โครงการ

การเรียนการสอนเพื่อเสริมประสบการณ์

ชื่อโครงการ ปัญหาความน่าจะเป็นที่ขัดต่อความรู้สึก

A counter-intuitive probability puzzle

ชื่อนิสิต นายพีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์ 5933537423

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2562

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปัญหาความน่าจะเป็นที่ขัดต่อความรู้สึก

นายพีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

A counter-intuitive probability puzzle

Mr. Peerawit Luangsirisup

A Project Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science, Chulalongkorn University
Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน	ปัญหาความน่าจะเป็นที่ขัดต่อความรู้สึก
โดย	นายพีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์ เลขประจำตัวนิสิต 5933537423
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน	อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติ ให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิตในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

.... หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี) และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะกรรมการสอบโครงงาน

เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

.... อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน

(อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ)

ณัฐพันธ์ กิติสิน

.... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน)

ธีระเดช กิตติภัสสร

.... กรรมการ

(อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร)

นายพีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์: ปัญหาความน่าจะเป็นที่ขัดกับความรู้สึก (A counter-intuitive probability puzzle) อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน: อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ, 67 หน้า

ปัญหาความน่าจะเป็นปัญหาหนึ่งที่น่าสนใจจากอินเทอร์เน็ตกล่าวว่า ในรายการเกมโชว์รายการหนึ่ง พิธีกรจะสุ่มเลือกตัวเลขสองตัวที่แตกต่างกันและซ่อนตัวเลขทั้งสองไว้หลังประตูสองบาน พิธีกรอนุญาตให้ผู้เล่นเปิดประตูบานใดบานหนึ่งเพื่อดูตัวเลขหลังประตูบานนั้น จากนั้นพิธีกรจะถามผู้เล่นว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าตัวเลขที่เห็น ความจริงที่ขัดกับความรู้สึกคือ มีกลยุทธ์ที่ผู้เล่นสามารถตอบคำถามนี้ได้ถูกต้องด้วยความน่าจะเป็นที่มากกว่า 0.5 ในโครงงานนี้ เราศึกษากลยุทธ์ทั่วไปเหล่านี้ พร้อมทั้งนำเสนอตัวอย่างที่มีการคำนวณอย่างชัดเจนและการจำลองแบบมอนติคาร์โล สำหรับความน่าจะเป็นที่ตอบถูก

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต พีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ ลายมือชื่อ อ.ที่ปรึกษาโครงงาน เรวัต ถนัดกิจหิรัญ

ปีการศึกษา 2562

5933537423: MAJOR MATHEMATICS.
KEYWORDS: PROBABILITY PLUZZLE,

PEERAWIT LUANGSIRISUP: A COUNTER-INTUITIVE PROBABILITY PUZZLE .
ADVISOR: RAYWAT TANADKITHIRUN, PH.D., 67 PP.

An interesting probability puzzle from the internet says that on a game show, the host has randomly chosen two different numbers and has hidden them behind two doors. He allows the player to open one of the doors to see the number behind that door. Then, he asks the player if the number behind the other door is larger or less than the revealed number. The counter-intuitive fact is that there are strategies that the player can answer this question correctly with probability strictly greater than 0.5. In this work, we study these general strategies. Examples with explicit calculation and Monte Carlo simulation for the probability of correctly answering are provided.

Department Mathematics and Computer Science Student's Signature Peerawit.
Field of Study Mathematics Advisor's Signature Raywat Tanadkithiran
Academic Year 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานนี้สำเร็จได้เพราะได้รับความอนุเคราะห์ และความช่วยเหลือจากบุคคลเหล่านี้ จึงขอขอบคุณไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน พร้อมทั้งได้ให้ความรู้ คำปรึกษาและคำแนะนำ สละเวลาคอยติดตามความก้าวหน้า ให้ความช่วยเหลือตลอดมาตั้งแต่เริ่มจนกระทั่งโครงงานสำเร็จตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้

ตลอดจนขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐพันธ์ กิติสิน และ อาจารย์ ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร ที่กรุณาเป็นคณะกรรมการในการสอบโครงงาน และได้ให้คำปรึกษาและแก้ไขปรับปรุงโครงงานนี้ให้มีความถูกต้องและสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุก ๆ ท่านที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำ รวมทั้งอบรมข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาที่เข้ามาศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณครอบครัว และขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคน ที่คอยรับฟังและให้กำลังใจคอยช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่าง ๆ มาตลอดในการทำโครงงานครั้งนี้

สารบัญ

สารบัญรูปภาพ

สารบัญตาราง

บทที่ 1
บทนำ

มีโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความน่าจะเป็นที่น่าสนใจบนเว็บไซต์หนึ่ง [1] ซึ่งผู้ที่เห็นโจทย์นี้ครั้งแรกมักจะรู้สึกว่าไม่สามารถทำได้ โจทย์นี้มีอยู่ว่า ในรายการเกมโชว์รายการหนึ่ง พิธีกรจะสุ่มเลือกตัวเลขสองตัวที่แตกต่างกันและซ่อนตัวเลขทั้งสองไว้หลังประตูสองบาน จากนั้นพิธีกรอนุญาตให้ผู้เล่นเปิดประตูบานใดบานหนึ่งเพื่อดูตัวเลขหลังประตูบานนั้น ต่อมาพิธีกรจะถามผู้เล่นว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าตัวเลขที่เห็นนี้ สิ่งที่น่าสนใจและขัดต่อความรู้สึกของคนทั่วไปคือ มีกลยุทธ์ที่จะทำให้ผู้เล่นตอบคำถามนี้ถูกต้องด้วยความน่าเป็นที่มากกว่า 0.5

มีการให้คำตอบของกลยุทธ์ดังกล่าวในหลายเว็บไซต์ เช่น [1], [2] และ [3] เป็นต้น โดยที่คำตอบเหล่านี้ล้วนแต่กล่าวในทำนองเดียวกันคือ สมมติให้ X เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และ Y เป็นตัวเลขที่ซ่อนอยู่หลังประตูอีกบาน กลยุทธ์ที่ว่าคือ ไม่ว่าจะก่อนหรือหลังที่เราเห็นค่าของ X ให้ทำการสุ่มตัวเลข K จากการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ซัพพอร์ตของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ $\mathbb{R}$ เช่น

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2} \quad , x \in \mathbb{R}$$

เมื่อ $\mu \in \mathbb{R}$ และ $\sigma > 0$ จากนั้นให้พิจารณาค่าของ X ถ้า $K < X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X แต่ถ้า $K > X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่ามากกว่า K

นอกจากนี้ยังมีคำตอบที่มีความทั่วไปมากกว่า [2] ซึ่งกล่าวว่า ให้ X เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และ Y เป็นตัวเลขที่ซ่อนอยู่หลังประตูอีกบาน เราจะกำหนดฟังก์ชันหนึ่งขึ้นมาเพื่อใช้ประกอบในการตัดสินใจ โดยเมื่อเราเห็นค่าของ X แล้ว เราจะนำฟังก์ชันดังกล่าวมาคำนวณค่า ณ จุด X แล้วตัดสินใจว่าจะตอบอย่างไร เช่น ให้ $f(X)$ แทนความน่าจะเป็นที่จะตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X เราสามารถแสดงได้ว่า f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ เนื่องจากในความเป็นจริงเราไม่รู้ว่า X มีค่าที่เป็นไปได้อะไรบ้าง เราจึงต้องให้โดเมนของ f เป็น $\mathbb{R}$ ดังนั้นฟังก์ชัน f ที่แทนความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานมีค่าน้อยกว่าตัวเลขที่เห็น จะต้องเป็นฟังก์ชันที่เพิ่มโดยแท้จาก $\mathbb{R}$ ไป $[0,1]$

ในโครงงานนี้ เราจะแบ่งการศึกษาเป็นส่วน ๆ โดยบทที่ 2 จะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทที่ใช้ในโครงงานนี้ ในบทที่ 3 เราจะกล่าวถึงกลยุทธ์ที่ใช้ในการแก้ปัญหาและการจำลองปัญหาโดยมีส่วนประกอบที่สำคัญอยู่ 2 อย่างคือ ฟังก์ชันที่กำหนดขึ้นมาเพื่อใช้ประกอบในการตัดสินใจ ซึ่งต่อไป

เราจะเรียกฟังก์ชันนี้ว่า**ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ** และการแจกแจงที่ใช้ในการสุ่มค่า X และ Y ซึ่งต่อไปเราจะเรียกการแจกแจงนี้ว่า**การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์** จากนั้นในบทที่ 4 เราจะอธิบายถึงการคำนวณความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกตามกลยุทธ์ที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 ยิ่งไปกว่านั้นในบทที่ 5 เราจะอธิบายถึงการจำลองการใช้กลยุทธ์ดังกล่าวด้วยกระบวนการมอนติคาร์โล เพื่อประมาณค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกและสนับสนุนผลลัพธ์ที่ได้จากบทที่ 4 สุดท้ายในบทที่ 6 เราจะสรุปผลที่ได้จากการศึกษาโครงงานนี้

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีที่ใช้ในการศึกษาโครงงานนี้ ซึ่งได้แก่ กฎของความน่าจะเป็นรวม, ตัวแปรสุ่ม, ค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม, ตัวแปรสุ่มต่อเนื่องและตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่เราจะใช้ในโครงงานนี้

2.1 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ทฤษฎีบท 2.1.1 [4] ให้ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น และ B แทนเหตุการณ์ใด ๆ โดยที่ $P(B) > 0$ กำหนดให้ $P(\cdot\,|B)\colon\ \mathcal{F} \to [0,1]$ กำหนดโดย

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{เมื่อ } A \in \mathcal{F}$$

จะได้ว่า $P(\cdot\,|B)$ เป็นเมเชอร์ความน่าจะเป็น

ทฤษฎีบท 2.1.2 [4] **กฎของความน่าจะเป็นรวม (law of total probability)** ให้ Ω เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ โดยที่ $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$ และ $B_i \cap B_j = \emptyset$ สำหรับทุก $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ซึ่ง $i \neq j$ สำหรับเหตุการณ์ A ใด ๆ จะได้ว่า

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

โดยที่สำหรับพจน์ที่ i ในผลบวกซึ่ง $P(B_i) = 0$ จะไม่ถูกคิดในผลบวกนี้

2.2 ตัวแปรสุ่ม

บทนิยาม 2.2.1 [4] ให้ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ เป็นปริภูมิความน่าจะเป็น เราจะกล่าวว่า X เป็น**ตัวแปรสุ่ม (random variable)** ถ้า X เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีโดเมนเป็น Ω (นั่นคือ $X\colon\ \Omega \to \mathbb{R}$) และ $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ สำหรับ $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ เมื่อ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ คือ เซตของโบเรลเซต (Borel set) ทั้งหมดใน $\mathbb{R}$

บทนิยาม 2.2.2 [4] เราจะเรียกฟังก์ชัน $F\colon\ \mathbb{R} \to [0,1]$ ว่า **ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function: CDF)** หรือเรียกโดยย่อว่า **ฟังก์ชันการแจกแจง (distribution function)** ของตัวแปรสุ่ม X ถ้าสำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

$$F(x) = P(X \leq x)$$

ทฤษฎีบท 2.2.3 [4] ให้ $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ จะได้ว่า มีตัวแปรสุ่ม X ซึ่ง F เป็นฟังก์ชันการแจกแจงของ X ก็ต่อเมื่อ

1. F เป็นฟังก์ชันไม่ลด นั่นคือ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $F(x_1) \le F(x_2)$
2. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ และ $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
3. F มีความต่อเนื่องทางขวา นั่นคือ

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0) \qquad \text{ทุก } x_0 \in \mathbb{R}$$

บทนิยาม 2.2.4 [4] เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X เป็น**ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable)** ถ้าพิสัยของ X เป็นเซตนับได้ และเราเรียกฟังก์ชัน $f\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ ที่กำหนดโดย

$$f(x) = P(X = x)$$

ว่า**ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น (probability mass function, PMF)** ของ X

บทนิยาม 2.2.5 [4] เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X เป็น**ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)** ถ้ามีฟังก์ชัน $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$P(X \in A) = \int_A f(x)dx \qquad \text{สำหรับทุก } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

โดยเราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า**ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (probability density function, PDF) ของตัวแปรสุ่ม X**

บทนิยาม 2.2.6 [4] ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องบนปริภูมิตัวอย่างเดียวกัน เราจะเรียกฟังก์ชัน $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ที่กำหนดโดย

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

ว่า**ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม หรือ ฟังก์ชันมวลความน่าเป็นร่วม (joint probability mass function) ของ X และ Y** และเราเรียกฟังก์ชัน $F\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ที่กำหนดโดย

