บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยนี้ ต้องการทำการศึกษาและเปรียบเทียบค่า Tail Dependence ของตัวแปรสุ่ม 2 ตัว สำหรับการแจกแจงทั้ง 3 แบบ คือ

1. การแจกแจงแบบปกติ
2. การแจกแจงแบบที
3. การแจกแจงแบบดับเบิ้ลที

นำผลที่ได้จากการศึกษาค่า Tail Dependence มาวิเคราะห์ถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว เพื่อประเมินมูลค่าของตราสารอนุพันธ์ (CDO) ตามแต่ละสถานการณ์ ทั้งในกรณีที่มีบริษัท 2 บริษัท และในกรณีที่มีบริษัทมากกว่า 2 บริษัท ว่าค่า Tail Dependence ที่มาจากการแจกแจงคอพพูลาแบบต่าง ๆ ให้ผลต่อการประเมินมูลค่า CDO อย่างไร และสามารถประเมินมูลค่าของตราสารอนุพันธ์ (CDO) ได้

3.1 แผนการดำเนินการวิจัย

กำหนดขั้นตอนการศึกษา เพื่อเปรียบเทียบข้อมูลที่ได้จากแต่ละการแจกแจง ดังนี้

1. คำนวณค่า Tail Dependence ของแต่ละการแจกแจง และเปรียบเทียบค่าที่ได้ว่าการแจกแจงใด ในแต่ละสถานการณ์จะมีค่า Tail Dependence มากกว่ากัน
2. ทำการประเมินมูลค่า CDO ในกรณีที่มีบริษัท 2 บริษัท โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งสามารถจำแนก กรณีศึกษาที่น่าสนใจ ดังนี้
   - 2.1 กรณีที่มี Tranche Width $\leq 50\%$
   - 2.2 กรณีที่มี Tranche Width $> 50\%$
3. ทำการประเมินมูลค่า CDO ในกรณีที่มีบริษัทมากกว่า 2 บริษัท โดยใช้วิธีมอนติคาร์โล ในที่นี้จะทำการศึกษาที่จำนวน 50 บริษัท เพื่อให้ใกล้เคียงกับ Set Index 50 ซึ่งใช้วิธีการสร้างข้อมูลในรูปแบบของ Copula ที่มาจากการแจกแจงร่วมที่แตกต่างกัน โดยจำแนกกรณีศึกษาที่น่าสนใจ ดังนี้
   - 3.1 กรณีที่มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็น 0.1, 0.5, 0.9
   - 3.2 กรณีที่มีการจ่ายเงินปันผลระหว่างปี

3.2 ขั้นตอนในการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยมีขั้นตอน ดังนี้

1. คำนวณค่า Tail Dependence ของแต่ละการแจกแจงภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ
2. ทำการประเมินมูลค่า CDO ในกรณี 2 บริษัท ได้จากการวิเคราะห์ข้อมูล
3. ทำการประเมินมูลค่า CDO ในกรณี 50 บริษัท ได้จากวิธีการมอนติคาร์โลในแต่ละสถานการณ์
4. เปรียบเทียบผลการคำนวณมูลค่า CDO ที่ได้จากการแจกแจงคอพพูลาที่แตกต่างกันของทั้ง 3 การแจกแจง
5. สรุปผลการวิจัยในแต่ละสถานการณ์

รายละเอียดในแต่ละขั้นตอนกล่าวเป็นหัวข้อใหญ่ ๆ ได้ดังนี้

3.3 การคำนวณค่า Tail dependence ของแต่ละการแจกแจงภายใต้สถานการณ์ต่าง ๆ

เนื่องจากการวิจัยนี้ มีการศึกษาการแจกแจง 3 แบบ ดังนั้น สามารถคำนวณหาค่า Tail Dependence ของแต่ละการแจกแจงได้ดังนี้

3.3.1 การหาค่า Tail Dependence ของการแจกแจงแบบปกติ

จากนิยามของ Tail Dependence ที่ว่า

ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันการแจกแจงแบบ F_1 และ F_2 สัมประสิทธิ์ของ Tail Dependence ของ X และ Y มีค่าเป็น

$$\lim_{u \to 1} P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \tau$$

ซึ่งเราสามารถแสดงได้อีกนัยหนึ่งว่า

$$\tau = 2 \lim_{u \to 1} P(V > u | U = u)$$

โดย Embrechts, Lindskog, and McNeil (2001) ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ดังนี้

จาก $$P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \frac{P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right]}{P\left(X > F_1^{-1}(u)\right)}$$

$$= \frac{1 - P(X \le F_1^{-1}(u)) - P(Y \le F_2^{-1}(u)) + P(X \le F_1^{-1}(u) \wedge Y \le F_2^{-1}(u))}{1 - P(X \le F_1^{-1}(u))}$$

และ $P(X \le F_1^{-1}(u)) = u,\ P(Y \le F_2^{-1}(u)) = u,\ P(X \le F_1^{-1}(u) \wedge Y \le F_2^{-1}(u)) = C(u,u),$

$$P(X > F_1^{-1}(u) \wedge Y > F_2^{-1}(u)) = \overline{C}(u,u)$$

ถ้าให้ C เป็น Bivariate Copula ซึ่งมีค่าตัวแปรสุ่ม คือ (U,V) จะได้ว่า

$$p(V < u | U = u) = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \text{ และ } P(V > u | U = u) = 1 - \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)$$

จากนิยามจะได้ค่า

$$\tau = \lim_{u \to 1} \frac{1 - 2u + C(u,u)}{1 - u}$$

$$= -\lim_{u \to 1} \left(-2 + \left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial s}\right|_{s=t=u} + \left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial t}\right|_{s=t=u} \right)$$

$$= \lim_{u \to 1} \left(1 - \left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial s}\right|_{s=t=u} \right) + \left(1 - \left.\frac{\partial C(s,t)}{\partial t}\right|_{s=t=u} \right)$$

$$= \lim_{u \to 1} \left[P(V > u | U = u) + P(U > u | V = u) \right]$$

ดังนั้น ถ้า C มีคุณสมบัติการสลับที่ (Exchangeable Copula) คือ $C(u,v) = C(v,u)$ จะสามารถแสดงค่า τ ดังนี้

$$\tau = 2 \lim_{u \to 1} P(V > u | U = u)$$

Embrechts, Lindskog, and McNeil (2001) ได้แสดงการหาค่า Tail Dependence ของการแจกแจงแบบปกติไว้ดังนี้

เมื่อให้ $(X,Y)^T$ มีการแจกแจงเป็น Bivariate Normal Distribution ที่มีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ เป็น ρ เนื่องจากว่าฟังก์ชันความหนาแน่นของการแจกแจงแบบปกติมีค่าไม่รู้จบทางขวามือ (Infinite Right Endpoint) กำหนดให้ Φ เป็นฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน , Φ^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ Φ และ $\overline{\Phi} = 1 - \Phi$

$$\tau = 2 \lim_{u \to 1} P(V > u | U = u)$$

$$= 2 \lim_{x \to \infty} P(\Phi^{-1}(V) > x | \Phi^{-1}(U) = x)$$

$$= 2 \lim_{x \to \infty} P(Y > x | X = x)$$

ดังนั้น ถ้า $Y|X = x \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$ จะได้ว่า

$$\tau = 2\lim_{x\to\infty} \overline{\Phi}\left(\frac{x-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

$$= 2\lim_{x\to\infty} \overline{\Phi}\left(\frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ค่า Tail Dependence ของการแจกแจงแบบปกติเป็น

$$\tau = 2\lim_{x\to\infty} \overline{\Phi}\left(\frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right) \tag{3.1}$$

สังเกตว่า Tail Dependence มีค่าเท่ากับ 0 เมื่อ $\rho < 1$ และมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $\rho = 1$

ในบทต่อไปเราจะทำการเปรียบเทียบ Tail Dependence เชิงตัวเลขระหว่าง Gaussian Copula กับ Copula แบบอื่น ซึ่งในบางกรณีที่ไม่สามารถหาสูตรสำเร็จได้ ในกรณีดังกล่าวเราจะหาค่า Tail Dependence โดยประมาณดังนี้

