของ $\exp\{\theta + V^2/2\} = 1 + i$ และความสัมพันธ์ของค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังนั้นจะได้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{llll} i = 0.0511 & d = 0.0486 & U = 0.9514 & \\ \rho_1 = -0.0001 & \mu = -0.00002 & \zeta = 1.0510 & \mathfrak{A} = 1.0512 \end{array}$$

กำหนดให้บริษัทจำลองแห่งหนึ่ง มีสมมติฐานในการจ่ายเงินเดือนๆ แรก (เท่ากันตลอดภายในปี) ของการทำงาน จากอายุเริ่มต้นของผู้เข้าทำงาน (ซึ่งข้อมูลที่ได้เกิดจากการนำอายุมาเทียบกับวุฒิการศึกษาและประสบการณ์การทำงาน) และอัตราการเพิ่มขึ้นของเงินเดือนเป็น 5% เท่ากันตลอดทุกปี โดยไม่มีการได้รับเงินพิเศษอื่นใด กำหนดให้พนักงานทุกคนที่เข้าทำงานในบริษัทจำลองแห่งนี้จะต้องเป็นสมาชิกในกองทุนบำนาญที่บริษัทได้จัดเตรียมไว้ให้ ซึ่งจะมีเงื่อนไขและผลประโยชน์ดังต่อไปนี้

- 1) กำหนดให้อายุ 60 ปี เป็นอายุเกษียณของพนักงานทุกคนในบริษัท
- 2) กำหนดให้เงินผลประโยชน์ที่จะได้รับหลังจากเกษียณอายุเป็นดังต่อไปนี้

$$B_j = \frac{2}{3} \text{ ของเงินเดือนๆ สุดท้ายที่เกษียณอายุ}$$

เมื่อ B_j แทนเงินผลประโยชน์ที่ได้รับหลังเกษียณอายุ ของพนักงานที่อายุ j

- 3) กำหนดการจ่าย Normal Cost เข้าร่วมในกองทุนบำนาญเป็นรายปี ซึ่งจะจ่ายตามสูตรดังต่อไปนี้

$$NC_j = B_j \ddot{a}_{60}^{(12)} \frac{D_{60}}{N_w - N_{60}}$$

เมื่อ NC_j แทน Normal Cost ของพนักงานที่อายุ j
 w แทนอายุที่เริ่มงานของพนักงาน

จากเงื่อนไขที่กำหนดขึ้น ความสัมพันธ์ของ R จากสมการ(4.1.1.2) และ Accrued Liability จากสมการ(3.1.1) จะสามารถแสดงค่าต่างๆ ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 9 แสดงค่า Normal Cost (NC), Accrued Liability (AL) และ R แบ่งตามอายุ และเพศของพนักงานในบริษัทจำลอง

อายุ	เงินเดือน เริ่มต้น	ผลประโยชน์ (รายปี)	ชาย			หญิง		
			NC	AL	R	NC	AL	R
18	7,000.00	434,648.90	23,118.63	8,472,173.61	370,594.42	30,200.12	8,326,386.94	364,217.34
19	7,000.00	413,951.34	23,421.28	8,039,842.16	351,683.14	30,491.76	7,894,282.20	345,315.98
20	8,000.00	450,559.28	27,131.38	8,717,109.91	381,308.55	35,200.60	8,550,988.99	374,042.00
21	8,000.00	429,104.07	27,514.65	8,267,521.34	361,642.41	35,574.53	8,101,592.56	354,384.26
22	9,000.00	459,754.36	31,407.67	8,818,373.14	385,738.06	40,467.58	8,631,856.92	377,579.37
23	9,000.00	437,861.30	31,885.28	8,357,828.21	365,592.66	40,941.45	8,171,388.72	357,437.32
24	10,000.00	463,345.29	35,987.24	8,798,020.01	384,847.77	46,050.35	8,590,850.66	375,785.65
25	10,000.00	441,281.23	36,577.20	8,331,641.69	364,447.19	46,646.46	8,124,345.79	355,379.54
26	11,000.00	462,294.62	40,920.77	8,674,823.25	379,458.83	52,010.34	8,446,522.28	369,472.36
27	11,000.00	440,280.59	41,647.01	8,206,669.31	358,980.58	52,757.20	7,977,943.87	348,975.55
28	12,000.00	457,434.38	46,273.80	8,464,562.73	370,261.50	58,425.10	8,214,403.95	359,318.92
29	12,000.00	435,651.79	47,167.92	7,997,717.38	349,840.49	59,359.68	7,746,725.60	338,861.48
30	13,000.00	449,482.01	52,131.26	8,180,259.75	357,825.36	65,393.91	7,907,221.50	345,881.98
31	13,000.00	428,078.10	53,235.05	7,716,893.72	337,556.55	66,564.74	7,442,475.33	325,552.80
32	14,000.00	439,054.46	58,604.07	7,832,332.07	342,606.12	73,045.66	7,535,023.10	329,601.07
33	14,000.00	418,147.11	59,973.45	7,373,720.95	322,545.30	74,517.36	7,074,305.56	309,448.11
34	15,000.00	426,680.72	65,839.10	7,428,646.24	324,947.88	81,550.15	7,105,202.99	310,799.65
35	15,000.00	406,362.59	67,550.10	6,975,132.65	305,110.04	83,410.06	6,648,623.56	290,827.70
36	16,000.00	412,812.79	74,034.39	6,974,430.75	305,079.34	91,134.93	6,622,382.05	289,679.83
37	16,000.00	393,155.04	76,192.58	6,525,306.10	285,433.48	93,503.45	6,168,927.25	269,844.56
38	17,000.00	397,835.46	83,462.85	6,471,988.73	283,101.24	102,111.21	6,088,074.98	266,307.88
39	17,000.00	378,890.91	86,218.30	6,025,251.03	263,559.80	105,158.11	5,635,337.12	246,503.98
40	18,000.00	382,074.87	94,509.99	5,920,097.98	258,960.14	114,915.27	5,500,014.57	240,584.62
41	18,000.00	363,880.83	98,081.86	5,472,003.27	239,359.34	118,886.97	5,043,688.49	220,623.76
42	19,000.00	365,806.12	107,736.10	5,312,887.43	232,399.21	130,177.68	4,850,882.59	212,189.94
43	19,000.00	348,386.78	112,454.67	4,857,134.40	212,463.41	135,444.78	4,383,836.92	191,760.17
44	20,000.00	349,259.93	123,983.42	4,637,767.44	202,867.74	148,844.95	4,125,943.22	180,479.25
45	20,000.00	332,628.51	130,366.60	4,163,965.78	182,142.45	155,989.79	3,636,461.32	159,068.07
46	21,000.00	332,628.51	144,573.94	3,871,479.25	169,348.35	172,405.69	3,298,507.17	144,285.09
47	21,000.00	316,789.06	153,477.88	3,362,087.04	147,066.24	182,394.43	2,766,782.07	121,026.08
48	22,000.00	316,070.71	171,705.36	2,972,049.36	130,005.00	203,342.23	2,320,741.22	101,515.12
49	22,000.00	301,019.73	184,648.97	2,395,724.76	104,795.09	217,893.59	1,711,317.65	74,857.39