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{t\le y}\sum_{s\le x} f(s,t) \qquad \text{เมื่อ } x,y \in \mathbb{R}$$

ว่า**ฟังก์ชันการแจกแจงร่วม (joint distribution function) ของ X และ Y**

บทนิยาม 2.2.7 [4] ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องบนปริภูมิตัวอย่างเดียวกัน เราจะเรียกฟังก์ชัน $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty]$ ที่มีสมบัติว่า

$$P\big((X,Y) \in A\big) = \iint_{(x,y)\in A} f(x,y)dx\,dy \qquad \text{เมื่อ } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

ว่า**ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (joint probability density function) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y** และเราเรียกฟังก์ชัน $F\colon \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ ที่กำหนดโดย

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)ds\,dt \qquad \text{เมื่อ } x,y \in \mathbb{R}$$

ว่า**ฟังก์ชันการแจกแจงร่วม (joint distribution function) ของ X และ Y**

บทนิยาม 2.2.8 [4] เราจะกล่าวว่าตัวแปรสุ่ม X และ Y ที่นิยามบนปริภูมิความน่าจะเป็นเดียวกันเป็น**อิสระต่อกัน (independent)** ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ใด ๆ

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

ถ้าตัวแปรสุ่ม X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน เราจะกล่าวว่า X และ Y **ขึ้นต่อกัน (dependent)**

ทฤษฎีบท 2.2.9 [4] ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสะต่อกัน ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

เมื่อ F คือฟังก์ชันการแจกแจงร่วมของ X และ Y,

F_X คือฟังก์ชันการแจกแจงของ X และ

F_Y คือฟังก์ชันการแจกแจงของ Y

ทฤษฎีบท 2.2.10 [4] ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง จะได้ว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ สำหรับจำนวนจริง x และ y ใด ๆ

2.3 ค่าคาดคะเน

บทนิยาม 2.3.1 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ **ค่าคาดคะเน (expected value)** ของ X ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $E(X)$ กำหนดโดย

1. $E(X) = \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} x f(x)$ ถ้า $\sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} |x| f(x) < \infty$
   เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f
2. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$
   เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f

ถ้า $\sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} |x| f(x)$ ลู่ออก เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ ลู่ออก เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง เราจะกล่าวว่า ตัวแปรสุ่ม X **ไม่มีค่าคาดคะเน**

ทฤษฎีบท 2.3.2 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ และ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ซึ่ง $g \circ X$ เป็นตัวแปรสุ่ม จะได้ว่า

1. $E(g(X)) = \sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} g(x) f(x)$ ถ้า $\sum_{x \in \mathrm{Im}\, X} |g(x)| f(x) < \infty$
   เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น f
2. $E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ ถ้า $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$
   เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f

ทฤษฎีบท 2.3.3 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งสามารถหาค่าคาดคะเนได้ จะได้ว่า สำหรับค่าคงตัว a และ b ใด ๆ

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

บทนิยาม 2.3.4 [4] ให้ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ เรานิยามตัวแปรสุ่ม $\mathbb{1}_B: \Omega \to \mathbb{R}$ โดย

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.3.5 [4] $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$

2.4 ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่เราสนใจ

บทนิยาม 2.4.1 [4] เราจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี (Bernoulli random variable)** ที่มีพารามิเตอร์ p โดยที่ $0 < p < 1$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim Ber(p)$ ถ้า X มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \qquad x \in \{0,1\}$$

บทนิยาม 2.4.2 [4] เราจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มทวินาม (binomial random variable)** ที่มีพารามิเตอร์ n และ p โดยที่ $0 < p < 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim B(n,p)$ ถ้า X มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \qquad x \in \{0,1,\dots,n\}$$

บทนิยาม 2.4.3 [4] เราจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มปัวซง (Poisson random variable)** ที่มีพารามิเตอร์ λ โดยที่ $\lambda > 0$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim Poi(\lambda)$ ถ้า X มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น คือ

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

2.5 ตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่เราสนใจ

บทนิยาม 2.5.1 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \text{เมื่อ} \quad \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{เมื่อ} \quad x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ α และ β เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\alpha < \beta$ เราจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มเอกรูปบนช่วง $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$ (uniform random variable on the interval $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$)** โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim U(\alpha,\beta)$

ทฤษฎีบท 2.5.2 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มเอกรูปบนช่วง (α, β) จะได้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงของ X คือ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{เมื่อ} \quad x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{เมื่อ} \quad \alpha < x < \beta \\ 1, & \text{เมื่อ} \quad x \ge \beta \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.5.3 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มี F เป็นฟังก์ชันการแจกแจง จะได้ว่า $F(X) \sim U(0,1)$

บทนิยาม 2.5.4 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f กำหนดโดย

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

เราจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มปกติ (normal random variable)** ที่มีพารามิเตอร์ $\mu \in \mathbb{R}$ และ $\sigma^2 > 0$ โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ในกรณีที่ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ เราจะเรียก $X \sim N(0,1)$ ว่า**ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน (standard normal random variable)**

บทนิยาม 2.5.5 [5] ฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อน (error function) ของ x ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{erf}\,(x)$ นิยามโดย

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

ทฤษฎีบท 2.5.6 [6] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มปกติ ที่มีพารามิเตอร์ $\mu \in \mathbb{R}$ และ $\sigma^2 > 0$ จะได้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงของ X คือ

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[1 + erf\ \left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

บทนิยาม 2.5.7 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น f กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{เมื่อ} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad x < 0 \end{cases}$$

โดยที่ λ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ เราจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง (exponential random variable)** ที่มีพารามิเตอร์ λ โดยใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim Exp(\lambda)$

ทฤษฎีบท 2.5.8 [4] ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง ที่มีพารามิเตอร์ λ จะได้ว่าฟังก์ชันการแจกแจงของ X คือ

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{เมื่อ} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad x < 0 \end{cases}$$

บทที่ 3
กลยุทธ์ในการแก้ปัญหาและการจำลองปัญหา

จากการศึกษาปัญหาและกลยุทธ์ในการแก้ปัญหาจากเอกสารอ้างอิง [1], [2] และ [3] โดยที่คำตอบเหล่านี้ล้วนแต่กล่าวในทำนองเดียวกัน คือสมมติให้ X เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และ Y เป็นตัวเลขที่ซ่อนอยู่หลังประตูอีกบาน ซึ่ง X และ Y มีค่าแตกต่างกัน กลยุทธ์ที่ว่าคือ ไม่ว่าจะก่อนหรือหลังที่เราเห็นค่าของ X ให้ทำการสุ่มตัวเลข K จากการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ซัพพอร์ตของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ $\mathbb{R}$ จากนั้นให้พิจารณาค่าของ X ถ้า $K < X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X แต่ถ้า $K > X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่ามากกว่า X

กำหนดให้ $\overline{M}$ เป็นจำนวนที่มากที่สุดระหว่าง X และ Y นั่นคือ $\overline{M} = max(X,Y)$

$\underline{M}$ เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดระหว่าง X และ Y นั่นคือ $\underline{M} = min(X,Y)$

A_1 แทนเหตุการณ์ที่ $K < \underline{M}$

A_2 แทนเหตุการณ์ที่ $K = \underline{M}$

A_3 แทนเหตุการณ์ที่ $\underline{M} < K < \overline{M}$

A_4 แทนเหตุการณ์ที่ $K = \overline{M}$

A_5 แทนเหตุการณ์ที่ $K > \overline{M}$

B แทนเหตุการณ์ที่ตอบคำถามได้ถูกต้อง

$C_{\overline{M}}$ แทนเหตุการณ์ที่เปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่าของ $\overline{M}$

$C_{\underline{M}}$ แทนเหตุการณ์ที่เปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่าของ $\underline{M}$

Ω แทนปริภูมิตัวอย่าง

สังเกตว่า $\Omega = C_{\overline{M}} \cup C_{\underline{M}}$, $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, $C_{\underline{M}} \cap C_{\overline{M}} = \emptyset$ และ $A_i \cap A_j = \emptyset$ ทุก $i \neq j$ จะได้ว่า $\{C_{\underline{M}}, C_{\overline{M}}\}$ และ $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ Ω

ดังนั้น $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 1$ เนื่องจาก K มีการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ซัพพอร์ตของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ $\mathbb{R}$ จะได้ว่า $P(A_1), P(A_3)$ และ $P(A_5)$ มากกว่า 0 และ $P(A_2) = P(A_4) = 0$ นั่นคือ

$$P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) = 1 \tag{3.1}$$

เนื่องจากตัวแปรสุ่ม K ไม่ขึ้นกับเหตุการณ์ที่เปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่าของ $\overline{M}$ และเหตุการณ์ที่เปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่าของ $\underline{M}$ เพราะฉะนั้น $\{A_1, A_3, A_5\}$ เป็นอิสระต่อกันกับ $\{C_{\underline{M}}, C_{\overline{M}}\}$

เนื่องจากการสุ่มเลือกเปิดประตูมีโอกาสที่จะเห็นค่า $\underline{M}$ และ $\overline{M}$ เท่า ๆ กัน นั่นคือ

$$P(C_{\overline{M}}) = P(C_{\underline{M}}) = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $P(C_{\underline{M}}|A_i) = P(C_{\underline{M}}) = \frac{1}{2}$ เมื่อ $i = 1, 3, 5$

$P(C_{\overline{M}}|A_i) = P(C_{\overline{M}}) = \frac{1}{2}$ เมื่อ $i = 1, 3, 5$

เราจะแสดงว่ากลยุทธ์นี้มีความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกมากกว่า 0.5

พิจารณาเหตุการณ์ต่าง ๆ สำหรับค่าที่เป็นไปได้ของ K ได้ 5 กรณี

1. เหตุการณ์ A_1 ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ $K < \underline{M} < \overline{M}$

สังเกตว่า $P(B|A_1 \cap C_{\underline{M}}) = 0$ เพราะเมื่อกำหนดให้เราเปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่า $\underline{M}$ เนื่องจากในกรณีนี้ K ที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่า $\underline{M}$ เราจะตอบคำถามว่า $\overline{M}$ น้อยกว่า $\underline{M}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $P(B|A_1 \cap C_{\overline{M}}) = 1$ เพราะเมื่อกำหนดให้เราเปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่า $\overline{M}$ เนื่องจากในกรณีนี้ K ที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่า $\overline{M}$ เราจะตอบคำถามว่า $\underline{M}$ น้อยกว่า $\overline{M}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P(B|A_1) &= P(B \cap C_{\underline{M}}|A_1) + P(B \cap C_{\overline{M}}|A_1) \\
&= P(C_{\underline{M}}|A_1)P(B|A_1 \cap C_{\underline{M}}) + P(C_{\overline{M}}|A_1)P(B|A_1 \cap C_{\overline{M}}) \\
&= P(C_{\underline{M}}) \cdot 0 + P(C_{\overline{M}}) \cdot 1 \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \\
&= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

2. เหตุการณ์ A_2 ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ $K = \underline{M}$

เนื่องจาก $P(A_2) = 0$ และ $B \cap A_2 \subseteq A_2$ เราจะได้ว่า $P(B \cap A_2) = 0$

3. เหตุการณ์ A_3 ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ $\underline{M} < K < \overline{M}$

สังเกตว่า $P(B|A_3 \cap C_{\underline{M}}) = 1$ เพราะเมื่อกำหนดให้เราเปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่า $\underline{M}$ เนื่องจากในกรณีนี้ K ที่สุ่มได้มีค่ามากกว่า $\underline{M}$ เราจะตอบคำถามว่า $\overline{M}$ มากกว่า $\underline{M}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูก ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $P(B|A_3 \cap C_{\overline{M}}) = 1$ เพราะเมื่อกำหนดให้เราเปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่า $\overline{M}$ เนื่องจากในกรณีนี้ K ที่สุ่มได้มีค่าน้อยกว่า $\overline{M}$ เราจะตอบคำถามว่า $\underline{M}$ น้อยกว่า $\overline{M}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูก เราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(B|A_3) &= P\left(B \cap C_{\underline{M}} \middle| A_3\right) + P\left(B \cap C_{\overline{M}} \middle| A_3\right) \\
&= P\left(C_{\underline{M}} \middle| A_3\right) P\left(B \middle| A_3 \cap C_{\underline{M}}\right) + P\left(C_{\overline{M}} \middle| A_3\right) P\left(B \middle| A_3 \cap C_{\overline{M}}\right) \\
&= P\left(C_{\underline{M}}\right) \cdot 1 + P\left(C_{\overline{M}}\right) \cdot 1 \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

4. เหตุการณ์ A_4 ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ $K = \underline{M}$