จากนิยามของ Tail Dependence ที่ว่า

$$\lim_{u} P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \tau$$

นิยาม Tail Dependence at Rank u ใช้สัญลักษณ์ τ_u ดังนี้

$$\tau_u = P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \frac{P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right]}{P\left(X > F_1^{-1}(u)\right)}$$

ซึ่งสามารถหาค่า $P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right] = \int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty} \int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ ได้จากนิยามการแจกแจงแบบปกติสองตัวแปรคือ

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2-2\rho xy+y^2\right]} \quad , -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

โดยกำหนดให้ค่า $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 1, -1 < \rho < 1$

จะได้ว่า $P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right] = \int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty} \int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty} \int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2-2\rho xy+y^2\right]}\,dx\,dy$$

แทนค่าที่ได้ลงในสมการจะได้ว่า

$$\tau_u = \frac{\int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty}\int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[x^2-2\rho xy+y^2\right]} dx\,dy}{1-u} \tag{3.2}$$

เมื่อ $F_1^{-1}(u)$, $F_2^{-1}(u)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบปกติ

จาก (3.2) เราสามารถคำนวณ Tail Dependence ได้จาก

$$\tau = \lim_{u\to 1}\tau_u$$

ดังนั้นในกรณีที่ต้องการเปรียบเทียบ Tail Dependence เชิงตัวเลข เราจะเปรียบเทียบค่า τ_u แทน τ

3.3.2 การหาค่า Tail Dependence ของการแจกแจงแบบที

ถ้าให้ $(X,Y)^T$ มีการแจกแจงเป็น Bivariate t Distribution ด้วยระดับขั้นความเสรี ν และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็น ρ

กำหนดให้ $t_{(\nu)}$ เป็นฟังก์ชันสะสมของการแจกแจงแบบทีที่มีระดับขั้นความเสรี ν , $t_{(\nu)}^{-1}$ เป็นฟังก์ชันผกผันของ $t_{(\nu)}$ และ $\bar{t}_{(\nu)} = 1 - t_{(\nu)}$

จาก Embrechts, Lindskog, and McNeil (2001) กำหนดให้ $Y|X = x$ จะได้ว่า

$$E\left[Y|X = x\right] = \rho x$$

$$Var\left[Y|X = x\right] = \left(\frac{\nu + x^2}{\nu + 1}\right)\left(1 - \rho^2\right)$$

และ $$\tau = 2\lim_{x\to\infty} P\left(Y > x|X = x\right)$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\bar{t}_{(\nu+1)}\left[\left(\frac{\nu+1}{\nu+x^2}\right)^{1/2}\frac{x-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]$$

$$= 2\lim_{x\to\infty}\bar{t}_{(\nu+1)}\left[\left(\frac{\nu+1}{\frac{\nu}{x^2}+1}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right]$$

$$= 2\bar{t}_{(v+1)}\left(\frac{\sqrt{v+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ค่า Tail Dependence ของการแจกแจงแบบทีเป็น

$$\tau = 2\bar{t}_{(v+1)}\left(\frac{\sqrt{v+1}\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right) \tag{3.3}$$

Tail Dependence at Rank u หรือ τ_u สามารถคำนวณได้ดังนี้ จากนิยามของ Tail Dependence ที่ว่า

$$\lim_{u} P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \tau$$

จะได้ว่า Tail Dependence at Rank u ใช้สัญลักษณ์ τ_u เป็น

$$\tau_u = P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \frac{P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right]}{P\left(X > F_1^{-1}(u)\right)}$$

ซึ่งสามารถหาค่า $P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right] = \int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty} \int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} f(x,y)dxdy$ ได้จากนิยามการแจกแจงแบบทีสองตัวแปร คือ

$$f(x,y) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)}{(v\pi)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{(v+2)/2}} \quad , -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$$

จะได้ว่า $P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right] = \int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty} \int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} f(x,y)dxdy$

$$= \int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty} \int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)}{(v\pi)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{(v+2)/2}} dx\,dy$$

แทนค่าที่ได้ลงในสมการจะได้ว่า

$$\tau_u = \frac{\displaystyle\int_{F_2^{-1}(u)}^{\infty}\int_{F_1^{-1}(u)}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)}{(v\pi)\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{v(1-\rho^2)}\right)^{(v+2)/2}} dx\,dy}{1-u} \qquad (3.4)$$

เมื่อ $F_1^{-1}(u)$, $F_2^{-1}(u)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบที

3.3.3 การหาค่า Tail Dependence ของการแจกแจงแบบดับเบิ้ลที

กำหนดให้ M, Z_1 และ Z_2 เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบที ด้วยระดับขั้นความเสรี v และเป็นอิสระต่อกัน นิยาม

$$X = a_1 M + \sqrt{1-a_1^2}\,Z_1$$
$$Y = a_2 M + \sqrt{1-a_2^2}\,Z_2$$

Hull and White (2004) นิยาม X และ Y ว่ามีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่เรียกว่าดับเบิ้ลที โดยมี F_1, F_2 เป็นฟังก์ชันสะสมของ X และ Y ที่มีการแจกแจงแบบดับเบิ้ลที และ F_1^{-1}, F_2^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันของ F_1, F_2

จากการศึกษาเรายังไม่สามารถหาสูตรสำเร็จของ Tail Dependence ได้ แต่สามารถหาค่า Tail Dependence at Rank u ได้ดังนี้

จากนิยามของ Tail Dependence ที่ว่า

$$\lim_{u} P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \tau$$

จะได้ว่า Tail Dependence at Rank u ใช้สัญลักษณ์ τ_u เป็น

$$\tau_u = P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \frac{P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right]}{P\left(X > F_1^{-1}(u)\right)}$$

กำหนดให้ $\alpha_1 = F_1^{-1}(u)$ และ $\alpha_2 = F_2^{-1}(u)$

และ $\quad p[Y > \alpha_2 \wedge X > \alpha_1] = E\left[p(Y > \alpha_2 \wedge X > \alpha_1 | M = m)\right]$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(Y > \alpha_2 \wedge X > \alpha_1 | M = m) f_M(m) dm$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p\left(a_2 M + \sqrt{1-a_2^2}\,Z_2 > \alpha_2 \wedge a_1 M + \sqrt{1-a_1^2}\,Z_1 > \alpha_1 \middle| M = m\right) f_M(m) dm$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p\left(Z_2 > \frac{\alpha_2 - a_2 M}{\sqrt{1-a_2^2}} \wedge Z_1 > \frac{\alpha_1 - a_1 M}{\sqrt{1-a_1^2}} \middle| M = m \right) f_M(m) dm$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p\left(Z_2 > \frac{\alpha_2 - a_2 m}{\sqrt{1-a_2^2}} \wedge Z_1 > \frac{\alpha_1 - a_1 m}{\sqrt{1-a_1^2}} \right) f_M(m) dm$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p\left(Z_2 > \frac{\alpha_2 - a_2 m}{\sqrt{1-a_2^2}} \right) p\left(Z_1 > \frac{\alpha_1 - a_1 m}{\sqrt{1-a_1^2}} \right) f_M(m) dm$$

แทนค่าที่ได้ลงในสมการ จะได้ว่า

$$\tau_u = P\left[Y > F_2^{-1}(u) \middle| X > F_1^{-1}(u)\right] = \frac{P\left[Y > F_2^{-1}(u) \wedge X > F_1^{-1}(u)\right]}{P\left(X > F_1^{-1}(u)\right)}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p\left(Z_2 > \frac{\alpha_2 - a_2 m}{\sqrt{1-a_2^2}} \right) p\left(Z_1 > \frac{\alpha_1 - a_1 m}{\sqrt{1-a_1^2}} \right) f_M(m) dm}{1-u} \qquad (3.5)$$

เมื่อ $\alpha_1 = F_1^{-1}(u), \alpha_2 = F_2^{-1}(u)$ และ $F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(u)$ เป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบดับเบิ้ลที

3.4 การประเมินมูลค่า CDO ในกรณี 2 บริษัท โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ข้อมูล