หมายเหตุ : D_t , N_t คำนวณจากตารางมรณะไทย 1997*

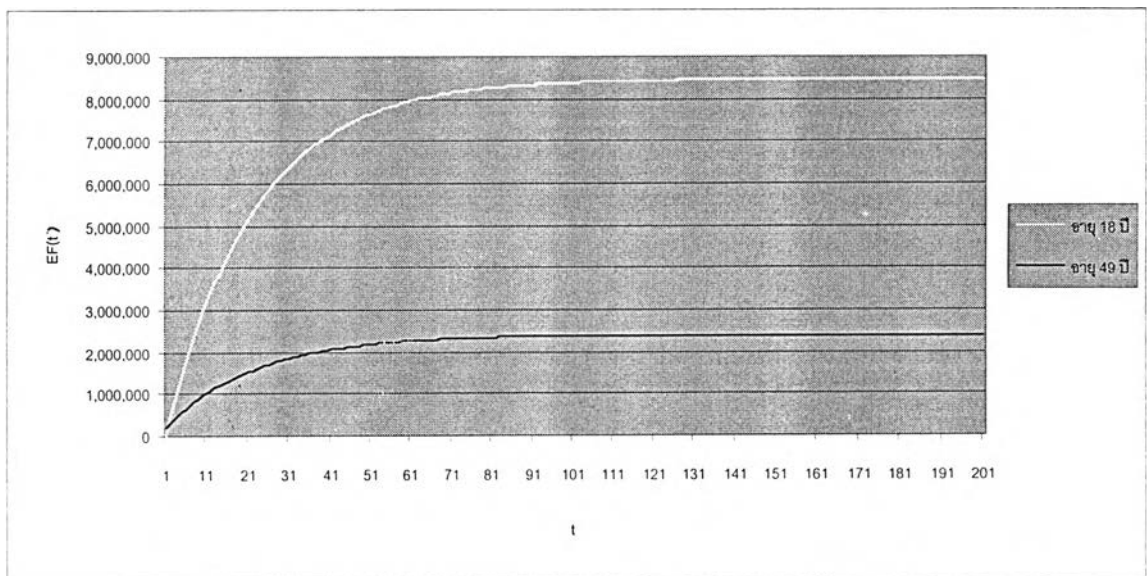
* เนื่องจาก Service Table ของประเทศไทยยังไม่มีการจัดทำ

จากตารางดังกล่าว เราสามารถคำนวณหาช่วงเวลาที่เหมาะสม(Spread Period) กับค่าปรับปรุงของกองทุนบำนาญ โดยใช้ขั้นตอนในการคำนวณเดียวกันกับหัวข้อ 5.1 ซึ่งจะได้

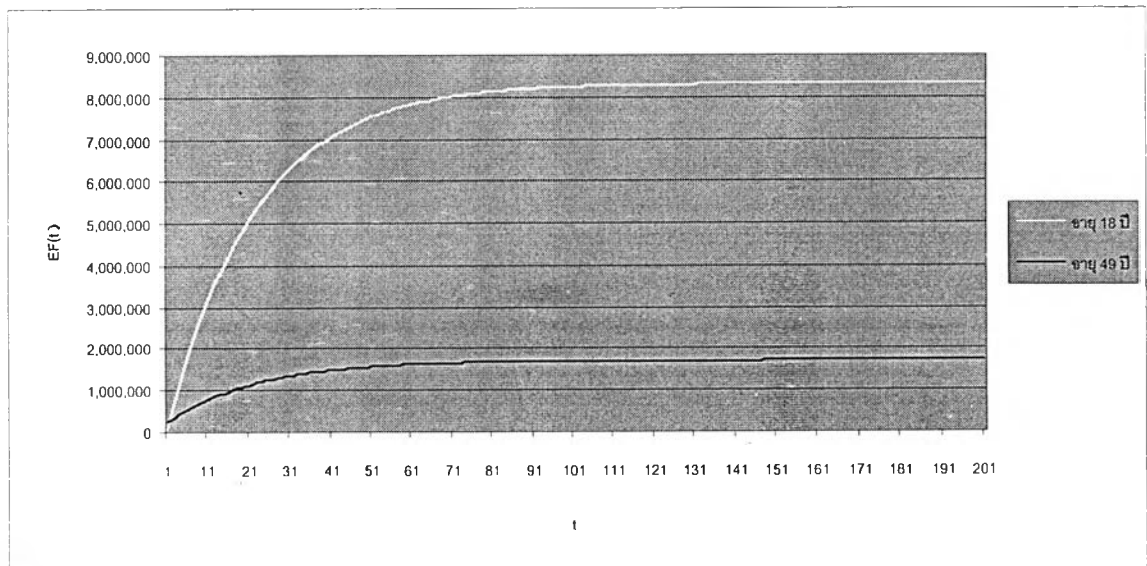
$$M = 15 \text{ และ } Q = 0.9077$$

ดังนั้นจากความสัมพันธ์ที่กล่าวมาแล้ว สามารถคำนวณหาค่า $EF(t)$ ได้จากสมการ (5.1.7) โดยคำนวณที่ค่า $EF(t)$ ทั้งชายและหญิง ที่อายุ 18 และ 49 ปี ซึ่งสามารถแสดงผลลัพธ์เป็นกราฟดังนี้(รูปที่ 7 และ 8)

รูปที่ 7 กราฟแสดงการลู่เข้าของความสัมพันธ์ของ $EF(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานชายที่อายุ 18 และ 49 ปี



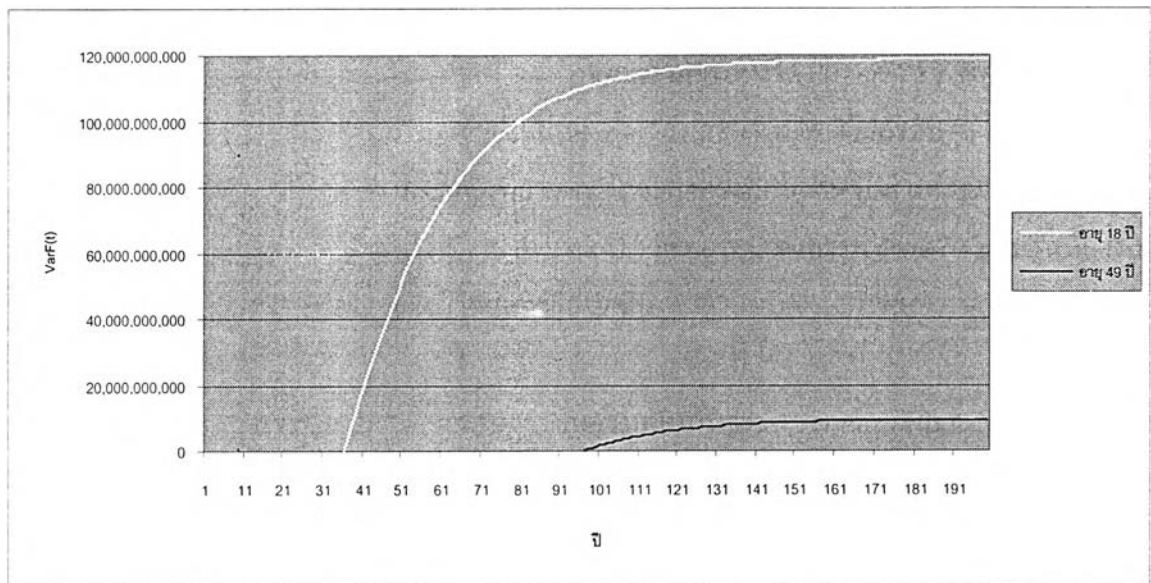
รูปที่ 8 กราฟแสดงการลู่เข้าของความสัมพันธ์ของค่า $EF(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี



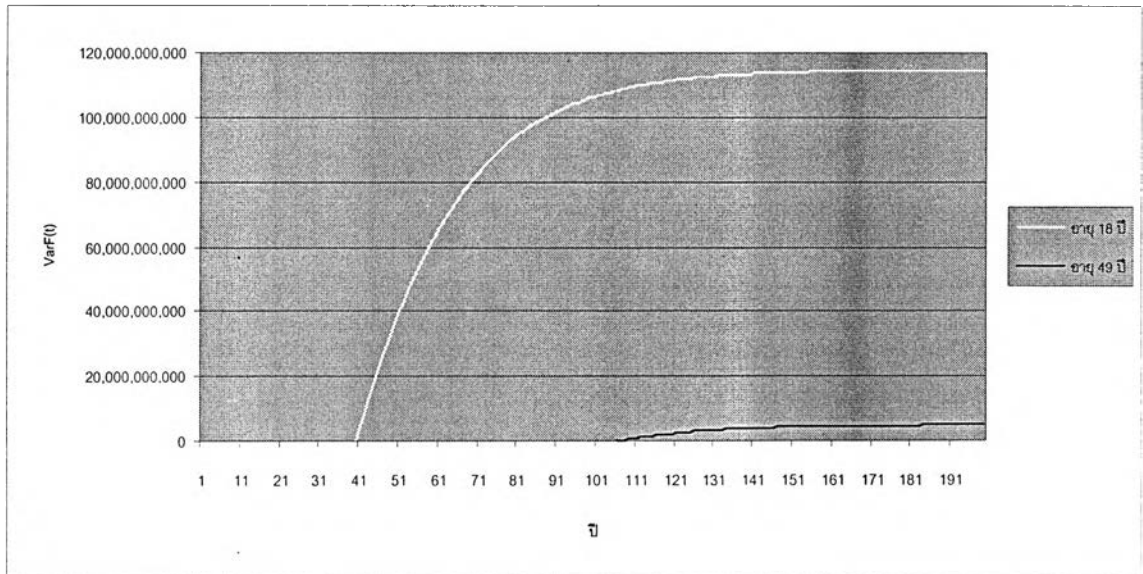
จากกราฟจะเห็นได้ว่า $EF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี จะเริ่มเข้าสู่ประมาณ $t = 70$ และ $t = 40$ ตามลำดับ ซึ่งค่าการถ่วงเข้าของ $EF(t)$ สำหรับพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 ปี จะสูงกว่าที่อายุ 49 ปี สำหรับกราฟ $EF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุต่างๆ (19 – 48 ปี) จะอยู่ระหว่างกราฟ $EF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี (ซึ่งมิได้แสดงไว้ ณ ที่นี้)

ความสัมพันธ์ของ $E[F(t)]^2$ จากสมการ(5.1.13) สามารถนำมาคำนวณค่า $VarF(t)$ โดยคำนวณที่ค่า $VarF(t)$ ทั้งชายและหญิง ที่อายุ 18 และ 49 ปี ซึ่งสามารถแสดงผลลัพธ์เป็นกราฟดังนี้ (รูปที่ 9 และ 10)

รูปที่ 9 กราฟแสดงการถ่วงเข้าของความสัมพันธ์ของค่า $VarF(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานชายที่อายุ 18 และ 49 ปี



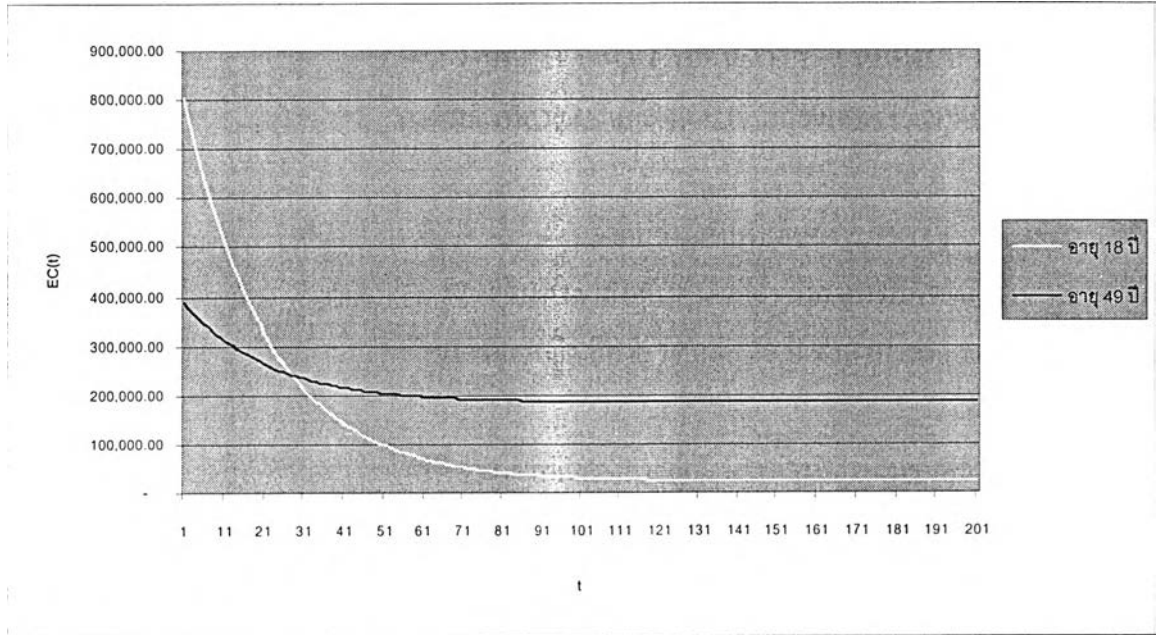
รูปที่ 10 กราฟแสดงการลู่เข้าของความสัมพันธ์ของค่า $VarF(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี



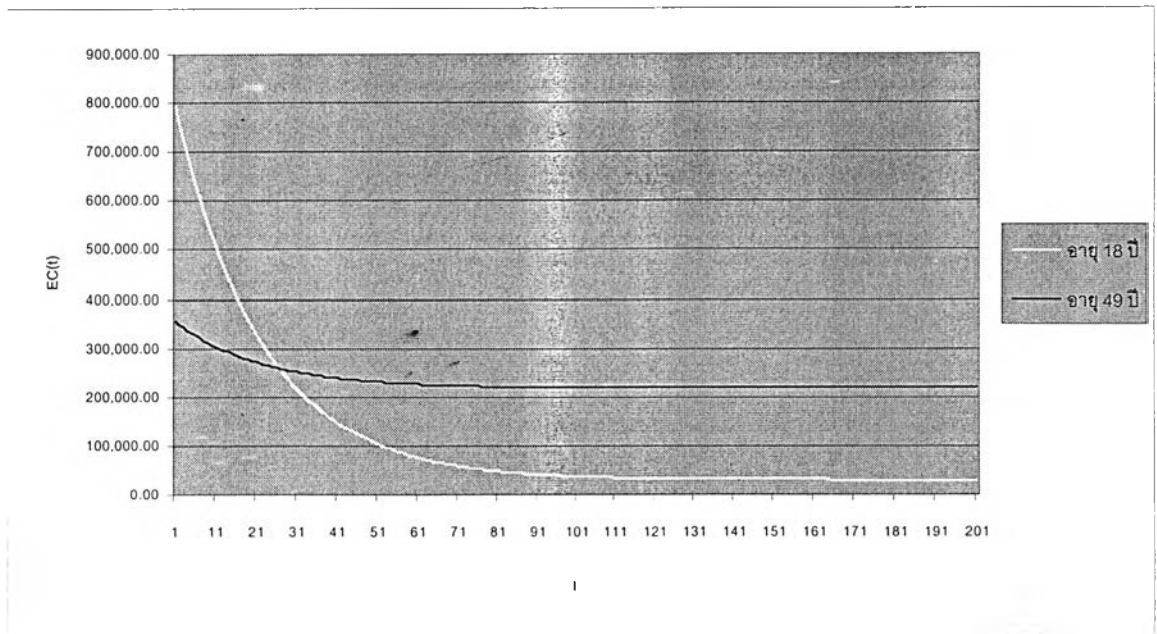
จากกราฟจะเห็นได้ว่า $VarF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี จะเริ่มลู่เข้าประมาณ $t = 90$ และ $t = 120$ ตามลำดับ ซึ่งค่าการลู่เข้าของ $VarF(t)$ สำหรับพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 ปี จะสูงกว่าที่อายุ 49 ปี สำหรับกราฟ $VarF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุต่างๆ (19 – 48 ปี) จะอยู่ระหว่างกราฟ $VarF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี (ซึ่งมิได้แสดงไว้ ณ ที่นี้)

ความสัมพันธ์ระหว่าง $F(t)$ กับ $C(t)$ จากสมการ(5.1.10) และ (5.1.17) สามารถนำมาคำนวณค่า $EC(t)$ และ $VarC(t)$ โดยคำนวณทั้งชายและหญิง ที่อายุ 18 และ 49 ปี ซึ่งสามารถแสดงผลลัพธ์เป็นกราฟดังนี้(รูปที่ 11 – 14)

รูปที่ 11 กราฟแสดงการถ่วงเข้าของความสัมพันธ์ของค่า $EC(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานชายที่อายุ 18 และ 49 ปี



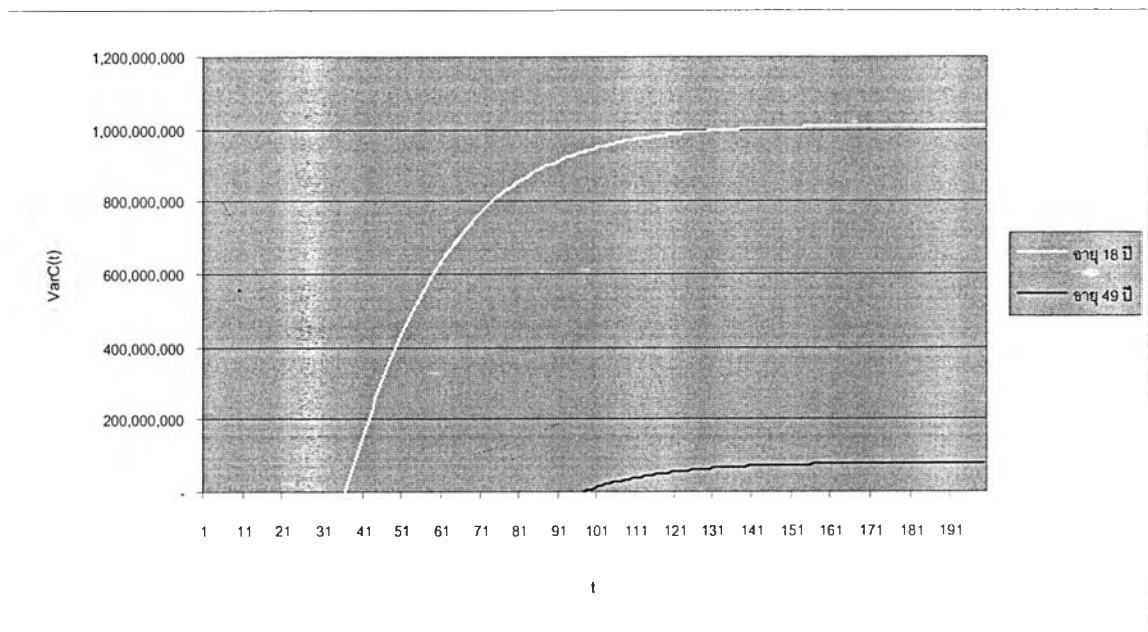
รูปที่ 12 กราฟแสดงการถ่วงเข้าของความสัมพันธ์ของค่า $EC(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี



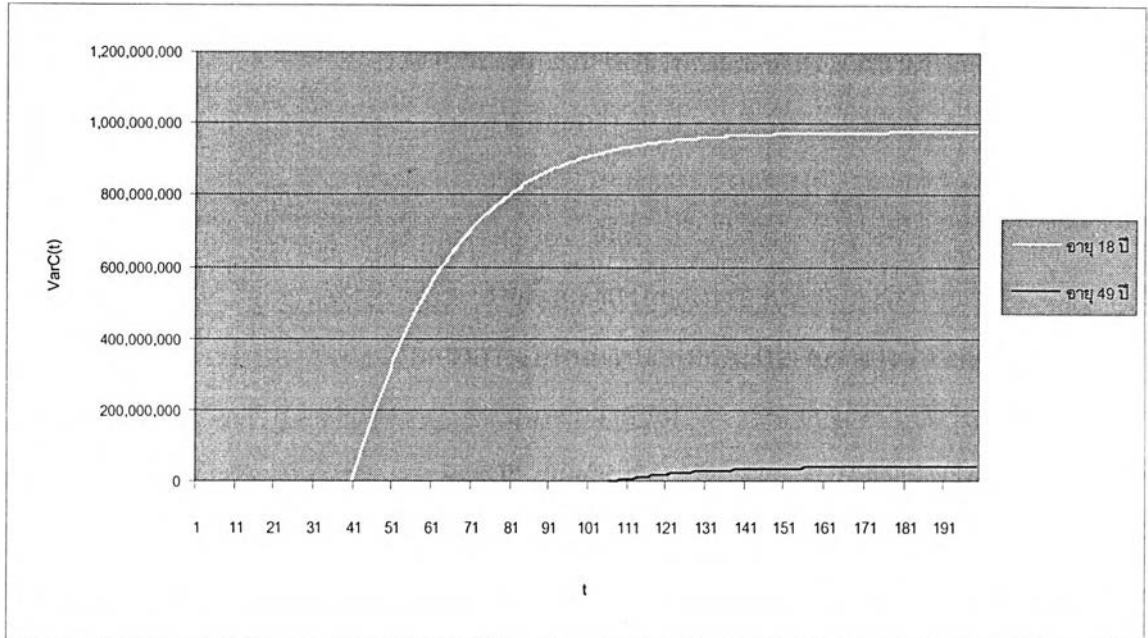
จากกราฟจะเห็นได้ว่า $EC(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี จะเริ่มเข้าสู่ประมาณ $t = 70$ และ $t = 40$ ตามลำดับ ซึ่งค่าการเข้าสู่ของ $EC(t)$ สำหรับพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 ปี จะต่ำกว่าที่อายุ 49 ปี ซึ่งกลับกับกราฟ $EF(t)$ (รูปที่ 7-8) สำหรับกราฟ $EC(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุต่างๆ (19-48 ปี) จะอยู่ระหว่างกราฟ $EC(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี (ซึ่งมิได้แสดงไว้ ณ ที่นี้)

จากความสัมพันธ์ของ $E[F(t)^2]$ จากสมการ(5.1.13) ซึ่งสามารถนำมาคำนวณค่า $VarF(t)$ ในทางกลับกันค่าดังกล่าวก็สามารถที่จะนำมาคำนวณค่า $VarC(t)$ โดยคำนวณที่ค่า $VarC(t)$ ทั้งชายและหญิง ที่อายุ 18 และ 49 ปี ซึ่งสามารถแสดงผลเป็นกราฟดังนี้(รูปที่ 13 และ 14)

รูปที่ 13 กราฟแสดงการเข้าสู่ของความสัมพันธ์ของค่า $VarC(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานชายที่อายุ 18 และ 49 ปี



รูปที่ 14 กราฟแสดงการลู่เข้าของความสัมพันธ์ของค่า $VarC(t)$ ที่เวลา t ของพนักงานหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี



จากกราฟจะเห็นได้ว่า $VarF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี จะเริ่มลู่เข้าประมาณ $t = 90$ และ $t = 120$ ตามลำดับ ซึ่งค่าการลู่เข้าของ $VarF(t)$ สำหรับพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 ปี จะสูงกว่าที่อายุ 49 ปี เช่นเดียวกับกับรูปที่ 5 - 6 สำหรับกราฟ $VarF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุต่างๆ (19 - 48 ปี) จะอยู่ระหว่างกราฟ $VarF(t)$ ของพนักงานทั้งชายและหญิงที่อายุ 18 และ 49 ปี (ซึ่งมิได้แสดงไว้ ณ ที่นี้)

บริษัทจำลองแห่งหนึ่งต้องการประมาณผลการดำเนินงานในกองทุนบำนาญ ซึ่งทำให้กับพนักงานทุกคนในบริษัทตั้งแต่ปี 2002 – 2021 เป็นเวลา 20 ปี จึงมีการกำหนดอัตราเริ่มต้น และอัตราการเข้า-ออกของพนักงานในแต่ละปี ดังต่อไปนี้

1. จำนวนพนักงานในปีเริ่มต้น ณ สิ้นปี 2002(ปีเริ่มต้น) แบ่งตามช่วงอายุ

อายุน้อยกว่า 20 ปี : 2 คน

อายุ 20 – 29 ปี : 4 คน

อายุ 30 – 39 ปี : 2 คน

อายุตั้งแต่ 40 ปีขึ้นไป : 2 คน

2. อัตราการรับพนักงานใหม่เป็นไปตามตารางที่ 11 และ แบ่งตามช่วงอายุดังนี้

อายุน้อยกว่า 20 ปี : 15% ของอัตราการรับพนักงานใหม่ทั้งหมดในแต่ละปี

อายุ 20 – 29 ปี : 41% ของอัตราการรับพนักงานใหม่ทั้งหมดในแต่ละปี

อายุ 30 – 39 ปี : 36% ของอัตราการรับพนักงานใหม่ทั้งหมดในแต่ละปี

อายุตั้งแต่ 40 ปีขึ้นไป : 8% ของอัตราการรับพนักงานใหม่ทั้งหมดในแต่ละปี

ตารางที่ 10 แสดงอัตราการรับพนักงานใหม่ทั้งหมดในแต่ละปี ของบริษัทจำลองแห่งหนึ่ง

ปี	อัตราการรับพนักงาน	ปี	อัตราการรับพนักงาน
2002	-	2012	35%
2003	45%	2013	32%
2004	50%	2014	29%
2005	55%	2015	26%
2006	60%	2016	25%
2007	55%	2017	24%
2008	50%	2018	23%
2009	45%	2019	22%
2010	40%	2020	21%
2011	38%	2021	20%

3. อัตราการลาออกของพนักงาน แบ่งตามช่วงอายุ โดยกำหนดให้เท่ากันตลอดทุกปี

อายุน้อยกว่า 20 ปี : 3.90% ของจำนวนพนักงานทั้งหมดในแต่ละปี

อายุ 20 – 29 ปี : 10.66% ของจำนวนพนักงานทั้งหมดในแต่ละปี

อายุ 30 – 39 ปี : 9.36% ของจำนวนพนักงานทั้งหมดในแต่ละปี

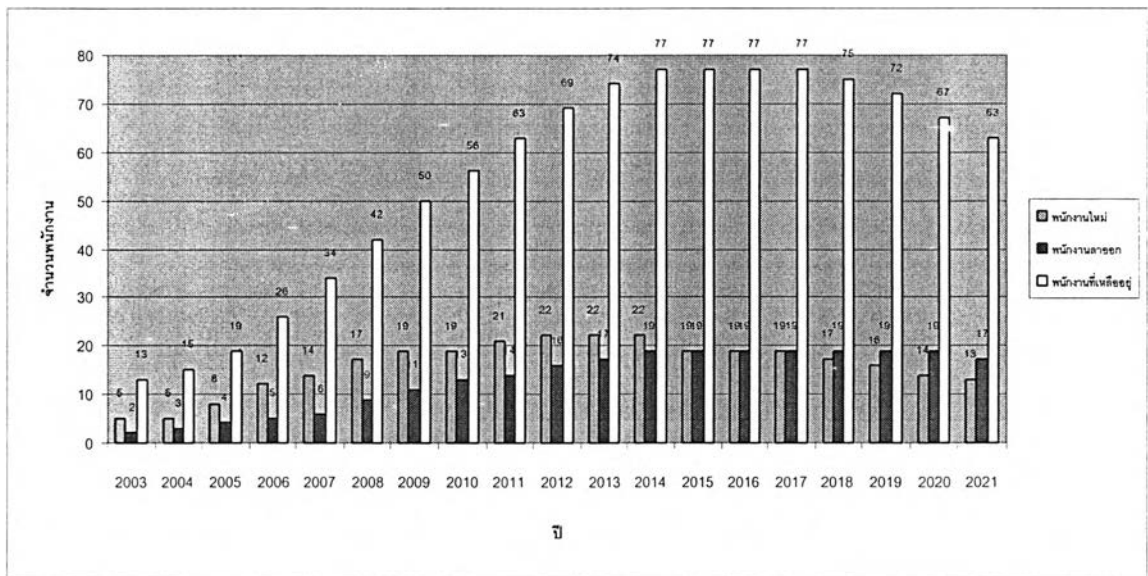
อายุตั้งแต่ 40 ปีขึ้นไป : 2.08% ของจำนวนพนักงานทั้งหมดในแต่ละปี