เนื่องจาก $P(A_4) = 0$ และ $B \cap A_4 \subseteq A_4$ เราจะได้ว่า $P(B \cap A_4) = 0$

5. เหตุการณ์ A_5 ซึ่งเป็นเหตุการณ์ที่ $\underline{M} < \overline{M} < K$

สังเกตว่า $P\left(B \middle| A_5 \cap C_{\underline{M}}\right) = 1$ เพราะเมื่อกำหนดให้เราเปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่า $\underline{M}$ เนื่องจากในกรณีนี้ K ที่สุ่มได้มีค่ามากกว่า $\underline{M}$ เราจะตอบคำถามว่า $\overline{M}$ มากกว่า $\underline{M}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูก ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $P\left(B \middle| A_5 \cap C_{\overline{M}}\right) = 0$ เพราะเมื่อกำหนดให้เราเปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่า $\overline{M}$ เนื่องจากในกรณีนี้ K ที่สุ่มได้มีค่ามากกว่า $\overline{M}$ เราจะตอบคำถามว่า $\underline{M}$ มากกว่า $\overline{M}$ ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิดเราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(B|A_5) &= P\left(B \cap C_{\underline{M}} \middle| A_5\right) + P(B \cap C_M | A_5) \\
&= P\left(C_{\underline{M}} \middle| A_5\right) P\left(B \middle| A_5 \cap C_{\underline{M}}\right) + P\left(C_{\overline{M}} \middle| A_5\right) P\left(B \middle| A_5 \cap C_{\overline{M}}\right) \\
&= P\left(C_{\underline{M}}\right) \cdot 1 + P\left(C_{\overline{M}}\right) \cdot 0 \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 1 + \tfrac{1}{2} \cdot 0 \\
&= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ Ω โดยทฤษฎีบท 2.1.2 กฎของความน่าจะเป็นรวม จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5) \\
&= P(B|A_1)P(A_1) + 0 + P(B|A_3)P(A_3) + 0 + P(B|A_5)P(A_5) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot P(A_1) + 1 \cdot P(A_3) + \tfrac{1}{2} \cdot P(A_5) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot P(A_1) + \left[\tfrac{1}{2} \cdot P(A_3) + \tfrac{1}{2} \cdot P(A_3)\right] + \tfrac{1}{2} \cdot P(A_5) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot P(A_3) + \tfrac{1}{2} \cdot [P(A_1) + P(A_3) + P(A_5)]
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ (3.1) และเนื่องจาก $P(A_3) > 0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \frac{1}{2} \cdot P(A_3) + \frac{1}{2} \qquad (3.2) \\
&> \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

นั่นคือ ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกมากกว่า 0.5

นอกจากนี้ยังมีกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า [2] ซึ่งกล่าวว่า ให้ X เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และ Y เป็นตัวเลขที่ซ่อนอยู่หลังประตูอีกบาน โดย X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ซึ่งมีค่าแตกต่างกัน และกำหนดฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ เมื่อสุ่มเปิดประตูแล้วเห็นค่า X จากนั้นคำนวณค่าของฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ ณ จุด X แล้วจึงตัดสินใจว่าจะตอบอย่างไร

3.1 ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ

สมมติให้ W เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และกำหนดให้ $\boldsymbol{I(W)}$ **เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่าน้อยกว่า** $\boldsymbol{W}$ เนื่องจากในความเป็นจริงเราไม่รู้ว่า W มีค่าที่เป็นไปได้อะไรบ้าง เราจึงต้องให้โดเมนของ I เป็น $\mathbb{R}$ และเนื่องจากความน่าจะเป็นมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ดังนั้น $I: \mathbb{R} \to [0,1]$

เนื่องจาก $I(W)$ เป็นตัวแปรสุ่มเราจึงสนใจที่จะหาค่า $E(I(W))$ ซึ่งคือ ค่าคาดคะเนของความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู สังเกตว่า W อาจจะเป็น $\underline{M}$ หรือ $\overline{M}$ ก็ได้ ในทางทฤษฎีแล้วให้ C_W แทนเหตุการณ์ที่เปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่าของ W และ H_W แทนเหตุการณ์ที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่า**น้อยกว่า** W จะได้ว่า

$$E\big(I(W)\big) = P(H_W | C_W)$$

ดังนั้น $E\left(I(\overline{M})\right) = P\left(B \middle| C_{\overline{M}}\right)$

และ $E\left(I(\underline{M})\right) = P\left(B^c \middle| C_{\underline{M}}\right)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P(B) &= P\big(B \cap C_{\overline{M}}\big) + P\big(B \cap C_{\underline{M}}\big) \\ &= P\big(C_{\overline{M}}\big)P\big(B \big| C_{\overline{M}}\big) + P\big(C_{\underline{M}}\big)\Big(1 - P\big(B^c \big| C_{\underline{M}}\big)\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}E\left(I(\overline{M})\right) + \tfrac{1}{2}\left(1 - E\left(I(\underline{M})\right)\right) \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}E\left(I(\overline{M}) - I(\underline{M})\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

ซึ่งสำหรับปัญหาดังกล่าวเราต้องการความน่าจะเป็นที่จะตอบคำถามถูกมากกว่า 0.5 นั่นคือต้องการให้ $P(B) > \frac{1}{2}$ ดังนั้นเราต้องการฟังก์ชัน I ที่ทำให้ $E\left(I(\overline{M}) - I(\underline{M})\right) > 0$ ไม่ว่า X และ Y จะมีการแจกแจงใดก็ตาม

สังเกตว่า $\overline{M} > \underline{M}$ เนื่องจาก $\overline{M} = max(X,Y)$, $\underline{M} = min(X,Y)$ และ $X \neq Y$ เราจะแสดงว่า $I: \mathbb{R} \to [0,1]$ เป็น**ฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้** ก็ต่อเมื่อ $E\left(I(\overline{M}) - I(\underline{M})\right) > 0$ สำหรับทุกการแจกแจงของ X และ Y

พิสูจน์ (⇒) สมมติ $I: \mathbb{R} \to [0,1]$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ จาก $\overline{M} > \underline{M}$ จะได้ว่า $I(\overline{M}) - I(\underline{M}) > 0$ ดังนั้น $E\left(I(\overline{M}) - I(\underline{M})\right) > 0$

(⇐) เราจะพิสูจน์โดยใช้วิธีแย้งสลับที่ สมมติ $I: \mathbb{R} \to [0,1]$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ดังนั้นมี $a, b \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a < b$ และ $I(a) \geq I(b)$ เลือก X และ Y ให้เป็นตัวแปรสุ่มค่าคงที่ $X = a$ และ $Y = b$ ดังนั้น $\overline{M} = max(X,Y) = b$ และ $\underline{M} = min(X,Y) = a$ จะได้ว่า $E\left(I(\overline{M}) - I(\underline{M})\right) = E\big(I(b) - I(a)\big) \leq 0$

ในทำนองเดียวกัน สมมติให้ W เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และกำหนดให้ $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{W})$ **เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่ามากกว่า $\boldsymbol{W}$** เนื่องจากในความเป็นจริงเราไม่รู้ว่า W มีค่าที่เป็นไปได้อะไรบ้าง เราจึงต้องให้โดเมนของ D เป็น $\mathbb{R}$ และเนื่องจากความน่าจะเป็นมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 ดังนั้น $D: \mathbb{R} \to [0,1]$

เนื่องจาก $D(W)$ เป็นตัวแปรสุ่มเราจึงสนใจที่จะหาค่า $E(D(W))$ ซึ่งคือ ค่าคาดคะเนของความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่ามากกว่าตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู สังเกตว่า W อาจจะเป็น $\underline{M}$ หรือ $\overline{M}$ ก็ได้ ในทางทฤษฎีแล้วให้ C_W แทนเหตุการณ์ที่เปิดประตูบานแรกแล้วเห็นค่าของ W และ J_W แทนเหตุการณ์ที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่า**มากกว่า** W จะได้ว่า

$$E\big(D(W)\big) = P(J_W | C_W)$$

ดังนั้น $\quad E\left(D(\overline{M})\right) = P\left(B^c \middle| C_{\overline{M}}\right)$

และ $\quad E\left(D(\underline{M})\right) = P\left(B \middle| C_{\underline{M}}\right)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
P(B) &= P\left(B \cap C_{\overline{M}}\right) + P\left(B \cap C_{\underline{M}}\right) \\
&= P\left(C_{\overline{M}}\right)\left(1 - P\left(B^c \middle| C_{\overline{M}}\right)\right) + P\left(C_{\underline{M}}\right) P\left(B \middle| C_{\underline{M}}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(1 - E\left(D(\overline{M})\right)\right) + \tfrac{1}{2} E\left(D(\underline{M})\right) \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} E\left(D(\underline{M}) - D(\overline{M})\right) \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

ซึ่งสำหรับปัญหาดังกล่าวเราต้องการความน่าจะเป็นที่จะตอบคำถามถูกมากกว่า 0.5 นั่นคือต้องการให้ $P(B) > \frac{1}{2}$ ดังนั้นเราต้องการฟังก์ชัน D ที่ทำให้ $E\left(D(\underline{M}) - D(\overline{M})\right) > 0$ ไม่ว่า X และ Y จะมีการแจกแจงใดก็ตาม

สังเกตว่า $\overline{M} > \underline{M}$ เนื่องจาก $\overline{M} = max(X,Y)$, $\underline{M} = min(X,Y)$ และ $X \neq Y$ เราจะแสดงว่า $D: \mathbb{R} \to [0,1]$ เป็น**ฟังก์ชันลดโดยแท้** ก็ต่อเมื่อ $E\left(D(\underline{M}) - D(\overline{M})\right) > 0$ สำหรับทุกการแจกแจงของ X และ Y

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ สมมติ $D: \mathbb{R} \to [0,1]$ เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ จาก $\overline{M} > \underline{M}$ จะได้ว่า $D(\underline{M}) - D(\overline{M}) > 0$ ดังนั้น $E\left(D(\underline{M}) - D(\overline{M})\right) > 0$

$(\Leftarrow)$ เราจะพิสูจน์โดยใช้วิธีแย้งสลับที่ สมมติ $D: \mathbb{R} \to [0,1]$ ไม่เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ ดังนั้นมี $a, b \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a < b$ และ $D(a) \leq D(b)$ เลือก X และ Y ให้เป็นตัวแปรสุ่มค่าคงที่ $X = a$ และ $Y = b$ ดังนั้น $\overline{M} = max(X,Y) = b$ และ $\underline{M} = min(X,Y) = a$ จะได้ว่า $E\left(D(\underline{M}) - D(\overline{M})\right) = E\big(D(a) - D(b)\big) \leq 0$

หากเรานึกย้อนไปถึงกลยุทธ์แรกที่ให้ X เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และ Y เป็นตัวเลขที่ซ่อนอยู่หลังประตูอีกบาน โดย X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ซึ่งมีค่าแตกต่างกัน แล้วทำการสุ่มตัวเลข K จากการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ซัพพอร์ตของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ $\mathbb{R}$ จากนั้นให้พิจารณาค่าของ K ถ้า $K < X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X แต่ถ้า $K > X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่ามากกว่า X จะได้ว่ากลยุทธ์ที่ว่านี้**สอดคล้อง**กับกลยุทธ์ที่กำหนดฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ $I: \mathbb{R} \to [0,1]$ ให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ เนื่องจากเหตุผลต่อไปนี้

จากสมการที่ (3.2) และ (3.3) และจาก K เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
E\left(I(\overline{M}) - I(\underline{M})\right) &= P(A_3) \\
&= P\big(\underline{M} \leq K \leq \overline{M}\big) \\
&= P\big(K \leq \overline{M}\big) - P\big(K \leq \underline{M}\big)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก K เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่ซัพพอร์ตของฟังก์ชันความหนาแน่ความน่าจะเป็นคือ $\mathbb{R}$ จะได้ว่า F_K ต้องเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ เมื่อ F_K คือฟังก์ชันการแจกแจงของ K โดยทฤษฎีบท 2.5.3 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P\big(K \leq \overline{M}\big) - P\big(K \leq \underline{M}\big) &= P\left(F_K(K) \leq F_K(\overline{M})\right) - P\left(F_K(K) \leq F_K(\underline{M})\right) \\
&= P\left(U_1 \leq F_K(\overline{M})\right) - P\left(U_1 \leq F_K(\underline{M})\right) \\
&= E\left(F_K(\overline{M})\right) - E\left(F_K(\underline{M})\right) \\
&= E\left(F_K(\overline{M}) - F_K(\underline{M})\right)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $U_1 \sim U(0,1)$ ดังนั้นถ้า $I = F_K$ จะได้ว่ากลยุทธ์ที่ว่านี้สอดคล้องกับกลยุทธ์ที่กำหนดฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ $I: \mathbb{R} \to [0,1]$ ให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