นิยาม การประเมินมูลค่า CDO คือ การคำนวณหาอัตราผลตอบแทนที่เกิดขึ้นในแต่ละ Tranche โดยให้ได้มูลค่าที่ได้อยู่ภายใต้จุดสมดุล คือ ค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนใน Tranche มีค่าเท่ากับ เงินต้นที่เกิดขึ้นจากการลงทุนใน tranche นั้น และมูลค่า CDO คือ อัตราผลตอบแทนที่ได้รับ (yield rate=y%)

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้น คือ

1. ให้ X_1, X_2 มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง มีพารามิเตอร์เดียวกันเป็น λ และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็น F
2. Copula ระหว่าง X_1 และ X_2 มีคุณสมบัติ
   $P(U_1 \le F(x) \wedge U_2 \le F(x)) = P(U_1 > 1 - F(x) \wedge U_2 > 1 - F(x))$
   สำหรับทุก ๆ $-\infty < x < \infty$ เมื่อ $U_1 = F(X_1)$ และ $U_2 = F(X_2)$ เป็นฟังก์ชันสะสมของ X_1 และ X_2 ซึ่งมีรูปแบบการแจกแจงเป็นแบบเอกรูป

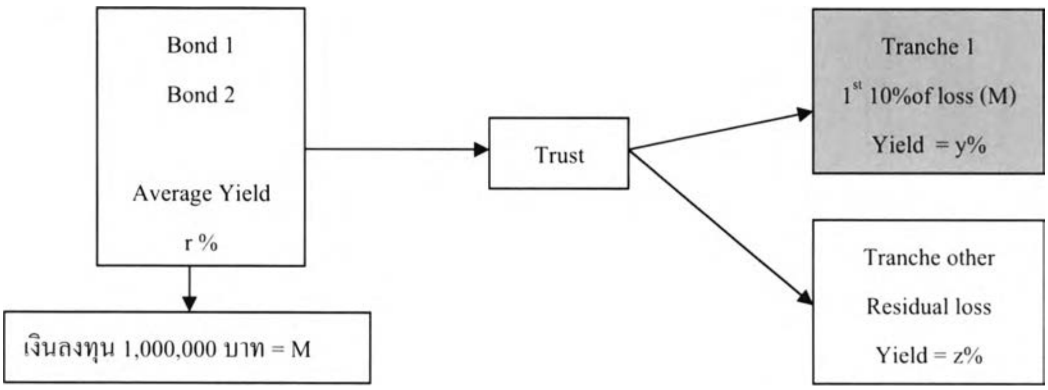
ในขั้นตอนนี้สามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

1. กรณีที่ Tranche Width $\le$ 50%
2. กรณีที่ Tranche Width $>$ 50%

3.4.1 กรณีที่ 1 เมื่อ Tranche Width $\le$ 50%

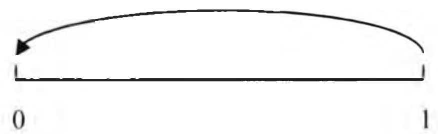
จะขออธิบายตัวอย่างการคำนวณอย่างง่าย ๆ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 เริ่มต้นจาก Trust หรือบริษัทหลักทรัพย์ ได้ซื้อตราสารจำนวนหนึ่ง ในที่นี้ให้มีการซื้อตราสารมาจาก 2 แห่ง (ส่วนทางซ้ายของรูป) และแต่ละแห่งมีมูลค่าตราสารเป็น 500,000 บาท ดังนั้น Trust จะต้องมีเงินลงทุนในตราสาร 1,000,000 บาท และจะมีดอกเบี้ยที่ได้รับจากการลงทุนเป็น r% ของเงินลงทุน เพื่อการประกันความเสี่ยงของตราสารที่ทำการซื้อมา Trust จะทำการออกตราสารขึ้นมา ในที่นี้ ให้มีจำนวน Tranches เป็น 2 โดยที่แต่ละ Tranche จะมีการรับประกันความเสี่ยงที่แตกต่างกัน และจะได้อัตราดอกเบี้ยที่แตกต่างกันตามลำดับการรับประกัน ซึ่งสามารถอธิบายได้ ดังรูปนี้



ภาพ 3.1 แสดงการประเมินมูลค่าของตราสารอนุพันธ์ (Collateralized Dept Obligations : CDO) ซึ่งทางซ้ายของภาพ คือ ตราสารที่ Trust ทำการลงทุนซื้อมา ส่วนทางขวาของภาพเป็นตราสารที่ Trust ขายในแต่ละขั้นความเสี่ยง (Tranche)

จากรูปกำหนดให้ Tranche 1 ซึ่งรับความเสี่ยงได้ 10% และมี Tranche Rate=Yield Rate=y% ต่อปี และจะคำนวณหาค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทน (Present Value of Pay off) ที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 จะได้รับเท่าไหร่โดยเฉลี่ยใน 1 ปี และถ้าให้ได้จุดสมดุล คือ ค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 = จำนวนเงินลงทุนใน Tranche นั้น จะหา Tranche Rate (y%) ที่เหมาะสม



Tranche Rate =y%

Risk Free=r%

$\therefore$ Tranche 1 รับความเสี่ยงไว้ 10%*(2*500,000)=100,000 แรก

เมื่อ V แทนมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับจาก Tranche 1 ในเวลาที่ $t = 1$

X_1 แทนเวลาของบริษัทที่ 1

X_2 แทนเวลาของบริษัทที่ 2

โดยที่ X_1, X_2 มีความสัมพันธ์กัน

จากนิยามของ V กำหนดให้

G เป็น เหตุการณ์ที่ไม่เกิดการล้มละลายภายในเวลา 1

ดังนั้น

$$V = \begin{cases} \dfrac{100{,}000(1+y)}{(1+r)} & \text{for } G \\ 0 & \text{for } G^c \end{cases}$$

$$E(V) = \frac{100{,}000(1+y)}{(1+r)} P(G)$$

$$= \frac{100{,}000(1+y)}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)$$

ซึ่ง $$P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1) = 1 - [P(X_1 \le 1) + P(X_2 \le 1) - P(X_1 \le 1 \wedge X_2 \le 1)]$$

$$= 1 - P(X_1 \le 1) - P(X_2 \le 1) + P(X_1 \le 1 \wedge X_2 \le 1)$$

และ $$P(X_1 \le 1 \wedge X_2 \le 1) = P(F(X_1) \le F(1) \wedge F(X_2) \le F(1))$$

$$= P(U_1 \le F(1) \wedge U_2 \le F(1))$$

จากข้อตกลงเบื้องต้น (2)

$$P(U_1 \le F(1) \wedge U_2 \le F(1)) = P(U_1 > 1 - F(1) \wedge U_2 > 1 - F(1))$$

จะได้ว่า $$P(X_1 \le 1 \wedge X_2 \le 1) = P(U_1 \le F(1) \wedge U_2 \le F(1))$$

$$= P(U_1 > 1 - F(1) \wedge U_2 > 1 - F(1))$$

$$= P(U_1 > 1 - F(1) | U_2 > 1 - F(1)) P(U_2 > 1 - F(1))$$

กำหนดให้ $k_1 = 1 - F(1)$ ดังนั้น

$$P(X_1 \le 1 \wedge X_2 \le 1) = P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) P(U_2 > k_1)$$

$$\therefore \quad P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1) = 1 - P(X_1 \le 1) - P(X_2 \le 1) + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) P(U_2 > k_1)$$

$$= 1 - [1 - e^{-\lambda}] - [1 - e^{-\lambda}] + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) P(U_2 > k_1)$$

$$= -1 + e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) P(U_2 > k_1)$$

และจาก $P(U > k_1) = 1 - k_1 = K_1$ จะได้ว่า

$$\therefore \quad P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1) = -1 + e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) K_1$$

เพื่อหาราคายุติธรรม $E(V) = 100{,}000$ และ สามารถคำนวณค่า Tranche Rate =y% ได้จาก

$$100{,}000 = E(V) = \frac{100{,}000(1+y)}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)$$

$$100{,}000 = \frac{100{,}000}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1) + y \frac{100{,}000}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)$$

$$y \frac{100{,}000}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1) = 100{,}000 - \frac{100{,}000}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)$$