4. จำนวนพนักงานที่เหลืออยู่ทั้งหมดในแต่ละปี คำนวณได้ดังนี้

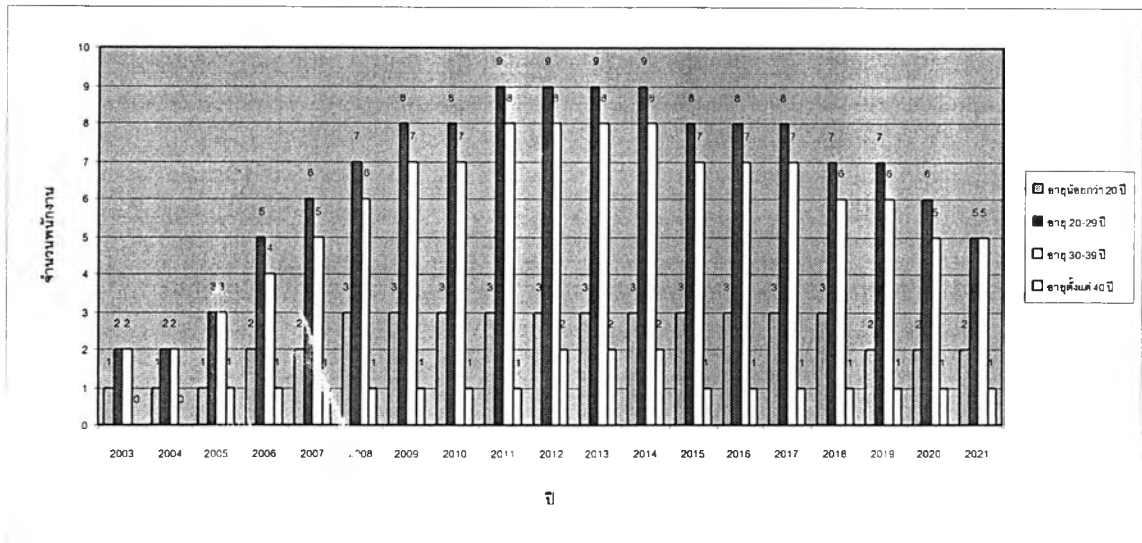
$$\text{จำนวนพนักงานที่เหลืออยู่ปีที่ } t = \text{จำนวนพนักงานที่เหลืออยู่ปีที่ } t - 1 + \text{จำนวนพนักงานใหม่ปีที่ } t - \text{จำนวนพนักงานที่ออกจากกองทุนปีที่ } t$$

จากเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นสามารถแสดงจำนวนพนักงานทั้งหมด จำนวนพนักงานใหม่ และจำนวนพนักงานลาออกในแต่ละปี ซึ่งจะแบ่งตามช่วงอายุ และเพศของพนักงานดังต่อไปนี้ (สำหรับเพศนั้นใช้การสุ่มระบุเพศในแต่ละปี)

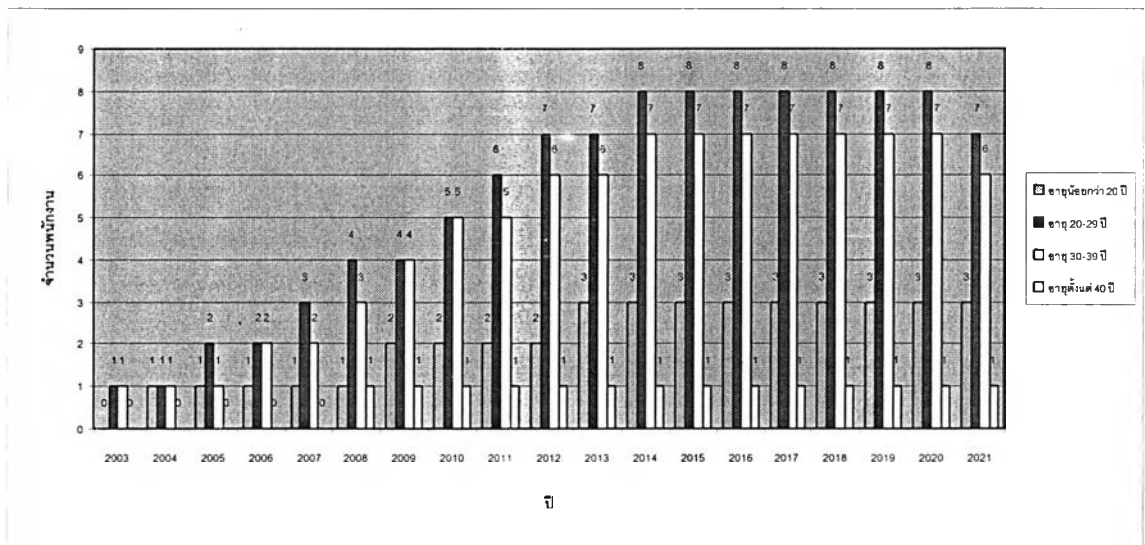
รูปที่ 15 แสดงจำนวนพนักงานใหม่ พนักงานลาออก และพนักงานที่เหลืออยู่ทั้งหมดในแต่ละปี