เนื่องจาก F_K เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ซึ่งมี $\lim_{x\to\infty} F_K(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_K(x) = 0$ และ F_K เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ในขณะที่ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ I สามารถเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องก็ได้ หรือแม้กระทั่ง $\lim_{x\to-\infty} I(x) \neq 0$ หรือ $\lim_{x\to\infty} I(x) \neq 1$ ก็ได้ ขอเพียงแค่ $I\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ดังนั้นกลยุทธ์ที่กำหนดฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ I เป็นกลยุทธ์ที่**มีความทั่วไปมากกว่า** ยิ่งไปกว่านั้นเรายังสามารถขยายกลยุทธ์ต่อไปได้ว่าสามารถกำหนดฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจเป็น $D\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 1 ให้ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ $I(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1+|x|}\right)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

สมมติตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู $W = 1234.5678$

$$\begin{aligned} I(1234.5678) &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1234.5678}{1 + |1234.5678|}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1234.5678}{1235.5678}\right) \\ &= \frac{6175339}{6177839} \qquad (\approx 0.9995953277) \end{aligned}$$

กลยุทธ์ที่จะใช้ในการตอบคำถามคือ เราจะใช้ความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขที่อยู่หลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่าน้อยกว่า 1234.5678 เท่ากับ $\frac{6175339}{6177839}$ โดยทำการสุ่มโดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $Z \sim Ber\left(\frac{6175339}{6177839}\right)$

ถ้า $Z = 0$ จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่ามากกว่า 1234.5678

แต่ถ้า $Z = 1$ จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่าน้อยกว่า 1234.5678

ตัวอย่างที่ 2 ให้ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ $D(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x - \frac{5}{2}} & ; x < 0 \\ \frac{1}{x + \frac{5}{2}} & ; x \geq 0 \end{cases}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันลด

สมมติตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู $W = 9159.264$

$$\begin{aligned} D(9159.264) &= \frac{1}{9159.264 + \frac{5}{2}} \\ &= \frac{250}{2290441} \qquad (\approx 0.0001091492861) \end{aligned}$$

กลยุทธ์ที่จะใช้ในการตอบคำถามคือ เราจะใช้ความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขที่อยู่หลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่าน้อยกว่า 9159.264 เท่ากับ $\frac{250}{2290441}$ โดยทำการสุ่มโดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $Z \sim Ber\left(\frac{250}{2290441}\right)$

ถ้า $Z = 0$ จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่าน้อยกว่า 9159.264

แต่ถ้า $Z = 1$ จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่ามากกว่า 9159.264

จะเห็นว่าฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ I และ D สามารถที่จะกำหนดเป็นฟังก์ชันอะไรก็ได้แต่ต้องเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้หรือฟังก์ชันลดโดยแท้เพราะจากสมการที่ (3.3) และ (3.4) จะเห็นได้ว่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจะมากกว่า 0.5 เสมอ แต่จะมีค่ามากกว่ามากหรือน้อยนั้นขึ้นอยู่กับฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่ ซึ่งเราจะเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ สำหรับใช้ในการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่านี้ในหัวข้อที่ 4 และการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่านี้ในหัวข้อที่ 5 ดังต่อไปนี้

$$I_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(x)}{\pi} \qquad D_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{arctan\,(x)}{\pi}$$

$$I_2(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{9}}} \qquad D_2(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{9}}}$$

$$I_3(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1 + |x|}\right) \qquad D_3(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{1 + |x|}\right)$$

$$I_4(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{5}{2} - x}; & x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x + \frac{5}{2}}; & x \geq 0 \end{cases} \qquad D_4(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x - \frac{5}{2}}; & x < 0 \\ \dfrac{1}{x + \frac{5}{2}}; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$I_5(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{2e}; & x < -1 \\ \dfrac{x + 5}{10}; & -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{x + 11}{20}; & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{2e}; & x \geq 1 \end{cases} \qquad D_5(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{2e}; & x < -1 \\ \dfrac{5 - x}{10}; & -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{9 - x}{20}; & 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{2e}; & x \geq 1 \end{cases}$$

ซึ่งฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจเหล่านี้มีกราฟเป็นดังภาพที่ 3.1

3.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการแจกแจงของ $\overline{M}$ และ $\underline{M}$ สำหรับใช้ในการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าในบทที่ 4 และการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าในบทที่ 5 เมื่อให้ X และ Y เป็นตัวเลขสองตัวที่แตกต่างกัน ที่ซ่อนไว้หลังประตูสองบานที่สุ่มมาจากการแจกแจงร่วมกันของ X และ Y ที่มีเงื่อนไข $X \neq Y$

ต่อไปนี้สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง V ใด ๆ (เช่น $X, Y, \overline{M}, \underline{M}$) เราจะให้

F_V แทนฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม V

f_V แทนฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม V

ในโครงงานนี้เราจะพิจารณาชนิดตัวแปรสุ่มของ X และ Y เพียง 2 กรณี ได้แก่ กรณีที่ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง และกรณีที่ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

3.2.1 X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

เราสามารถหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $\overline{M}$ ได้ คือ สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ ใด ๆ

$$\begin{aligned}
f_{\overline{M}}(a) &= \frac{d}{da}\left(P\left(\overline{M} \le a\right)\right) \\
&= \frac{d}{da}\left(P(\max{(X,Y)} \le a)\right) \\
&= \frac{d}{da}\left(P(\{\mathrm{X} \le a\} \cap \{\mathrm{Y} \le a\})\right) \\
&= \frac{d}{da}\left(P(\mathrm{X} \le a)P(\mathrm{Y} \le a)\right) \\
&= \frac{d}{da}\left(F_X(a)F_Y(a)\right) \\
&= f_X(a)F_Y(a) + f_Y(a)F_X(a) \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

และหาฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $\underline{M}$ ได้ คือ สำหรับ $a \in \mathbb{R}$ ใด ๆ

$$\begin{aligned}
f_{\underline{M}}(a) &= \frac{d}{da}\left(P\left(\underline{M} \le a\right)\right) \\
&= \frac{d}{da}\left(1 - P(\min(X,Y) > a)\right) \\
&= -\frac{d}{da}\left(P(\min(X,Y) > a)\right) \\
&= -\frac{d}{da}\left(P(\{\mathrm{X} > a\} \cap \{\mathrm{Y} > a\})\right) \\
&= -\frac{d}{da}\left(P(X > a)P(Y > a)\right) \\
&= -\frac{d}{da}\left(\left(1 - P(X \le a)\right)\left(1 - P(Y \le a)\right)\right) \\
&= -\frac{d}{da}\left(\left(1 - F_X(a)\right)\left(1 - F_Y(a)\right)\right) \\
&= f_X(a)\left(1 - F_Y(a)\right) + f_Y(a)\left(1 - F_X(a)\right) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

3.2.2 X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

เราจะอธิบายสำหรับกรณีที่ตัวแปรสุ่ม X และ Y มีค่าที่เป็นไปได้เหมือนกันและมีจำนวนที่จำกัด ส่วนสำหรับกรณีใด ๆ เราสามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน สมมติให้ตัวแปรสุ่ม X และ Y มีค่าที่เป็นไปได้คือ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ โดยที่ $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ ซึ่งมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ต่าง ๆ ดังตารางที่ 3.1

$X \backslash Y$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
x_1	$P(X=x_1,Y=x_1)$	$P(X=x_1,Y=x_2)$	$P(X=x_1,Y=x_3)$	$P(X=x_1,Y=x_4)$	$\cdots$	$P(X=x_1,Y=x_n)$
x_2	$P(X=x_2,Y=x_1)$	$P(X=x_2,Y=x_2)$	$P(X=x_2,Y=x_3)$	$P(X=x_2,Y=x_4)$	$\cdots$	$P(X=x_2,Y=x_n)$
x_3	$P(X=x_3,Y=x_1)$	$P(X=x_3,Y=x_2)$	$P(X=x_3,Y=x_3)$	$P(X=x_3,Y=x_4)$	$\cdots$	$P(X=x_3,Y=x_n)$
x_4	$P(X=x_4,Y=x_1)$	$P(X=x_4,Y=x_2)$	$P(X=x_4,Y=x_3)$	$P(X=x_4,Y=x_4)$	$\cdots$	$P(X=x_4,Y=x_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	$P(X=x_n,Y=x_1)$	$P(X=x_n,Y=x_2)$	$P(X=x_n,Y=x_3)$	$P(X=x_n,Y=x_4)$	$\cdots$	$P(X=x_n,Y=x_n)$

ตารางที่ 3.1 ความน่าจะเป็นในการสุ่ม X และ Y ที่เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

จากตารางที่ 3.1 ผลรวมของความน่าจะเป็นทั้งหมดเท่ากับ 1 เนื่องจากเราจะใส่เงื่อนไขว่า $X \neq Y$ จะสังเกตได้ว่าผลรวมของความน่าจะเป็นทั้งหมดเมื่อไม่คิดเหตุการณ์ที่ $X = Y$ จะเท่ากับ

$$1 - P(X = Y) = 1 - \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i, Y = y_i)$$

ให้ $f_{X\neq Y}$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y ที่มีเงื่อนไขว่า $X \neq Y$ จาก $X \perp Y$ จะได้ว่า

$$f_{X\neq Y}(x,y) = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{1 - P(X = Y)}$$

สำหรับ $(x,y) \in \{(x_i,x_j) | i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ และ $i \neq j\}$ ดังแสดงในตารางที่ 3.2

$X \backslash Y$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
x_1	0	$\frac{P(X=x_1,Y=x_2)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_1,Y=x_3)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_1,Y=x_4)}{1-P(X=Y)}$	$\cdots$	$\frac{P(X=x_1,Y=x_n)}{1-P(X=Y)}$
x_2	$\frac{P(X=x_2,Y=x_1)}{1-P(X=Y)}$	0	$\frac{P(X=x_2,Y=x_3)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_2,Y=x_4)}{1-P(X=Y)}$	$\cdots$	$\frac{P(X=x_2,Y=x_n)}{1-P(X=Y)}$
x_3	$\frac{P(X=x_3,Y=x_1)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_3,Y=x_2)}{1-P(X=Y)}$	0	$\frac{P(X=x_3,Y=x_4)}{1-P(X=Y)}$	$\cdots$	$\frac{P(X=x_3,Y=x_n)}{1-P(X=Y)}$
x_4	$\frac{P(X=x_4,Y=x_1)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_4,Y=x_2)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_4,Y=x_3)}{1-P(X=Y)}$	0	$\cdots$	$\frac{P(X=x_4,Y=x_n)}{1-P(X=Y)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	$\frac{P(X=x_n,Y=x_1)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_n,Y=x_2)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_n,Y=x_3)}{1-P(X=Y)}$	$\frac{P(X=x_n,Y=x_4)}{1-P(X=Y)}$	$\cdots$	0

ตารางที่ 3.2 ความน่าจะเป็นร่วมในการสุ่ม X และ Y ที่เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และมีเงื่อนไขว่า $X \neq Y$

$X \backslash Y$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
x_1	-	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
x_2	x_2	-	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
x_3	x_3	x_3	-	x_4	$\cdots$	x_n
x_4	x_4	x_4	x_4	-	$\cdots$	x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	x_n	x_n	x_n	x_n	$\cdots$	-

ตารางที่ 3.3 ค่าที่เป็นไปได้ของ $\overline{M}$ ในเหตุการณ์ต่าง ๆ

$X \backslash Y$	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_n
x_1	-	x_1	x_1	x_1	$\cdots$	x_1
x_2	x_1	-	x_2	x_2	$\cdots$	x_2
x_3	x_1	x_2	-	x_3	$\cdots$	x_3
x_4	x_1	x_2	x_3	-	$\cdots$	x_4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	-

ตารางที่ 3.4 ค่าที่เป็นไปได้ของ $\underline{M}$ ในเหตุการณ์ต่าง ๆ

จากตารางที่ 3.3 จะได้ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $\overline{M}$ คือ

$$f_{\overline{M}}(x_i) = \sum_{j=1}^{i-1} \left(f_{X\neq Y}(x_j, x_i) + f_{X\neq Y}(x_i, x_j) \right) \quad \text{สำหรับ } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