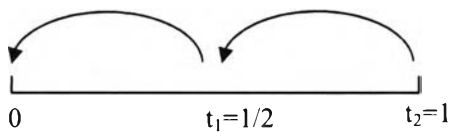
$$y = \frac{100{,}000 - \dfrac{100{,}000}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)}{\dfrac{100{,}000}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)}$$

$$y = \frac{100{,}000}{\dfrac{100{,}000}{(1+r)} P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)} - 1$$

$$y = \frac{(1+r)}{P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)} - 1$$

$$y = \frac{(1+r)}{-1 + e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) K_1} - 1$$

ตัวอย่างที่ 2 จากตัวอย่างที่ 1 ถ้าให้มีการจ่ายเงินปันผลทุกครึ่งปี จะคำนวณหาค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทน (Present Value of Pay off) ที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 จะได้รับเท่าไหร่โดยเฉลี่ยใน 1 ปี และถ้าให้ได้จุดสมดุล คือ ค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบัน ของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 = จำนวนเงินลงทุนใน Tranche นั้น จะหา Tranche Rate (y%) ที่เหมาะสม



$\therefore$ Tranche 1 รับความเสี่ยงไว้ 10%*(2*500,000)=100,000 แรก

เมื่อ V_i แทนมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับจาก Tranche 1 ในเวลาที่ t_i

X_1 แทนเวลาของบริษัทที่ 1

X_2 แทนเวลาของบริษัทที่ 2

โดยที่ X_1, X_2 มีความสัมพันธ์กัน

จากนิยามของ V กำหนดให้

G เป็น เหตุการณ์ที่ไม่เกิดการล้มละลายภายในเวลา $t_1 = \frac{1}{2}$

H เป็น เหตุการณ์ที่ไม่เกิดการล้มละลายภายในเวลา $t_2 = 1$

ดังนั้น

$$V_1 = \begin{cases} \dfrac{100{,}000\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)} & \text{for } G \\ 0 & \text{for } G^c \end{cases}$$

$$E(V_1) = \frac{100{,}000\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)} P(G)$$

และ

$$V_2 = \begin{cases} \dfrac{100{,}000\left(1+\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2} & \text{for } H \\ 0 & \text{for } H^c \end{cases}$$

$$E(V_1)=\frac{100{,}000\left(1+\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(H)$$

โดยที่ $$P(G)=P\left(X_1>\frac{1}{2}\wedge X_2>\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-P\left(X_1\le\frac{1}{2}\right)-P\left(X_2\le\frac{1}{2}\right)+P(U_1>k_1|U_2>k_1)P(U_2>k_1)$$

เมื่อ $U_1=F(X_1),U_2=F(X_2)$ และ $k_1=1-F\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P(H)=P(X_1>1\wedge X_2>1)$$

$$=1-P(X_1\le 1)-P(X_2\le 1)+P(U_1>k_2|U_2>k_2)P(U_2>k_2)$$

เมื่อ $U_1=F(X_1),U_2=F(X_2)$ และ $k_2=1-F(1)$

ให้ $P\left(X_1\le\frac{1}{2}\right)=A_1$, $P\left(X_2\le\frac{1}{2}\right)=B_1$, $P(X_1\le 1)=A_2$, $P(X_2\le 1)=B_2$

$P(U_1>k_1|U_2>k_1)=Z_1$, $P(U_2>k_1)=1-k_1=K_1$

และ $P(U_1>k_2|U_2>k_2)=Z_2$, $P(U_2>k_2)=1-k_2=K_2$

เพื่อหาราคายุติธรรม $E(V)=100{,}000$ และ สามารถคำนวณค่า Tranche Rate =y% ได้จาก

$$100{,}000=E(V_1)+E(V_2)$$

$$=\frac{100{,}000\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P\left(X_1>\frac{1}{2}\wedge X_2>\frac{1}{2}\right)+\frac{100{,}000\left(1+\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(X_1>1\wedge X_2>1)$$

$$100{,}000=\frac{100{,}000\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P\left(X_1>\frac{1}{2}\wedge X_2>\frac{1}{2}\right)+\frac{100{,}000\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(X_1>1\wedge X_2>1)$$

$$+\frac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(X_1>1\wedge X_2>1)$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P\left(X_1>\frac{1}{2}\wedge X_2>\frac{1}{2}\right)+\frac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(X_1>1\wedge X_2>1)\right)$$

$$=100{,}000-\frac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(X_1>1\wedge X_2>1)$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{100{,}000-\dfrac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(X_1>1\wedge X_2>1)}{\left(\dfrac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P\left(X_1>\frac{1}{2}\wedge X_2>\frac{1}{2}\right)+\dfrac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(X_1>1\wedge X_2>1)\right)}$$

เมื่อ $P\left(X_1\le\frac{1}{2}\right)=A_1$, $P\left(X_2\le\frac{1}{2}\right)=B_1$, $P(X_1\le 1)=A_2$, $P(X_2\le 1)=B_2$

$P(U_1>k_1|U_2>k_1)=Z_1$, $P(U_2>k_1)=1-k_1=K_1$

และ $P(U_1>k_2|U_2>k_2)=Z_2$, $P(U_2>k_2)=1-k_2=K_2$

$$\frac{y}{2}=\frac{100{,}000-\left[\dfrac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}*(1-A_2-B_2+Z_2K_2)\right]}{\left[\dfrac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}*(1-A_1-B_1+Z_1K_1)\right]+\left[\dfrac{100{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}*(1-A_2-B_2+Z_2K_2)\right]}$$

$$=\frac{100{,}000-\dfrac{100{,}000(1-A_2-B_2)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}-\dfrac{100{,}000(Z_2K_2)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}}{\dfrac{100{,}000(1-A_1-B_1)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}+\dfrac{100{,}000(Z_1K_1)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}+\dfrac{100{,}000(1-A_2-B_2)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}+\dfrac{100{,}000(Z_2K_2)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{100{,}000 - \dfrac{100{,}000(1-A_2-B_2)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2} - \dfrac{100{,}000(Z_2K_2)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2}}{\dfrac{100{,}000(1-A_1-B_1)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)} + \dfrac{100{,}000(1-A_2-B_2)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2} + \dfrac{100{,}000(Z_1K_1)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)} + \dfrac{100{,}000(Z_2K_2)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2}}$$

ดังนั้น เราสามารถคำนวณ CDO ให้อยู่ในรูปทั่วไป ในกรณีที่ Tranche Width $\leq 50\%$ และมีจำนวน Period ในการจ่ายเงินปันผลเป็น p ครั้งต่อปี

$$\frac{y}{p} = \frac{1 - \dfrac{(1-A_p-B_p)}{\left(1+\dfrac{r}{p}\right)^p} - \dfrac{(Z_pK_p)}{\left(1+\dfrac{r}{p}\right)^p}}{\sum_{i=1}^{p} \dfrac{(1-A_i-B_i)}{\left(1+\dfrac{r}{p}\right)^i} + \dfrac{(Z_iK_i)}{\left(1+\dfrac{r}{p}\right)^i}} \tag{3.6}$$

เมื่อ t_i เป็นเวลาที่ i , i เป็นครั้งที่ของการจ่ายเงิน มีค่า $=1,2,\ldots,p$

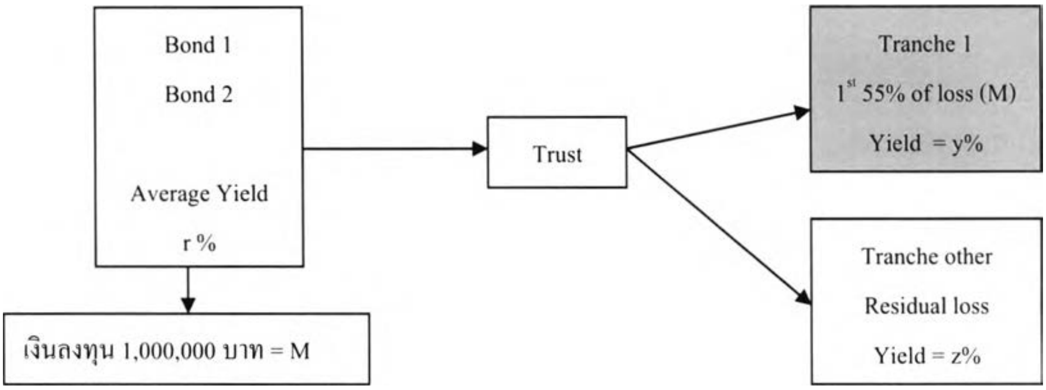
และ $P(X_1 \leq t_i) = A_i \quad , P(X_2 \leq t_i) = B_i$