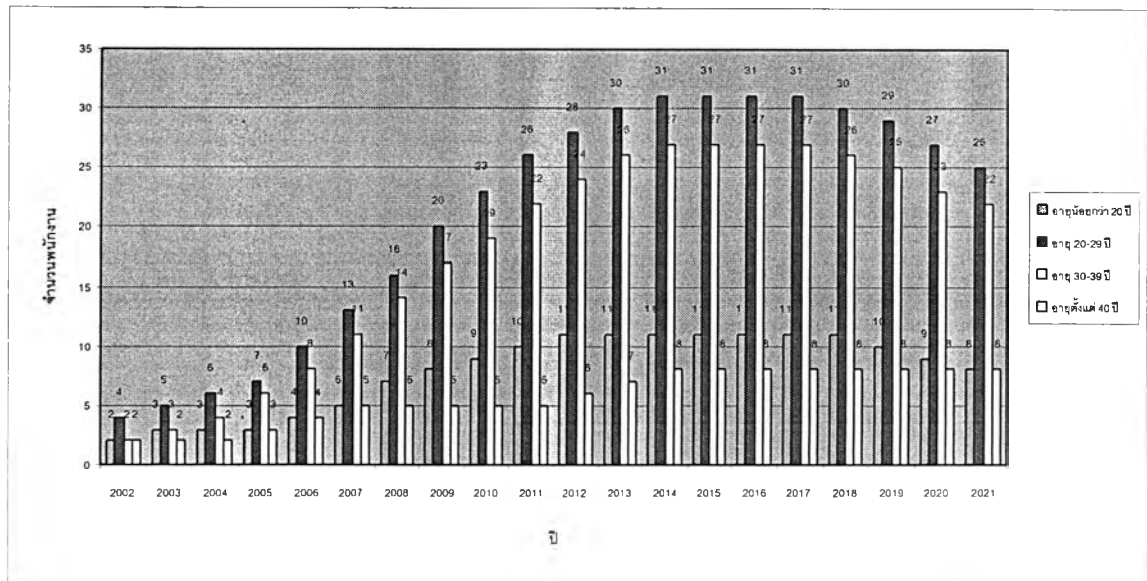
รูปที่ 16 แสดงจำนวนพนักงานใหม่ในแต่ละปี แบ่งตามช่วงอายุ



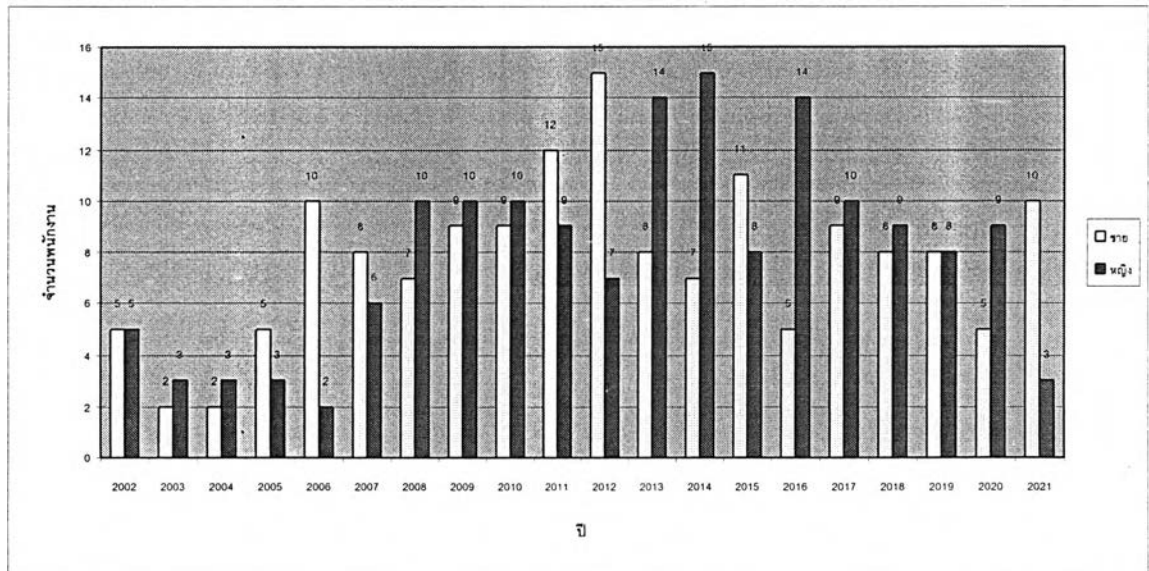
รูปที่ 17 แสดงจำนวนพนักงานลาออกในแต่ละปี แบ่งตามช่วงอายุ



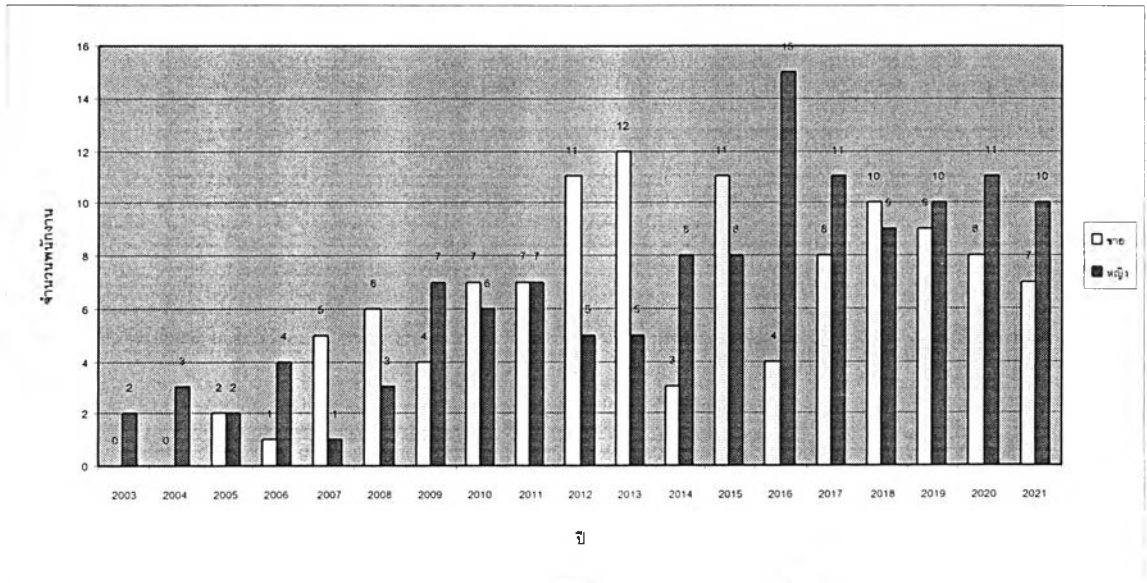
รูปที่ 18 แสดงจำนวนพนักงานที่เหลืออยู่ทั้งหมดในแต่ละปี แบ่งตามช่วงอายุ