และจากตารางที่ 3.4 จะได้ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม $\underline{M}$ คือ

$$f_{\underline{M}}(x_i) = \sum_{j=i+1}^{n} \left(f_{X\neq Y}(x_j, x_i) + f_{X\neq Y}(x_i, x_j) \right) \text{ สำหรับ } i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับในกรณีใด ๆ ที่ X มีค่าที่เป็นไปได้คือ $ImX = \{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ และ Y มีค่าที่เป็นไปได้คือ $ImY = \{y_i | i \in \mathbb{N}\}$ ให้ $S = ImX \cap ImY$ จะได้ว่า

$$f_{X\neq Y}(x, y) = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{1 - \sum_{z\in S} f_X(z) f_Y(z)} \quad \text{ทุก } (x, y) \in (ImX \times ImY) \backslash (S \times S)$$

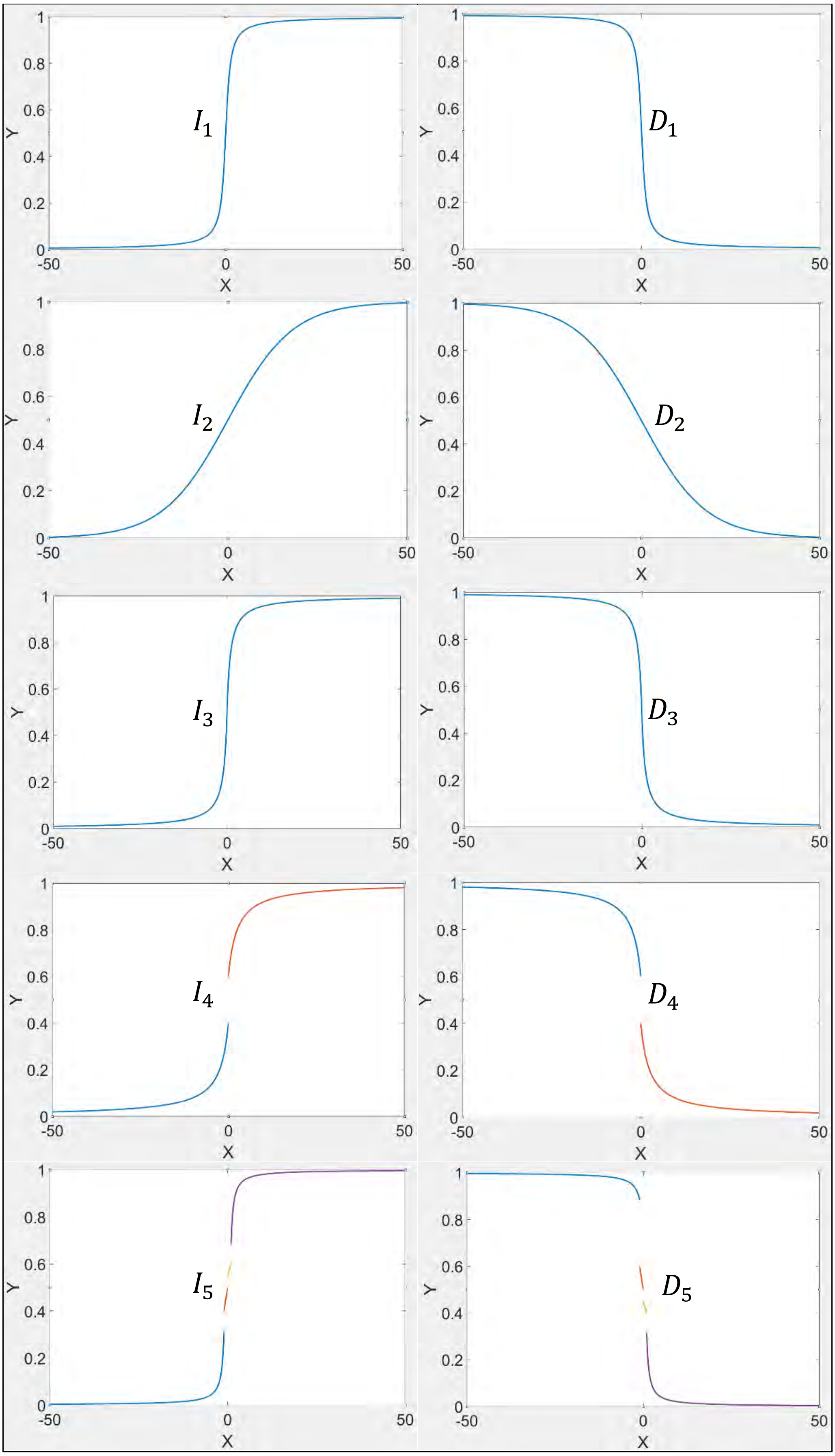
และสำหรับ $f_{\overline{M}}$ และ $f_{\underline{M}}$ ในกรณีใด ๆ จะได้ว่า

$$f_{\overline{M}}(z) = \sum_{x<z} f_{X\neq Y}(x,z) + \sum_{y<z} f_{X\neq Y}(z,y) \quad \text{ทุก } z \in ImX \cup ImY \tag{3.7}$$

$$f_{\underline{M}}(z) = \sum_{x>z} f_{X\neq Y}(x,z) + \sum_{y>z} f_{X\neq Y}(z,y) \quad \text{ทุก } z \in ImX \cup ImY \tag{3.8}$$

ซึ่งเราจะเลือกพิจารณาตัวอย่างการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ สำหรับใช้ในการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าในบทที่ 4 และการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าในบทที่ 5 ดังนี้

1. ตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน
2. ตัวแปรสุ่มเอกรูปบนช่วง $[0, 1]$
3. ตัวแปรสุ่มเลขชี้กำลัง ที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = 1$
4. ตัวแปรสุ่มทวินาม ที่มีพารามิเตอร์ $n = 10$ และ $p = 0.2$
5. ตัวแปรสุ่มปัวซง ที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = 1$



ภาพที่ 3.1 กราฟฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, D_1, D_2, D_3, D_4$ และ D_5

บทที่ 4
การคำนวณโดยใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

ในบทนี้เราจะคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า โดยเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจในหัวข้อที่ 3.1 และการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ในหัวข้อที่ 3.2 สำหรับการคำนวณความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก

จากสมการที่ (3.2) โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะได้ว่า

$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(I(\overline{M})\right) - E\left(I(\underline{M})\right)\right) \tag{4.1}$$

และจากสมการที่ (3.3) โดยทฤษฎีบท 2.3.3 จะได้ว่า

$$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(D(\underline{M})\right) - E\left(D(\overline{M})\right)\right) \tag{4.2}$$

ในโครงงานนี้เราจะพิจารณา X และ Y ที่มีการแจกแจงเดียวกัน โดยแบ่งเป็น 2 กรณี ได้แก่ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง และ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ให้ G แทนฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจใด ๆ ซึ่งอาจจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ I หรือฟังก์ชันลดโดยแท้ D ในหัวข้อที่ 3.1 ก็ได้

4.1 X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

พิจารณาค่าคาดคะเน $E\left(G(\overline{M})\right)$ และ $E\left(G(\underline{M})\right)$ จากทฤษฎีบท 2.3.2 จะได้ว่า

$$E\left(G(\overline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} G(a) f_{\overline{M}}(a)\, da$$

และ

$$E\left(G(\underline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} G(a) f_{\underline{M}}(a)\, da$$

จากสมการที่ (3.5) และ (3.6) จะได้ว่า

$$E\left(G(\overline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} G(a)[f_X(a)F_Y(a) + f_Y(a)F_X(a)]\, da \tag{4.3}$$

และ

$$E\left(G(\underline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} G(a)\big[f_X(a)\big(1 - F_Y(a)\big) + f_Y(a)\big(1 - F_X(a)\big)\big]\, da \tag{4.4}$$

4.2 X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

เนื่องจากเราพิจารณา X และ Y ที่มีการแจกแจงเดียวกัน นั่นคือ X และ Y มีค่าที่เป็นไปได้เหมือนกัน ให้เป็น ImX

พิจารณาค่าคาดคะเน $E\left(G(\overline{M})\right)$ และ $E\left(G(\underline{M})\right)$ จากทฤษฎีบท 2.3.2 จะได้ว่า

$$E\left(G(\overline{M})\right) = \sum_{x\in ImX} G(x) f_{\overline{M}}(x)$$

และ

$$E\left(G(\underline{M})\right) = \sum_{x\in ImX} G(x) f_{\underline{M}}(x)$$

โดยสมการที่ (3.7) และ (3.8) จะได้ว่า

$$E\left(G(\overline{M})\right) = \sum_{z\in ImX} G(z)\left[\sum_{x<z} f_{X\neq Y}(x,z) + \sum_{y<z} f_{X\neq Y}(z,y)\right] \tag{4.5}$$

และ

$$E\left(G(\underline{M})\right) = \sum_{z\in ImX} G(z)\left[\sum_{x>z} f_{X\neq Y}(x,z) + \sum_{y>z} f_{X\neq Y}(z,y)\right] \tag{4.6}$$

4.3 ตัวอย่างการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

ตัวอย่างที่ 3 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $N(0,1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $I_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(x)}{\pi}$

จะได้ว่า $X, Y \sim N(0,1)$ มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$

จากสมการที่ (4.3) และ (4.4) จะได้

$$\begin{aligned} E\left(I_1(\overline{M})\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a) f_{\overline{M}}(a)\, da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right) da \\ E\left(I_1(\underline{M})\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a) f_{\underline{M}}(a)\, da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right) da \end{aligned}$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จะได้ $E\left(I_1(\overline{M})\right) \approx 0.6231986548$

และ $E\left(I_1(\underline{M})\right) \approx 0.3768013452$

จากสมการที่ (4.1) $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(I_1(\overline{M})\right) - E\left(I_1(\underline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0.6231986548 - 0.3768013452)$

≈ 0.6231986548

ตัวอย่างที่ 4 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $U(0,1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $I_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{5}{2}-x}; & x < 0 \\ 1-\frac{1}{x+\frac{5}{2}}; & x \geq 0 \end{cases}$

จะได้ว่า $X, Y \sim U(0,1)$ มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < 1 \\ 0; & x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ $F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 0 \\ x; & 0 < x < 1 \\ 1; & x \geq 1 \end{cases}$

จากสมการที่ (4.3) และ (4.4) จะได้

$$E\left(I_4(\overline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a) f_{\overline{M}}(a)\, da$$

$$= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{a+\frac{5}{2}}\right)(2a)\, da$$

$$E\left(I_4(\underline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a) f_{\underline{M}}(a)\, da$$

$$= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{a+\frac{5}{2}}\right)[2(1-a)]\, da$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จะได้ $E\left(I_4(\overline{M})\right) \approx 0.6823611831$

และ $E\left(I_4(\underline{M})\right) \approx 0.6443643437$

จากสมการที่ (4.1) $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(I_4(\overline{M})\right) - E\left(I_4(\underline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0.6823611831 - 0.6443643437)$

≈ 0.5188334197

ตัวอย่างที่ 5 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $Exp(1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $D_2(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-\frac{x}{9}}}$

จะได้ว่า $X, Y \sim Exp(1)$ มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ $f(x) = e^{-x}$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ $F(x) = 1 - e^{-x}$

จากสมการที่ (4.3) และ (4.4) จะได้

$$E\left(D_2(\overline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} D_2(a) f_{\overline{M}}(a)\, da$$

$$= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{a}{9}}}\right)(2[e^{-a}][1-e^{-a}])\, da$$

$$E\left(D_2(\underline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} D_2(a) f_{\underline{M}}(a)\, da$$
$$= \int_{0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{1\ +\ e^{-\frac{a}{9}}}\right)(2[e^{-2a}])\, da$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จะได้ $E\left(D_2(\overline{M})\right) \approx 0.4586469075$

และ $E\left(D_2(\underline{M})\right) \approx 0.4861324141$

จากสมการที่ (4.2) $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(D_2(\underline{M})\right) - E\left(D_2(\overline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0.4861324141 - 0.4586469075)$

≈ 0.5137427533

ตัวอย่างที่ 6 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $B(10,0.2)$

และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $D_5(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-\frac{1}{x}-1}}{2e}; & x < -1 \\ \frac{5-x}{10}; & -1 \le x < 0 \\ \frac{9-x}{20}; & 0 \le x < 1 \\ \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{2e}; & x \ge 1 \end{cases}$

โดยหัวข้อที่ 3.2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $B(10,0.2)$ จะมีค่า X และ Y ที่เป็นไปได้ คือ $0,1,2,\dots,10$ ซึ่งสามารถคำนวณความน่าจะเป็น $f_{X\neq Y}$ ได้ดังตารางที่ 4.1