$P(U_1 > k_i | U_2 > k_i) = Z_i \; , \; P(U_2 > k_i) = 1 - k_i = K_i$

3.4.2 กรณีที่ 2 เมื่อ Tranche Width $> 50\%$

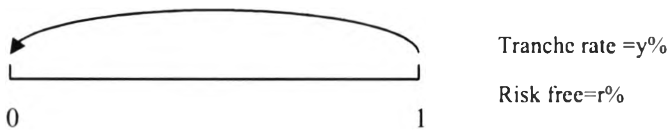
จะขออธิบายตัวอย่างการคำนวณอย่างง่าย ๆ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 3 เริ่มต้นจาก Trust หรือบริษัทหลักทรัพย์ได้มีการซื้อตราสารมาจำนวนหนึ่งในที่นี้ ให้มีการซื้อตราสารมาจาก 2 แห่ง (ส่วนทางซ้ายของรูป) และแต่ละแห่งมีมูลค่าตราสารเป็น 500,000 บาท ดังนั้น Trust จะต้องมีเงินลงทุนในตราสาร 1,000,000 บาท และจะมีดอกเบี้ยที่ได้รับจากการลงทุนเป็น r% ของเงินลงทุน เพื่อการประกันความเสี่ยงของตราสารที่ทำการซื้อมา Trust จะทำการออกตราสารขึ้นมา ในที่นี้ให้มีจำนวน Tranches เป็น 2 โดยที่แต่ละ Tranche จะมีการรับประกันความเสี่ยงที่แตกต่างกันและจะได้อัตราดอกเบี้ยที่แตกต่างกันตามลำดับการรับประกันซึ่งสามารถอธิบายได้ดังรูปนี้



ภาพ 3.2 แสดงการประเมินมูลค่าของตราสารอนุพันธ์ (Collateralized Dept Obligations : CDO) ซึ่งทางซ้ายของภาพ คือ ตราสารที่ Trust ทำการลงทุนซื้อมา ส่วนทางขวาของภาพเป็นตราสารที่ Trust ขายในแต่ละขั้นความเสี่ยง (Tranche)

จากรูปกำหนดให้ Tranche 1 ซึ่งรับความเสี่ยงได้ 55% และมี Tranche Rate=Yield Rate=y% ต่อปี และจะคำนวณหาค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทน (Present Value of Pay off) ที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 จะได้รับเท่าไหร่โดยเฉลี่ยใน 1 ปี และถ้าให้ได้จุดสมดุลคือ ค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบัน ของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 = จำนวนเงินลงทุนใน Tranche นั้น จะหา Tranche Rate (y%) ที่เหมาะสม



$\therefore$ Tranche 1 รับความเสี่ยงไว้ 55%*(2*500,000)=550,000 แรก

เมื่อ V แทนมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับจาก Tranche 1 ในเวลาที่ $t = 1$

X_1 แทนเวลาของบริษัทที่ 1

X_2 แทนเวลาของบริษัทที่ 2

โดยที่ X_1, X_2 มีความสัมพันธ์กัน

จากนิยามของ V กำหนดให้

G เป็น เหตุการณ์ที่ไม่เกิดการล้มละลายภายในเวลา 1

H เป็น เหตุการณ์ที่เกิดการล้มละลายของบริษัท 1 บริษัทภายในเวลา 1

ดังนั้น

$$V=\begin{cases}\dfrac{550{,}000(1+y)}{(1+r)} & \text{for } G\\ \dfrac{50{,}000(1+y)}{(1+r)} & \text{for } H\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

$$E(V)=\frac{550{,}000(1+y)}{(1+r)}P(G)+\frac{50{,}000(1+y)}{(1+r)}P(H)$$

โดยที่ $P(G)=P(X_1>1\wedge X_2>1)$

$$=1-P(X_1\le 1)-P(X_2\le 1)+P(U_1>k_1|U_2>k_1)P(U_2>k_1)$$

$$P(H)=P(\text{company }1^{st}\text{ default, company }2^{nd}\text{ no default})$$
$$+P(\text{company }2^{nd}\text{ default, company }1^{st}\text{ no default})$$

$P(\text{company }1^{st}\text{ default, company }2^{nd}\text{ no default})$

$$=P(X_1\le 1\wedge X_2>1)$$

$$=P(X_1\le 1)-P(X_1\le 1\wedge X_2\le 1)$$

$$=P(X_1\le 1)-P(F(X_1)\le F(1)\wedge F(X_2)\le F(1))$$

$$=P(X_1\le 1)-P(U_1\le F(1)\wedge U_2\le F(1))$$

$$=P(X_1\le 1)-P(U_1>1-F(1)\wedge U_2>1-F(1))$$

$$=P(X_1\le 1)-P(U_1>1-F(1)\wedge U_2>1-F(1))$$

$$=P(X_1\le 1)-P(U_1>1-F(1)|\ U_2>1-F(1))P(U_2>1-F(1))$$

$$=P(X_1\le 1)-P(U_1>k_1|\ U_2>k_1)P(U_2>k_1)$$

เมื่อ $U_1=F(X_1),U_2=F(X_2)$ และ $k=1-F(1)$

$P(\text{company }2^{nd}\text{ default, company }1^{st}\text{ no default})$

$$=P(X_2\le 1\wedge X_1>1)$$

$$=P(X_2\le 1)-P(X_2\le 1\wedge X_1\le 1)$$

$$=P(X_2\le 1)-P(F(X_2)\le F(1)\wedge F(X_1)\le F(1))$$

$$=P(X_2\le 1)-P(U_2\le F(1)\wedge U_1\le F(1))$$

$$= P(X_2 \le 1) - P(U_2 > 1 - F(1) \wedge U_1 > 1 - F(1))$$

$$= P(X_2 \le 1) - P(U_2 > 1 - F(1) \wedge U_1 > 1 - F(1))$$

$$= P(X_2 \le 1) - P(U_2 > 1 - F(1) | \ U_1 > 1 - F(1))P(U_1 > 1 - F(1))$$

$$= P(X_2 \le 1) - P(U_2 > k_1 | \ U_1 > k_1)P(U_1 > k_1)$$

เมื่อ $U_1 = F(X_1), U_2 = F(X_2)$ และ $k_1 = 1 - F(1)$

$$\therefore P(H) = P(X_1 \le 1) - P(U_1 > k_1 | \ U_2 > k_1)P(U_2 > k_1) \\ + P(X_2 \le 1) - P(U_2 > k_1 | \ U_1 > k_1)P(U_1 > k_1)$$

ให้ $P(X_1 \le 1) = A_1 \ , P(X_2 \le 1) = B_1$

$$P(U_1 > k | U_2 > k) = P(U_2 > k | U_1 > k) = Z_1 , P(U_1 > k_1) = P(U_2 > k_1) = 1 - k_1 = K_1$$