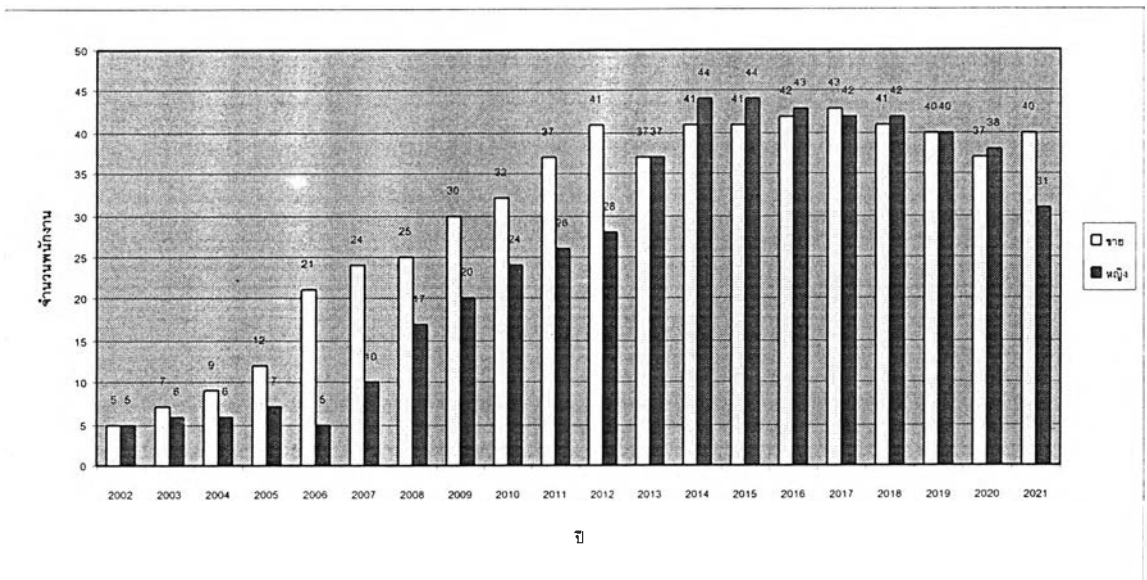
รูปที่ 19 แสดงจำนวนพนักงานใหม่ทั้งหมดในแต่ละปี แบ่งตามเพศ



รูปที่ 20 แสดงจำนวนพนักงานลาออกทั้งหมดในแต่ละปี แบ่งตามเพศ



รูปที่ 21 แสดงจำนวนพนักงานที่เหลืออยู่ทั้งหมดในแต่ละปี แบ่งตามเพศ

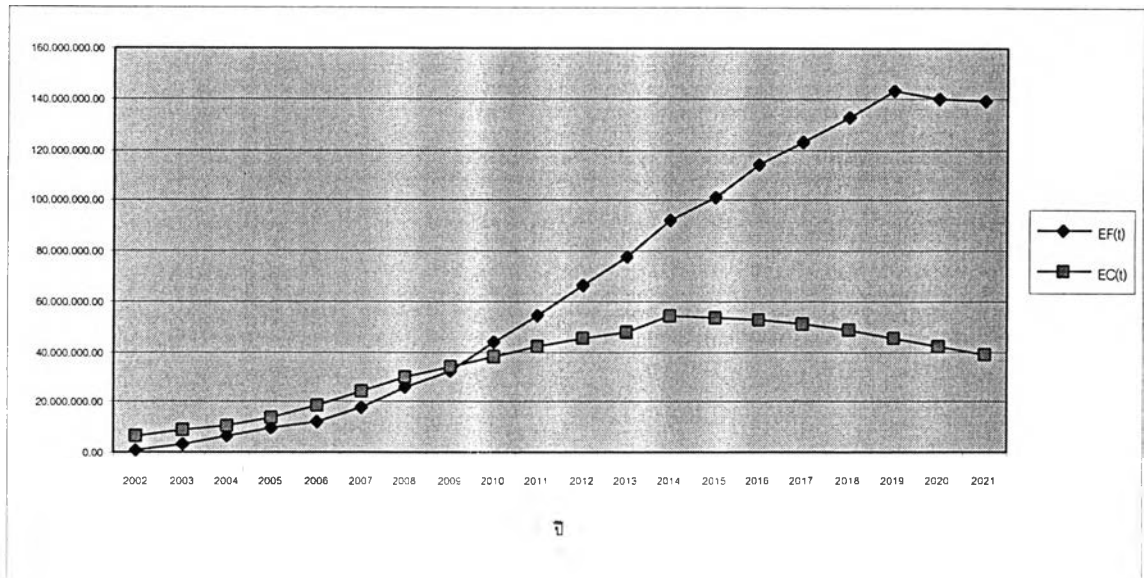


จากจำนวนพนักงานใหม่ พนักงานลาออก โดยแบ่งตามช่วงอายุ ซึ่งปี พ.ศ. และเพศ ที่ลาออกของพนักงานเกิดจากการลุ่ม ดังนั้นจึงสามารถประมาณมูลค่าการระดมทุน และเงินสมทบในกองทุนบำนาญรวมทั้งหมดของบริษัทได้ตามตารางที่ 11 และรูปที่ 22

ตารางที่ 11 แสดงการเปรียบเทียบค่า $EF(t)$ และ $EC(t)$ ในกองทุนบำนาญรวมทั้งหมดของบริษัท

ปี	$EF(t)$	$EC(t)$
2002	559,189.62	6,728,405.92
2003	3,390,846.38	9,199,720.86
2004	6,135,676.60	10,726,448.16
2005	9,526,776.98	13,549,590.46
2006	12,094,580.56	18,342,362.19
2007	17,833,567.29	23,908,519.65
2008	25,468,261.86	29,591,477.69
2009	32,599,290.45	34,217,823.95
2010	43,553,077.29	37,795,842.58
2011	54,157,049.16	42,228,691.45
2012	66,294,920.31	45,520,017.82
2013	77,838,498.01	47,974,882.91
2014	91,828,259.06	54,136,169.25
2015	100,965,870.15	53,420,157.61
2016	113,752,305.32	52,135,664.76
2017	123,001,649.85	51,125,261.74
2018	132,316,199.29	48,830,158.77
2019	142,930,179.72	45,509,223.95
2020	139,658,686.02	42,195,802.26
2021	138,892,682.04	38,714,494.47

รูปที่ 22 กราฟแสดงการเปรียบเทียบระหว่างค่า $EF(t)$ กับ $EC(t)$ ในกองทุนบำนาญของบริษัทจำลอง
แห่งหนึ่ง



จากกราฟที่ได้จะเห็นว่าในช่วงปี 2002 – 2009 ค่าคาดหวังของเงินสมทบในกองทุนบำนาญ ($EC(t)$) มากกว่า ค่าคาดหวังของการระดมทุนในกองทุนบำนาญ ($EF(t)$) เนื่องจากช่วงปีดังกล่าว เป็นช่วงแรกของการระดมทุน จากสมการ(3.2.1.1.4) จึงทำให้ค่าคาดหวังของการระดมทุนในกองทุนบำนาญ ($EF(t)$) มีค่าน้อยกว่า ค่าหนี้สินคงค้าง (Accrued Liability) และตั้งแต่ปี 2010 – 2021 ค่าคาดหวังของเงินสมทบในกองทุนบำนาญ น้อยกว่า ค่าคาดหวังของการระดมทุนในกองทุนบำนาญ เนื่องจากช่วงปีดังกล่าว เป็นช่วงที่ได้ทำการระดมทุนไปพอสมควรแล้ว และเริ่มมีผลตอบแทนจากการลงทุน จากสมการ(3.2.1.1.4) จึงทำให้ค่าคาดหวังของการระดมทุนในกองทุนบำนาญ ($EF(t)$) มีค่ามากกว่า ค่าหนี้สินคงค้าง (Accrued Liability) ดังนั้นทำให้เงินระดมทุนสูงขึ้น ส่วนเงินสมทบจะลดลง ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับจำนวนพนักงาน และอายุของพนักงานแต่ละคนที่เข้าร่วมในกองทุนบำนาญนี้ในแต่ละปี