จากสมการที่ (4.5) และ (4.6) จะได้

$$E\left(D_5(\overline{M})\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left[D_5(x_i)\left(f_{X\neq Y}(x_i,x_j) + f_{X\neq Y}(x_j,x_i)\right)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{10}\sum_{j=0}^{i}\left[D_5(i)\left(f_{X\neq Y}(i,j) + f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{i}\left[\left(\frac{9-x}{20}\right)\left(f_{X\neq Y}(i,j) + f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right]$$
$$+ \sum_{i=2}^{10}\sum_{j=0}^{i}\left[\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{2e}\right)\left(f_{X\neq Y}(i,j) + f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right]$$
$$E\left(D_5(\underline{M})\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left[D_5(x_i)\left(f_{X\neq Y}(x_i,x_j) + f_{X\neq Y}(x_j,x_i)\right)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{10}\sum_{j=i}^{10}\left[D_5(i)\left(f_{X\neq Y}(i,j) + f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=i}^{10}\left[\left(\frac{9-x}{20}\right)\left(f_{X\neq Y}(i,j) + f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right]$$

$$+\sum_{i=2}^{10}\sum_{j=i}^{10}\left[\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{2e}\right)\left(f_{X\neq Y}(i,j)+f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right]$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จะได้ $E\left(D_5(\overline{M})\right) \approx 0.09759122883$

และ $E\left(D_5(\underline{M})\right) \approx 0.2824724963$

จากสมการที่ (4.2) $P(B) \approx \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(E\left(D_5(\underline{M})\right)-E\left(D_5(\overline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0.2824724963-0.09759122883)$

≈ 0.5924406337

ตัวอย่างที่ 7 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $Poi(1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $I_3(x) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{1+|x|}\right)$

โดยหัวข้อที่ 3.2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $Poi(1)$ จะมีค่า X และ Y ที่เป็นไปได้ คือ $0,1,2,3,\ldots$ ซึ่งสามารถคำนวณความน่าจะเป็น $f_{X\neq Y}$ ได้ดังตารางที่ 4.2

จากสมการที่ (4.5) และ (4.6) จะได้

$$\begin{aligned}
E\left(I_3(\overline{M})\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\left[I_3(x_i)\left(f_{X\neq Y}(x_i,x_j)+f_{X\neq Y}(x_j,x_i)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\left[I_3(i)\left(f_{X\neq Y}(i,j)+f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i}\left[\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{1+|x|}\right)\right)\left(f_{X\neq Y}(i,j)+f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right] \\
E\left(I_3(\underline{M})\right) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\left[I_3(x_i)\left(f_{X\neq Y}(x_i,x_j)+f_{X\neq Y}(x_j,x_i)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\left[I_3(i)\left(f_{X\neq Y}(i,j)+f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{1+|x|}\right)\right)\left(f_{X\neq Y}(i,j)+f_{X\neq Y}(j,i)\right)\right]
\end{aligned}$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จะได้ $E\left(I_3(\overline{M})\right) \approx 0.811311468$

และ $E\left(I_3(\underline{M})\right) \approx 0.585859484$

จากสมการที่ (4.1) $P(B) \approx \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(E\left(I_3(\overline{M})\right)-E\left(I_3(\underline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0.811311468-0.585859484)$

≈ 0.61272599

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	3.713E-02	4.178E-02	2.785E-02	1.218E-02	3.655E-03	7.615E-04	1.088E-04	1.020E-05	5.666E-07	1.417E-08
1	3.713E-02	0	1.044E-01	6.963E-02	3.046E-02	9.138E-03	1.904E-03	2.720E-04	2.550E-05	1.417E-06	3.541E-08
2	4.178E-02	1.044E-01	0	7.833E-02	3.427E-02	1.028E-02	2.142E-03	3.060E-04	2.868E-05	1.594E-06	3.984E-08
3	2.785E-02	6.963E-02	7.833E-02	0	2.285E-02	6.854E-03	1.428E-03	2.040E-04	1.912E-05	1.062E-06	2.656E-08
4	1.218E-02	3.046E-02	3.427E-02	2.285E-02	0	2.999E-03	6.247E-04	8.924E-05	8.366E-06	4.648E-07	1.162E-08
5	3.655E-03	9.138E-03	1.028E-02	6.854E-03	2.999E-03	0	1.874E-04	2.677E-05	2.510E-06	1.394E-07	3.486E-09
6	7.615E-04	1.904E-03	2.142E-03	1.428E-03	6.247E-04	1.874E-04	0	5.578E-06	5.229E-07	2.905E-08	7.263E-10
7	1.088E-04	2.720E-04	3.060E-04	2.040E-04	8.924E-05	2.677E-05	5.578E-06	0	7.470E-08	4.150E-09	1.038E-10
8	1.020E-05	2.550E-05	2.868E-05	1.912E-05	8.366E-06	2.510E-06	5.229E-07	7.470E-08	0	3.891E-10	9.727E-12
9	5.666E-07	1.417E-06	1.594E-06	1.062E-06	4.648E-07	1.394E-07	2.905E-08	4.150E-09	3.891E-10	0	5.404E-13
10	1.417E-08	3.541E-08	3.984E-08	2.656E-08	1.162E-08	3.486E-09	7.263E-10	1.038E-10	9.727E-12	5.404E-13	0

ตารางที่ 4.1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f_{X \neq Y}$ ของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $B(10,0.2)$

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
0	0	1.957E-01	9.786E-02	3.262E-02	8.155E-03	1.631E-03	2.718E-04	3.883E-05	4.854E-06	⋯
1	1.957E-01	0	9.786E-02	3.262E-02	8.155E-03	1.631E-03	2.718E-04	3.883E-05	4.854E-06	⋯
2	9.786E-02	9.786E-02	0	1.631E-02	4.077E-03	8.155E-04	1.359E-04	1.942E-05	2.427E-06	⋯
3	3.262E-02	3.262E-02	1.631E-02	0	1.359E-03	2.718E-04	4.530E-05	6.472E-06	8.090E-07	⋯
4	8.155E-03	8.155E-03	4.077E-03	1.359E-03	0	6.796E-05	1.133E-05	1.618E-06	2.023E-07	⋯
5	1.631E-03	1.631E-03	8.155E-04	2.718E-04	6.796E-05	0	2.265E-06	3.236E-07	4.045E-08	⋯
6	2.718E-04	2.718E-04	1.359E-04	4.530E-05	1.133E-05	2.265E-06	0	5.393E-08	6.742E-09	⋯
7	3.883E-05	3.883E-05	1.942E-05	6.472E-06	1.618E-06	3.236E-07	5.393E-08	0	9.631E-10	⋯
8	4.854E-06	4.854E-06	2.427E-06	8.090E-07	2.023E-07	4.045E-08	6.742E-09	9.631E-10	0	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

ตารางที่ 4.2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f_{X \neq Y}$ ของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $Poi(1)$

4.4 ผลลัพธ์จากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลลัพธ์จากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า โดยใช้ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจในหัวข้อที่ 3.1 และการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ในหัวข้อที่ 3.2

4.4.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{N(0,1)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$N(0,1)$	I_1	0.6231986548	D_1	0.6231986548
	I_2	0.5156318368	D_2	0.5156318368
	I_3	0.6230097676	D_3	0.6230097676
	I_4	0.6085501705	D_4	0.6085501705
	I_5	0.6004203340	D_5	0.6004203340

ตารางที่ 4.3 ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$

จะเห็นว่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณ เมื่อเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ I_1 และ D_1 มีค่าเท่ากัน เพราะฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ I_1 และฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ D_1 เป็นฟังก์ชันที่มีความสมมาตรกันเมื่อพิจารณาถึงกราฟของทั้ง 2 ฟังก์ชัน และในทำนองเดียวกันจะได้ว่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณจากการเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ I_2 และ D_2, I_3 และ D_3, I_4 และ D_4, I_5 และ D_5 ทุกคู่จะมีค่าเท่ากัน

ต่อไปเราจะแสดงเพียงความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า เมื่อเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจเป็น I_1, I_2, I_3, I_4 และ I_5

4.4.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{U(0,1)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$U(0,1)$	I_1	0.5420079139
	I_2	0.5046253471
	I_3	0.5397207708
	I_4	0.5188334197
	I_5	0.5083333333

ตารางที่ 4.4 ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $U(0,1)$

4.4.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{Exp(1)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$Exp(1)$	I_1	0.5708012337
	I_2	0.5137427533
	I_3	0.5631549358
	I_4	0.5373185161
	I_5	0.5720497158

ตารางที่ 4.5 ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
ของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $Exp(1)$

4.4.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{B(10, 0.2)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$B(10,0.2)$	I_1	0.5785867606
	I_2	0.5243907237
	I_3	0.5719890913
	I_4	0.5494785344
	I_5	0.5924406337

ตารางที่ 4.6 ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
ของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $B(10,0.2)$

4.4.5 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{Poi(1)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$Poi(1)$	I_1	0.6184404029
	I_2	0.5208786764
	I_3	0.6127259920
	I_4	0.5614768525
	I_5	0.6059494361

ตารางที่ 4.7 ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
ของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $Poi(1)$

บทที่ 5
การจำลองการใช้กลยุทธ์

ในบทนี้เราจะเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจในหัวข้อที่ 3.1 และการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ในหัวข้อที่ 3.2 สำหรับการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าโดยใช้โปรแกรม MATLAB

ขั้นตอนการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

1. เลือกการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ D_0 และฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ G

2. ทำการสุ่มตัวเลขสองตัวที่นำมาซ่อนไว้หลังประตูสองบานจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ D_0 โดยที่ไม่ทราบค่าของตัวเลขทั้งสอง

3. ทำการสุ่มเพื่อเลือกเปิดดูตัวเลขหลังบานประตูอย่างสม่ำเสมอ สมมติว่าตัวเลขที่เห็นหลังประตูบานที่เปิดดูคือ W โดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $V \sim Ber(0.5)$ ถ้า $V = 0$ ค่าของ W จะเท่ากับตัวเลขที่อยู่หลังประตูบานที่หนึ่ง แต่ถ้า $V = 1$ ค่าของ W จะเท่ากับตัวเลขที่อยู่หลังประตูบานที่สอง

4. คำนวณค่า $G(W)$ ถ้า G เป็นฟังก์ชันเพิ่มจะได้ว่า $G(W)$ เป็นความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขอีกตัวหนึ่งมีค่าน้อยกว่า W แต่ถ้า G เป็นฟังก์ชันลดจะได้ $G(W)$ เป็นความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขอีกตัวหนึ่งมีค่ามากกว่า W

5. ทำการเลือกคำตอบด้วยการสุ่มค่า R โดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $R \sim Ber\big(G(W)\big)$
   - กรณีที่ G เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $R = 1$ จะตอบว่าตัวเลขอีกตัวหนึ่งมีค่าน้อยกว่า W แต่ถ้า $R = 0$ จะตอบว่าตัวเลขอีกตัวหนึ่งมีค่ามากกว่า W
   - กรณีที่ G เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $R = 1$ จะตอบว่าตัวเลขอีกตัวหนึ่งมีค่ามากกว่า W แต่ถ้า $R = 0$ จะตอบว่าตัวเลขอีกตัวหนึ่งมีค่าน้อยกว่า W

6. ทำซ้ำข้อ 1 – 5 เพื่อหาค่าเฉลี่ยในการตอบถูก

5.1 ตัวอย่างการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

ตัวอย่างที่ 8 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $N(0,1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $I_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(x)}{\pi}$

สุ่มค่า X และ Y จากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ โดยที่ไม่ทราบค่าทั้งสอง

สมมติ สุ่มได้ค่า $X = 3.5784$ และ $Y = 2.7694$

จากนั้นทำการสุ่มเปิดดูค่า X หรือ Y อย่างสม่ำเสมอโดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $V \sim Ber(0.5)$

ถ้า $V = 0$ จะได้ว่า $W = X$ และถ้า $V = 1$ จะได้ว่า $W = Y$

สมมติค่าที่สุ่มได้ คือ $V = 0$ จะได้ว่า $W = 3.5784$

คำนวณค่า $I_1(W)$ จะได้

$$\begin{aligned} I_1(3.5784) &= \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(3.5784)}{\pi} \\ &\approx 0.9132596667 \end{aligned}$$

นั่นคือ เราจะใช้ความน่าจะเป็นที่จะตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X ประมาณ 0.9132596667

เลือกคำตอบโดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $R \sim Ber(0.9132596667)$

พร้อมกับเปิดดูค่า Y เพื่อตรวจสอบว่าตอบคำถามถูกหรือไม่

ให้ $R \sim Ber(0.9132596667)$

เนื่องจาก $Y = 2.7694 < 3.5784 = X$

ถ้า $R = 1$ จะตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X จะได้ว่า ตอบคำถามถูก