จะได้ว่า $P(G) = 1 - P(X_1 \le 1) - P(X_2 \le 1) + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1)P(U_2 > k_1)$

$$= 1 - A_1 - B_1 + Z_1 K_1$$

$$P(H) = P(X_1 \le 1) - P(U_1 > k_1 | \ U_2 > k_1)P(U_2 > k_1) \\ + P(X_2 \le 1) - P(U_2 > k_1 | \ U_1 > k_1)P(U_1 > k_1)$$

$$= A_1 + B_1 - 2Z_1 K_1$$

เพื่อหาราคายุติธรรม $E(V) = 550{,}000$ และ สามารถคำนวณค่า Tranche Rate =y% ได้จาก

$$550{,}000 = E(V) = \frac{550{,}000(1+y)}{(1+r)} P(G) + \frac{50{,}000(1+y)}{(1+r)} P(H)$$

$$y\left(\frac{550{,}000}{(1+r)} P(G) + \frac{50{,}000}{(1+r)} P(H)\right) = 550{,}000 - \frac{550{,}000}{(1+r)} P(G) - \frac{50{,}000}{(1+r)} P(H)$$

$$y = \frac{550{,}000 - \frac{550{,}000}{(1+r)} P(G) - \frac{50{,}000}{(1+r)} P(H)}{\left(\frac{550{,}000}{(1+r)} P(G) + \frac{50{,}000}{(1+r)} P(H)\right)}$$

$$y = \frac{550{,}000\,(1+r)}{(550{,}000 * P(G)) + (50{,}000 * P(H))} - 1$$

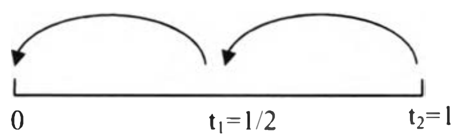
T 22611678

$$y = \frac{550,000(1+r)}{(550,000*(1-A_1-B_1+Z_1))+(50,000*(A_1+B_1-2Z_1K_1))}-1$$

เมื่อ $P(X_1 \le 1) = A_1$, $P(X_2 \le 1) = B_1$

$$P(U_1 > k | U_2 > k) = P(U_2 > k | U_1 > k) = Z_1 , P(U_1 > k_1) = P(U_2 > k_1) = 1 - k_1 = K_1$$

ตัวอย่างที่ 4 จากตัวอย่างที่ 3 ถ้าให้มีการจ่ายเงินปันผลทุกครึ่งปี จะคำนวณหาค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทน (Present Value of Pay off) ที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 จะได้รับเท่าไหร่โดยเฉลี่ยใน 1 ปี และถ้าให้ได้จุดสมดุลคือ ค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบัน ของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนใน Tranche 1 = จำนวนเงินลงทุนใน Tranche นั้น จะหา Tranche Rate (y%) ที่เหมาะสม



$\therefore$ Tranche 1 รับความเสี่ยงไว้ 55%*(2*500,000)=550,000 แรก

เมื่อ V_i แทนมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับจาก Tranche 1 ที่เกิดจากเวลาที่ t_i

X_1 แทนเวลาของบริษัทที่ 1

X_2 แทนเวลาของบริษัทที่ 2

โดยที่ X_1, X_2 มีความสัมพันธ์กัน

จากนิยามของ V กำหนดให้

G เป็น เหตุการณ์ที่ไม่เกิดการล้มละลายภายในเวลา $t_1 = \frac{1}{2}$

H เป็น เหตุการณ์ที่ไม่เกิดการล้มละลายภายในเวลา $t_2 = 1$

I เป็น เหตุการณ์ที่เกิดการล้มละลายของบริษัท 1 บริษัทภายในเวลา $t_1 = \frac{1}{2}$

J เป็น เหตุการณ์ที่เกิดการล้มละลายของบริษัท 1 บริษัทภายในเวลา $t_2 = 1$

ดังนั้น

$$V_1 = \begin{cases} \dfrac{550{,}000\left(\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)} & \text{for } G \\ \dfrac{55{,}000\left(\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)} & \text{for } I \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$E(V_1) = \frac{550{,}000\left(\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)}P(G) + \frac{55{,}000\left(\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)}P(I)$$

และ

$$V_2 = \begin{cases} \dfrac{550{,}000\left(1+\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2} & \text{for } H \\ \dfrac{55{,}000\left(1+\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2} & \text{for } J \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

$$E(V_2) = \frac{550{,}000\left(1+\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2}P(H) + \frac{55{,}000\left(1+\dfrac{y}{2}\right)}{\left(1+\dfrac{r}{2}\right)^2}P(J)$$

โดยที่ $P(G) = P\left(X_1 > \frac{1}{2} \wedge X_2 > \frac{1}{2}\right)$

$$= 1 - P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) - P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1)P(U_2 > k_1)$$

เมื่อ $U_1 = F(X_1), U_2 = F(X_2)$ และ $k_1 = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P(H) = P(X_1 > 1 \wedge X_2 > 1)$$

$$= 1 - P(X_1 \le 1) - P(X_2 \le 1) + P(U_1 > k_2 | U_2 > k_2) P(U_2 > k_2)$$

เมื่อ $U_1 = F(X_1), U_2 = F(X_2)$ และ $k_2 = 1 - F(1)$

$$P(I) = P(\text{company } 1^{\text{st}} \text{ default, company } 2^{\text{nd}} \text{ no default}) + P(\text{company } 2^{\text{nd}} \text{ default, company } 1^{\text{st}} \text{ no default})$$

$$= P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) - P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) P(U_2 > k_1) + P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) - P(U_2 > k_1 | U_1 > k_1) P(U_1 > k_1)$$

เมื่อ $U_1 = F(X_1), U_2 = F(X_2)$ และ $k_1 = 1 - F\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P(J) = P(\text{company } 1^{\text{st}} \text{ default, company } 2^{\text{nd}} \text{ no default}) + P(\text{company } 2^{\text{nd}} \text{ default, company } 1^{\text{st}} \text{ no default})$$

$$= P(X_1 \le 1) - P(U_1 > k_2 | U_2 > k_2) P(U_2 > k_2) + P(X_2 \le 1) - P(U_2 > k_2 | U_1 > k_2) P(U_1 > k_2)$$

เมื่อ $U_1 = F(X_1), U_2 = F(X_2)$ และ $k_2 = 1 - F(1)$

ให้ $P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) = A_1$, $P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) = B_1$, $P(X_1 \le 1) = A_2$, $P(X_2 \le 1) = B_2$

$P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) = Z_1$, $P(U_2 > k_1) = 1 - k_1 = K_1$

และ $P(U_1 > k_2 | U_2 > k_2) = Z_2$, $P(U_2 > k_2) = 1 - k_2 = K_2$

จะได้ว่า

$$P(G) = 1 - P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) - P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) P(U_2 > k_1)$$

$$= 1 - A_1 - B_1 + Z_1 K_1$$

$$P(H) = 1 - P(X_1 \le 1) - P(X_2 \le 1) + P(U_1 > k_2 | U_2 > k_2) P(U_2 > k_2)$$

$$= 1 - A_2 - B_2 + Z_2 K_2$$

$$P(I) = P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) - P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1) P(U_2 > k_1)$$

$$+P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) - P(U_2 > k_1 | \ U_1 > k_1)P(U_1 > k_1)$$

$$= A_1 + B_1 - 2Z_1K_1$$

$$P(J) = P(X_1 \le 1) - P(U_1 > k_2 | \ U_2 > k_2)P(U_2 > k_2)$$
$$+ P(X_2 \le 1) - P(U_2 > k_2 | \ U_1 > k_2)P(U_1 > k_2)$$
$$= A_2 + B_2 - 2Z_2K_2$$

เพื่อหาราคายุติธรรม $E(V) = 550{,}000$ และ สามารถคำนวณค่า Tranche Rate =y% ได้จาก

$$550{,}000 = E(V) = \frac{550{,}000\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P(G) + \frac{550{,}000\left(1+\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(H)$$
$$+ \frac{50{,}000\left(\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P(I) + \frac{50{,}000\left(1+\frac{y}{2}\right)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(J)$$

$$\frac{y}{2}\left(\frac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P(G) + \frac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(H) + \frac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P(I) + \frac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(J)\right)$$
$$= 550{,}000 - \frac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(H) - \frac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(J)$$

$$\frac{y}{2} = \frac{550{,}000 - \frac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(H) - \frac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(J)}{\left(\frac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P(G) + \frac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(H) + \frac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}P(I) + \frac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}P(J)\right)}$$