แต่ถ้า $R = 0$ จะตอบว่า Y มีค่ามากกว่า X จะได้ว่า ตอบคำถามผิด

จากนั้นให้ทำซ้ำ 1,000,000 ครั้ง แล้วหาค่าเฉลี่ยสำหรับความน่าจะเป็นในการตอบถูก ดังภาพที่ 5.1 คือ โปรแกรมที่ใช้ในการจำลองและความน่าจะเป็นในการตอบถูกที่ได้จากการจำลอง

ตัวอย่างที่ 9 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $B(10,0.2)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $D_3(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{1+|x|}\right)$

สุ่มค่า X และ Y จากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $B(10,0.2)$ โดยที่ไม่ทราบค่าทั้งสอง โดยมีเงื่อนไขว่า $X \neq Y$ ถ้าเราสุ่มได้ $X = Y$ เราจะทำการสุ่ม X และ Y ใหม่จนกระทั่ง $X \neq Y$

สมมติ สุ่มได้ค่า $X = 3$ และ $Y = 1$

จากนั้นทำการสุ่มเปิดดูค่า X หรือ Y อย่างสม่ำเสมอโดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $V \sim Ber(0.5)$

ถ้า $V = 0$ จะได้ว่า $W = X$ และถ้า $V = 1$ จะได้ว่า $W = Y$

สมมติค่าที่สุ่มได้ คือ $V = 0$ จะได้ว่า $W = 3$

คำนวณค่า $D_3(W)$ จะได้

$$\begin{aligned} D_3(3) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{1+|3|}\right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

นั่นคือ เราจะใช้ความน่าจะเป็นที่จะตอบว่า Y มีค่ามากกว่า X ประมาณ $\frac{1}{8}$

เลือกคำตอบโดยใช้ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี $R \sim Ber\left(\frac{1}{8}\right)$

พร้อมกับเปิดดูค่า Y เพื่อตรวจสอบว่าตอบคำถามถูกหรือไม่

ให้ $R \sim Ber\left(\frac{1}{8}\right)$

เนื่องจาก $Y = 1 < 3 = X$

ถ้า $R = 1$ จะตอบว่า Y มีค่ามากกว่า X จะได้ว่า ตอบคำถามผิด

แต่ถ้า $R = 0$ จะตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X จะได้ว่า ตอบคำถามถูก

จากนั้นให้ทำซ้ำ 1,000,000 ครั้ง แล้วหาค่าเฉลี่ยสำหรับความน่าจะเป็นในการตอบถูก ดังภาพที่ 5.2 คือ โปรแกรมที่ใช้ในการจำลองและความน่าจะเป็นในการตอบถูกที่ได้จากการจำลอง

5.2 ผลลัพธ์จากการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

ในหัวข้อนี้จะแสดงผลลัพธ์จากการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า โดยเราจะเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

5.2.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $N(0,1)$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$N(0,1)$	I_1	0.6231986548	0.622485
	I_2	0.5156318368	0.516070
	I_3	0.6230097676	0.623286
	I_4	0.6085501705	0.608207
	I_5	0.6004203340	0.600383
	D_1	0.6231986548	0.623647
	D_2	0.5156318368	0.515574
	D_3	0.6230097676	0.623670
	D_4	0.6085501705	0.608384
	D_5	0.6004203340	0.600572

ตารางที่ 5.1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกที่ได้จากการจำลอง
การใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$

5.2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{U(0,1)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$U(0,1)$	I_1	0.5420079139	0.542931
	I_2	0.5046253471	0.504906
	I_3	0.5397207708	0.539430
	I_4	0.5188334197	0.518889
	I_5	0.5083333333	0.508092
	D_1	0.5420079139	0.542903
	D_2	0.5046253471	0.504408
	D_3	0.5397207708	0.539145
	D_4	0.5188334197	0.519351
	D_5	0.5083333333	0.509005

ตารางที่ 5.2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกที่ได้จากการจำลอง
การใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $U(0,1)$

5.2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{Exp(1)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$Exp(1)$	I_1	0.5708012337	0.569844
	I_2	0.5137427533	0.513526
	I_3	0.5631549358	0.562837
	I_4	0.5373185161	0.537060
	I_5	0.5720497158	0.573064
	D_1	0.5708012337	0.571477
	D_2	0.5137427533	0.513311
	D_3	0.5631549358	0.563951
	D_4	0.5373185161	0.537866
	D_5	0.5720497158	0.571922

ตารางที่ 5.3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกที่ได้จากการจำลอง
การใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $Exp(1)$

5.2.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{B(10, 0.2)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$B(10,0.2)$	I_1	0.5785867606	0.576119
	I_2	0.5243907237	0.523228
	I_3	0.5719890913	0.570273
	I_4	0.5494785344	0.548659
	I_5	0.5924406337	0.591693
	D_1	0.5785867606	0.577173
	D_2	0.5243907237	0.523617
	D_3	0.5719890913	0.569971
	D_4	0.5494785344	0.548175
	D_5	0.5924406337	0.592298

ตารางที่ 5.4 ค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกที่ได้จากการจำลอง
การใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $B(10,0.2)$

5.2.5 การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $\boldsymbol{Poi(1)}$

การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์	ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า	ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจากการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า
$Poi(1)$	I_1	0.6184404029	0.619600
	I_2	0.5208786764	0.521206
	I_3	0.6127259920	0.613500
	I_4	0.5614768525	0.561883
	I_5	0.6059494361	0.604993
	D_1	0.6184404029	0.619411
	D_2	0.5208786764	0.520415
	D_3	0.6127259920	0.613879
	D_4	0.5614768525	0.561090
	D_5	0.6059494361	0.604322

ตารางที่ 5.5 ค่าประมาณความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกที่ได้จากการจำลอง
การใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $Poi(1)$

```
n = 1000000;
count = 0;
for i = 1:n
    XY = [normrnd(0,1) normrnd(0,1)];
    X = XY(binornd(1,0.5)+1);
    if X == XY(1)
        Y = XY(2);
    else
        Y = XY(1);
    end
    answer = binornd(1,I(X));
    if answer == logical(X > Y)
        count = count + 1;
    end
end
P=(count/n)

function m = I(s)
        m = atan(s)./pi + 0.5;
end
```

```
>> N01_I1

P =

   0.623832000000000

>>
fx >>
```

ภาพที่ 5.1 การจำลองโจทย์ปัญหาที่ใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ และฟังก์ชันที่ใช้ในการัดสินใจ $I_1(x)$

```
n = 1000000;
count = 0;
for i = 1:n
    XY = [binornd(10,0.2)];
    XY = [XY rec(XY(1),binornd(10,0.2))];
    X = XY(binornd(1,0.5)+1);
    if X == XY(1)
        Y = XY(2);
    else
        Y = XY(1);
    end
    answer = binornd(1,D(X));
    if answer == logical(X < Y)
        count = count + 1;
    end
end
P=(count/n)

function m = D(s)
        m = 0.5.*(1-(s./(1 + abs(s))));
end

function z = rec(s,t)
    if t == s
        z = rec(s,binornd(10,0.2));
    else
        z = t;
    end
end
```

```
>> B1002_D3

P =

   0.570821000000000

fx >>
```

ภาพที่ 5.2 การจำลองโจทย์ปัญหาที่ใช้การแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $B(10,0.2)$ และฟังก์ชันที่ใช้ในการัดสินใจ $I_3(x)$

5.3 บทวิเคราะห์

ในส่วนนี้เราจะศึกษา และเปรียบเทียบความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก จากกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์และฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ

5.3.1 กรณีที่ใช้ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจเดียวกันแต่มีพารามิเตอร์ต่างกัน

ตัวอย่างที่ 10 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $N(0,1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $I_1(x) = I(x+5) = \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(x+5)}{\pi}$

จะได้ว่า $X, Y \sim N(0,1)$ มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$

จากสมการที่ (4.3) และ (4.4) จะได้

$$E\left(I(\overline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a) f_{\overline{M}}(a)\,da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right) da$$

$$E\left(I(\underline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a) f_{\underline{M}}(a)\,da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right) da$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จะได้ $E\left(I(\overline{M})\right) \approx 0.9421632203$

และ $E\left(I(\underline{M})\right) \approx 0.9268526532$

จากสมการที่ (4.1) $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(I(\overline{M})\right) - E\left(I(\underline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0.9421632203 - 0.9268526532)$

≈ 0.5076552835

ตัวอย่างที่ 11 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์คือ $N(0,1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจคือ $I_1(x-5) = I(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(x-5)}{\pi}$

จะได้ว่า $X, Y \sim N(0,1)$ มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$

จากสมการที่ (4.3) และ (4.4) จะได้

$$E\left(I(\overline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a) f_{\overline{M}}(a)\,da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right)da$$

$$E\left(I(\underline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a)f_{\underline{M}}(a)\,da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right)da$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

จะได้ $E\left(I(\overline{M})\right) \approx 0.07314734674$

และ $E\left(I(\underline{M})\right) \approx 0.05783677968$

จากสมการที่ (4.1) $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(I(\overline{M})\right) - E\left(I(\underline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0.07314734674 - 0.05783677968)$

≈ 0.5076552835

ตัวอย่างที่ 12 ให้ X และ Y สุ่มมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $N(0,1)$ และมีฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ $I_1(x+20) \; = I(x) = \; \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(x+20)}{\pi}$

จะได้ว่า $X, Y \sim N(0,1)$ มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ และมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ $F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$

จากสมการที่ (4.3) และ (4.4) จะได้

$$E\left(I(\overline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a)f_{\overline{M}}(a)\,da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right)da$$

$$E\left(I(\underline{M})\right) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(a)f_{\underline{M}}(a)\,da$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{arctan\,(a)}{\pi}\right)\left(2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\right]\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\right)\right]\right)da$$

ประมาณค่าโดยใช้โปรแกรม Mathematica

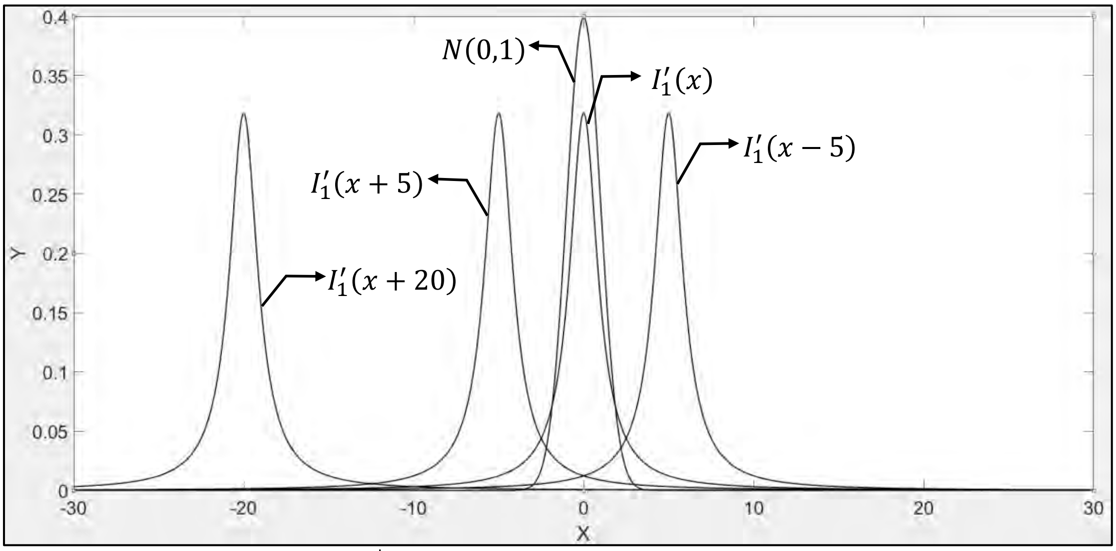
จะได้ $E\left(I(\overline{M})\right) \approx 0.9845085209$

และ $E\left(I(\underline{M})\right) \approx 0.9836071987$

จากสมการที่ (4.1) $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(E\left(I(\overline{M})\right) - E\left(I(\underline{M})\right)\right)$

จะได้ $P(B) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0.9845085209 - 0.9836071987)$

≈ 0.5004506611



ภาพที่ 5.3 กราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของ
$N(0,1), I_1'(x), I_1'(x-5), I_1'(x+5)$ และ $I_1'(x+20)$