โดยที่

$$P(G) = 1 - P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) - P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) + P(U_1 > k_1 | U_2 > k_1)P(U_2 > k_1)$$
$$= 1 - A_1 - B_1 + Z_1K_1$$

$$P(H) = 1 - P(X_1 \le 1) - P(X_2 \le 1) + P(U_1 > k_2 | U_2 > k_2)P(U_2 > k_2)$$
$$= 1 - A_2 - B_2 + Z_2K_2$$

$$
\begin{aligned}
P(I) &= P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) - P(U_1 > k_1 \mid U_2 > k_1)P(U_2 > k_1) \\
&\quad + P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) - P(U_2 > k_1 \mid U_1 > k_1)P(U_1 > k_1) \\
&= A_1 + B_1 - 2Z_1K_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(J) &= P(X_1 \le 1) - P(U_1 > k_2 \mid U_2 > k_2)P(U_2 > k_2) \\
&\quad + P(X_2 \le 1) - P(U_2 > k_2 \mid U_1 > k_2)P(U_1 > k_2) \\
&= A_2 + B_2 - 2Z_2K_2
\end{aligned}
$$

เมื่อ $P\left(X_1 \le \frac{1}{2}\right) = A_1$, $P\left(X_2 \le \frac{1}{2}\right) = B_1$, $P(X_1 \le 1) = A_2$, $P(X_2 \le 1) = B_2$

$P(U_1 > k_1 \mid U_2 > k_1) = Z_1$, $P(U_1 > k_1) = P(U_2 > k_1) = 1 - k_1 = K_1$

และ $P(U_1 > k_2 \mid U_2 > k_2) = Z_2$, $P(U_1 > k_2) = P(U_2 > k_2) = 1 - k_2 = K_2$

จะได้ว่า

$$
\frac{y}{2} = \frac{550{,}000 - \dfrac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}\left(1 - A_2 - B_2 + Z_2K_2\right) - \dfrac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}\left(A_2 + B_2 - 2Z_2K_2\right)}{\left(\begin{aligned}&\dfrac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}\left(1 - A_1 - B_1 + Z_1K_1\right) + \dfrac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}\left(1 - A_2 - B_2 + Z_2K_2\right) \\ &+ \dfrac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)}\left(A_1 + B_1 - 2Z_1K_1\right) + \dfrac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}\left(A_2 + B_2 - 2Z_2K_2\right)\end{aligned}\right)}
$$

$$
\frac{y}{2} = \frac{550{,}000 - \dfrac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}\left(1 - A_2 - B_2 + Z_2K_2\right) - \dfrac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^2}\left(A_2 + B_2 - 2Z_2K_2\right)}{\sum_{i=1}^{2}\left(\dfrac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^i}\left(1 - A_i - B_i + Z_iK_i\right) + \dfrac{50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^i}\left(A_i + B_i - 2Z_iK_i\right)\right)}
$$

$$\frac{y}{2}=\frac{550{,}000-\dfrac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2}}+\left(\dfrac{550{,}000-50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2}}(A_2+B_2)\right)-\left(\dfrac{550{,}000-(2*50{,}000)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2}}(Z_2K_2)\right)}{\sum_{i=1}^{2}\left(\dfrac{550{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{i}}+\left(\dfrac{550{,}000-50{,}000}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{i}}(A_i+B_i)\right)+\left(\dfrac{550{,}000-(2*50{,}000)}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{i}}(Z_iK_i)\right)\right)}$$

ดังนั้น เราสามารถคำนวณ CDO ให้อยู่ในรูปทั่วไปในกรณีที่ Tranche Width > 50% และมีจำนวน Period ในการจ่ายเงินปันผลเป็น p ครั้งต่อปี

เมื่อกำหนดให้เงินต้นคือ

M = เงินต้นของทั้ง 2 บริษัทใน Tranche นั้น = เงินต้น* Tranche Width

โดยที่ Tranche Width เป็นความกว้างที่ Tranche นั้นรับประกันความเสี่ยง

และ $m = M$ -เงินต้นของ 1 บริษัทที่ล้มละลาย

$$\frac{y}{p}=\frac{M-\dfrac{M}{\left(1+\frac{r}{p}\right)^{p}}+\left(\dfrac{M-m}{\left(1+\frac{r}{p}\right)^{p}}(A_p+B_p)\right)-\left(\dfrac{M-(2m)}{\left(1+\frac{r}{p}\right)^{p}}(Z_pK_p)\right)}{\sum_{i=1}^{p}\left(\dfrac{M}{\left(1+\frac{r}{p}\right)^{i}}+\left(\dfrac{M-m}{\left(1+\frac{r}{p}\right)^{i}}(A_i+B_i)\right)+\left(\dfrac{M-(2m)}{\left(1+\frac{r}{p}\right)^{i}}(Z_iK_i)\right)\right)} \qquad (3.7)$$

เมื่อ t_i เป็นเวลาที่ i , i เป็นครั้งที่ของการจ่ายเงิน มีค่า $=1,2,\ldots,p$

และ $P(X_1 \le t_i)=A_i$, $P(X_2 \le t_i)=B_i$

$P(U_1 > k_i | U_2 > k_i)=Z_i$, $P(U_1 > k_i)=P(U_2 > k_i)=1-k_i=K_i$

3.5 การประเมินมูลค่า CDO ในกรณี 50 บริษัทโดยใช้วิธีมอนติคาร์โล

นิยาม การประเมินมูลค่า CDO คือ การคำนวณหาอัตราผลตอบแทนที่เกิดขึ้นในแต่ละ Tranche โดยให้ได้มูลค่าที่ได้อยู่ภายใต้จุดสมดุล คือ ค่าคาดหวังของมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนใน Tranche มีค่าเท่ากับ เงินต้นที่เกิดขึ้นจากการลงทุนใน tranche นั้น และมูลค่า CDO คือ อัตราผลตอบแทนที่ได้รับ (yield rate=y%)

โดยมีข้อตกลงเบื้องต้น คือ

1. ให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง มีพารามิเตอร์เดียวกันเป็น λ และมีฟังก์ชันการแจกแจงสะสมเป็น F
2. Correlation ระหว่าง X_i และ X_j มีค่าเท่ากันทุกคู่

มีขั้นตอนการวิจัย ดังนี้

1. สร้างข้อมูลตามสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ได้กำหนดไว้ในขอบเขตการวิจัย
2. ทำการประเมินมูลค่า CDO โดยใช้วิธีการมอนติคาร์โล โดยมีระดับนัยสำคัญ 0.05

3.5.1 สร้างข้อมูลตามสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ได้กำหนดไว้ในขอบเขตการวิจัย

สำหรับการวิจัยครั้งนี้ต้องการสร้างเลขสุ่มที่เป็นจำนวนจริง โดยมีการแจกแจงคอพพูลาแบบปกติ, การแจกแจงคอพพูลาแบบที และการแจกแจงคอพพูลาแบบดับเบิ้ลที ซึ่งจะสร้างข้อมูลของบริษัทที่ต้องการ จำนวน 50 บริษัท ให้มีความสัมพันธ์กัน ดังนั้นจึงมีรายละเอียดของแต่ละกรณีเป็น ดังนี้

กรณีที่ 1 การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบปกติ
กรณีที่ 2 การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบที
กรณีที่ 3 การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบดับเบิ้ลที

กรณีที่ 1 การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบปกติ

การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบปกติ มี 2 ขั้นตอน คือ

1. สร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงปกติ

การสร้างข้อมูลสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติและมีความสัมพันธ์กันสร้างได้ดังนี้

$$X = CZ$$

โดยที่ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

สามารถหาค่า C ได้จากเมทริกซ์สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Σ) ที่มีคุณสมบัติเป็น Positive Definite และ Symmetric แล้วใช้วิธี Cholesky decomposition ให้เป็น lower triangular จะได้เมทริกซ์ C ที่มีองค์ประกอบเป็นเลขจำนวนจริง นั่นคือ

$$\Sigma = CC^T$$

โดย C เป็น real lower triangular matrix และ μ เป็นเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยของ X จะได้ตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐานที่มีความสัมพันธ์กัน

2. นำเลขสุ่มที่ได้จาก 1. แทนค่าลงใน F ซึ่งฟังก์ชันสะสมที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

$$U_i = F(X_i)$$

จะให้ค่าที่ได้อยู่ในช่วง $[0,1)$ นั่นคือ จะได้ตัวแปรสุ่ม U ที่เกิดจากการสร้างเลขสุ่มแบบคอพพูลา ที่มีการแจกแจงแบบปกติ

กรณีที่ 2 การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบที

การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบที มี 2 ขั้นตอน คือ

1. สร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบที ที่มีระดับขั้นความเสรี v ซึ่งมีความสัมพันธ์กัน มีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างตัวแปรสุ่ม X ตามกรณีที่ 1 ซึ่งเป็นการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานที่มีความสัมพันธ์กัน

ขั้นที่ 2 สร้างตัวแปรสุ่ม $Y \sim \chi^2_{(v)}$ จากการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไคกำลังสอง

ขั้นที่ 3 สร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบที โดยการนำตัวแปรสุ่มที่ได้จากขั้นที่ 1 และ 2 มาแทนในสมการ

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/v}}$$

จะได้ตัวแปรสุ่ม T ที่มีการแจกแจงแบบทีซึ่งมีความสัมพันธ์กันที่ระดับขั้นความเสรี v

การสร้างข้อมูลสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทีที่มีความสัมพันธ์กัน สามารถสร้างได้จาก ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปกติที่มีความสัมพันธ์กันนั่นเอง

2. นำเลขสุ่มที่ได้จาก 1. แทนค่าลงใน F ซึ่งเป็นฟังก์ชันสะสมที่มีการแจกแจงแบบที

$$U_i = F(T_i)$$

จะให้ค่าอยู่ในช่วง $[0,1)$ นั่นคือ จะได้ตัวแปรสุ่ม U ที่เกิดจากการสร้างเลขสุ่มแบบคอพพูลาที่มีการแจกแจงแบบที

กรณีที่ 3 การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบดับเบิ้ลที

การสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงคอพพูลาแบบดับเบิ้ลที มี 2 ขั้นตอนคือ

1. สร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบดับเบิ้ลที ที่มีระดับขั้นความเสรี v มีขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างตัวแปรสุ่ม $T \sim t_{(v)}$ จากการสร้างเลขสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทีที่อิสระกันจำนวน n+1 ตัวแปร โดยตัวแปรสุ่ม T ที่ได้จะมีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวนเป็น $\frac{v}{v-2}$ ดังนั้นต้องทำการปรับค่าของตัวแปรสุ่มที่ได้ให้มีค่าความแปรปรวนเป็น 1 โดยการนำ Factor = $\frac{v-2}{v}$ คูณเลขสุ่มที่สร้าง จะได้เป็นเลขสุ่มชุดใหม่ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และค่าความแปรปรวนเป็น 1 ที่ต้องการ

ขั้นที่ 2 สร้างตัวแปรสุ่ม D มีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบดับเบิ้ลทีที่มีความสัมพันธ์กัน โดยนำตัวแปรสุ่ม ที่ได้จากขั้นที่ 1 มาแทนในสมการ

$$D_1 = a_1 T_{n+1} + b_1 T_1$$

$$D_2 = a_1 T_{n+1} + b_1 T_2$$

$$\vdots$$

$$D_n = a_1 T_{n+1} + b_1 T_n$$

ซึ่ง $0 < a_1 \leq 1$, $0 < b_1 \leq 1$ และ $b_1 = \sqrt{1 - a_1^2}$

จะได้ว่า D เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบดับเบิ้ลที ที่มีความสัมพันธ์กันผ่านตัวแปรสุ่ม T โดยที่จะมีค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เป็น a_1^2

2. นำเลขสุ่มที่ได้จาก 1. แทนค่าลงใน F ซึ่งเป็นฟังก์ชันสะสมที่มีการแจกแจงแบบดับเบิ้ลที

$$U_i = F(D_i)$$

จะให้ค่าอยู่ในช่วง $[0,1)$ นั่นคือ จะได้ตัวแปรสุ่ม U ที่เกิดจากการสร้างเลขสุ่มแบบคอพพูลาที่มีการแจกแจงแบบดับเบิ้ลที

3.5.2 ทำการประเมินมูลค่า CDO โดยใช้วิธีการมอนติคาร์โลที่มีช่วงความเชื่อมั่น 0.005

เมื่อได้ข้อมูลที่มีการแจกแจงตามที่ต้องการและมีจำนวนมากพอ ในที่นี้ได้ทำการสร้างข้อมูลของตัวแปรสุ่มแบบต่าง ๆ ที่มีความสัมพันธ์กันจำนวน 50 ตัว แทน ตัวแปรสุ่มของแต่ละบริษัททั้ง 50 บริษัท และทำซ้ำ 50,000 ครั้ง เพื่อให้มากพอที่จะสรุปผลของการคำนวณหามูลค่า CDO ที่จะได้รับภายใต้เงื่อนไขของการหาราคายุติธรรมสำหรับ Tranche 1 เท่านั้น โดยนำข้อมูลที่ได้มาเข้าขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. นำข้อมูลที่ได้จากการสร้างเลขสุ่มแบบต่าง ๆ มาสร้างให้เป็นข้อมูลของเวลาการล้มละลายของแต่ละบริษัทโดยการแทนค่าข้อมูลลงในสูตร

$$Time_i = \frac{-\ln(U_i)}{\lambda}, \qquad i = 1,\ldots,50$$

โดยที่ $Time_i$ คือ เวลาที่บริษัทที่ i จะล้มละลาย ซึ่งมีการแจกแจงเป็นเลขชี้กำลังที่มีค่าเฉลี่ยเป็น $\frac{1}{\lambda}$

U_i คือ เลขสุ่มที่สร้างขึ้นจากการคอพพูลาแบบต่าง ๆ ณ ระดับสหสัมพันธ์ ρ ซึ่งในการวิจัยนี้ จะศึกษาที่ ค่า $\rho = 0.1, 0.5, 0.9$

λ คือ พารามิเตอร์ของการแจกแจงเลขชี้กำลัง

2. นำข้อมูลของเวลาของแต่ละบริษัทที่จะล้มละลายจำนวน 50 บริษัท มาเรียงลำดับจากน้อยไปมาก นับจำนวนบริษัทที่มีเวลาที่จะล้มละลายน้อยกว่า 1 ปี ให้ค่าเท่ากับ C

3. นิยาม V แทนมูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับจาก Tranche 1

โดยที่ B แทนจำนวนเงินต้นที่แต่ละบริษัทจะทำการลงทุน =20,000 บาท

N แทนจำนวนบริษัททั้งหมด = 50 บริษัท

W แทนความเสี่ยงที่ Tranche 1 รับไว้ = 10% ของเงินลงทุนทั้งหมด

EV แทนมูลค่าสมดุลของเงินลงทุนใน Tranche นั้น
= เงินต้นที่เกิดขึ้นจากการลงทุนใน Tranche นั้น
- มูลค่าปัจจุบันของผลตอบแทนที่ผู้ลงทุนจะได้รับใน Tranche นั้น

r แทนดอกเบี้ยที่จะได้รับ = risk free rate

y แทนมูลค่า CDO

เพื่อให้ได้จุดสมดุลของเงินลงทุนใน Tranche นั้นกับมูลค่าปัจจุบัน จึงต้องทำการหามูลค่า CDO ที่จะได้รับตอบแทน

คำนวณ $V = Max(N * B * W - C * B\ ,\ 0) * (1 + y)/(1 + r)$

$EV = (N * B * W) - V$

4. กำหนดให้ $y_0 = 0$ ซึ่งจะให้ค่า EV เป็นบวกเสมอ
5. สุ่ม y_1 ที่ทำให้ค่า EV มีค่าเป็นลบ
6. หาค่า $y = \dfrac{y_0 + y_1}{2}$ โดยวิธีการ Bisection Method และคำนวณค่า V, EV
7. ถ้า $|EV| < 0.005$ เป็นจริง ให้หยุดการทำงาน, ไม่จริง ให้ทำขั้นตอนต่อไป
8. ถ้า $EV > 0$ เป็นจริง ให้ $y_0 = y$ แล้วกลับไปทำขั้นตอนที่ 6

   ไม่จริง ให้ $y_1 = y$ แล้วกลับไปทำขั้นตอนที่ 6

แผนผังที่ 3.1 แผนผังการประเมินมูลค่า CDO