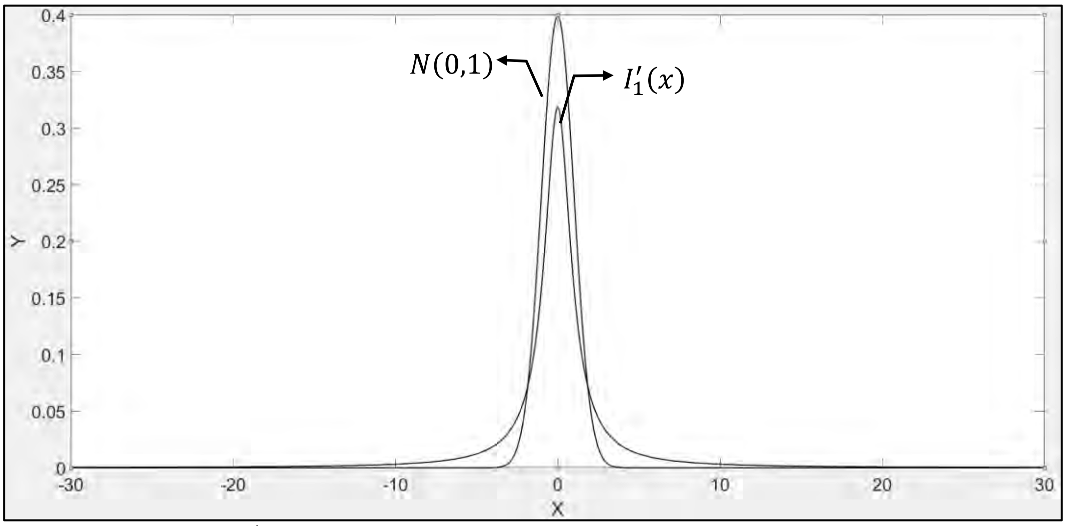
สังเกตว่าสำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ ถ้าเราเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจเป็น $I_1(x)$ จะได้ค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก (ตัวอย่างที่ 3) ที่มีค่ามากกว่าการเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจเป็น $I_1(x+5)$, $I_1(x-5)$ หรือ $I_1(x+20)$ (ตัวอย่างที่ 10, 11 และ 12 ตามลำดับ) จากภาพที่ 5.3 กราฟการแจกแจง $I_1'(x)$ มีตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ มากกว่ากราฟการแจกแจง $I_1'(x+5)$, $I_1'(x-5)$ และ $I_1'(x+20)$

และสังเกตต่อไปว่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก จากการเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ $I_1(x+5)$ และ $I_1(x-5)$ มีค่าเท่ากัน และจากภาพที่ 5.3 กราฟการแจกแจง $I_1'(x+5)$ และ $I_1'(x-5)$ มีตำแหน่งที่ห่างจากกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ เท่ากัน

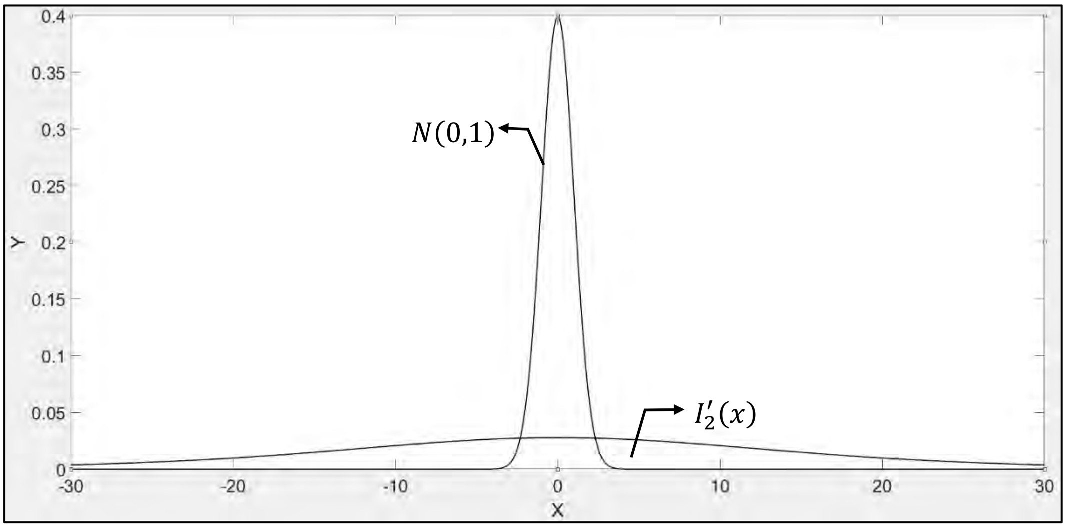
มากกว่านั้นความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก จากการเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ $I_1(x+5)$ มีค่ามากกว่าการเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ $I_1(x+20)$ และจากภาพที่ 5.3 กราฟการแจกแจง $I_1'(x+5)$ มีตำแหน่งที่ห่างจากกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ ใกล้กว่ากราฟการแจกแจง $I_1'(x+20)$

จากการสังเกตคาดว่ากราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่มีตำแหน่งที่ใกล้เคียงกับกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ จะให้ค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกมากกว่ากราฟการแจกแจงของฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่มีตำแหน่งที่ห่างจากกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์

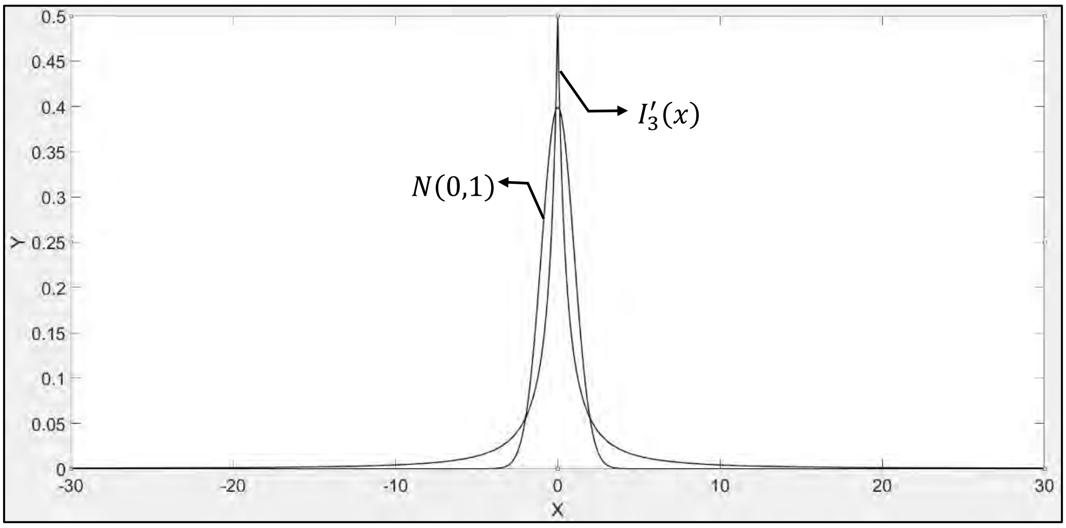
5.3.2 กรณีที่ใช้ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจต่างกัน



ภาพที่ 5.4 กราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $N(0,1)$ และ $I_1'(x)$



ภาพที่ 5.5 กราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $N(0,1)$ และ $I_2'(x)$



ภาพที่ 5.6 กราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $N(0,1)$ และ $I_3'(x)$

จากหัวข้อที่ 4.4.1 สังเกตว่าสำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ ถ้าเราเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ $I_1(x)$ หรือ $I_3(x)$ จะให้ค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกมากกว่าการเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ $I_2(x)$ และจากภาพที่ 5.4, 5.5 และ 5.6 กราฟการแจกแจง $I_1'(x)$ และ $I_3'(x)$ มีลักษณะของกราฟที่ใกล้เคียงกับกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ $N(0,1)$ มากกว่ากราฟการแจกแจง $I_2'(x)$

จากการสังเกตคาดว่ากราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่มีลักษณะใกล้เคียงกับกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ จะให้ค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกมากกว่ากราฟการแจกแจงของฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่มีลักษณะแตกต่างจากกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์

บทที่ 6
ข้อสรุปและข้อเสนอแนะ

โครงงานนี้ได้แสดงกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าสำหรับการแก้โจทย์ปัญหา พร้อมได้กำหนดฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจและการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ แล้วทำการคำนวณตามกลยุทธ์ที่ที่มีความทั่วไปมากกว่า จากนั้นทำการจำลองการใช้กลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าเพื่อสนับสนุนว่าความน่าจะเป็นที่ได้จากการคำนวณสามารถทำได้จริงตามที่ต้องการ

เมื่อเราเลือกฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจให้เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้หรือลดโดยแท้แล้ว จะเห็นว่าความน่าจะเป็นที่ได้จากการคำนวณและการจำลองมีค่าที่ใกล้เคียงกัน จึงสนับสนุนว่ากลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่านี้ สามารถให้คำตอบสำหรับโจทย์ปัญหาดังกล่าวได้ถูกต้องด้วยความน่าจะเป็นมากกว่า 0.5 ได้ แต่ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกจะมากกว่า 0.5 มากหรือน้อยเพียงใดนั้นขึ้นอยู่กับฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจ เนื่องจากว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์นั้นสามารถเป็นการแจกแจงใดก็ได้ แต่สุดท้ายเมื่อเราทำตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่าแล้ว เราจะได้ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกมากกว่า 0.5 เสมอ

จากการสังเกตเราคาดว่าฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่ให้ค่าความน่าจะเป็นในการตอบถูกที่มากที่สุด คือ ฟังก์ชันที่มีลักษณะและตำแหน่งของกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจเหมือนกันหรือคล้ายกันกับกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ แต่เกณฑ์ในการบอกว่ากราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นของฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินเหมือนกันหรือคล้ายกันกับกราฟการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์มากหรือน้อยนั้นยังคงต้องถูกทำการศึกษาเพิ่มเติมต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Bill, T. (1960). *How is it that you can guess if one of a pair of random numbers is larger with probability > 1/2?*. Retrieved August 15, 2019, from https://mathoverflow.net/questions/9037/how-is-it-that-you-can-guess-if-one-of-a-pair-of-random-numbers-is-larger-with.

[2] Mutalik, P. (2015). *Solution: 'Information From Randomness?'*. Retrieved November 4, 2019, from https://www.quantamagazine.org/solution-information-from-randomness-20150722/.

[3] Randall. (2010). *Math Puzzle.* Retrieved October 28, 2019, from https://blog.xkcd.com/2010/02/09/math-puzzle/comment-page-1/.

[4] Ross, S. 2010. *A first course in probability*. 8th ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

[5] Weisstein, Eric W. *Normal Distribution.* Retrieved March 25, 2020, from http://mathworld.wolfram.com/NormalDistribution.html

[6] Weisstein, Eric W. *Erf*. Retrieved March 25, 2020, from http://mathworld.wolfram.com/Erf.html

ภาคผนวก ก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal
ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน(ภาษาไทย)	ปัญหาความน่าจะเป็นที่ขัดกับความรู้สึก
ชื่อโครงงาน(ภาษาอังกฤษ)	A counter-intuitive probability puzzle
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ
ผู้ดำเนินการ	นายพีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์ เลขประจำตัวนิสิต 5933537423 สาขา คณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

มีโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวกับความน่าจะเป็นที่น่าสนใจบนเว็บไซต์หนึ่ง [1] ซึ่งผู้ที่เห็นโจทย์นี้ครั้งแรกมักจะรู้สึกว่าไม่สามารถทำได้ โจทย์นี้มีอยู่ว่า ในรายการเกมโชว์รายการหนึ่ง พิธีกรจะสุ่มเลือกตัวเลข 2 ตัวที่ไม่เท่ากัน แล้วซ่อนไว้หลังประตูสองบาน จากนั้นพิธีกรจะให้ผู้เล่นสามารถเปิดประตู 1 บาน เพื่อดูตัวเลขหลังประตูบานนั้น ต่อมาพิธีกรจะให้ผู้เล่นตอบคำถามว่า ตัวเลขหลังประตูอีกบานหนึ่งมีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่าตัวเลขที่เห็นนี้ สิ่งที่น่าสนใจและขัดต่อความรู้สึกของคนทั่วไปคือมีกลยุทธ์ที่จะทำให้ผู้เล่นตอบคำถามนี้ถูกต้องด้วยความน่าเป็นที่มากกว่า 0.5

มีการให้คำตอบของกลยุทธ์ดังกล่าวบนเว็บไซต์ เช่น [1], [2] และ [3] เป็นต้น ซึ่งสอดคล้องกัน โดยสมมติให้ X เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และ Y เป็นตัวเลขที่ซ่อนอยู่หลังประตูอีกบาน กลยุทธ์ที่ว่าคือ ไม่ว่าจะก่อนหรือหลังที่เราเห็นค่าของ X ให้ทำการสุ่มตัวเลข K จากการแจกแจงแบบต่อเนื่องที่ซัพพอร์ตของฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นคือ $\mathbb{R}$ เช่น

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2} \quad , x \in \mathbb{R}$$

เมื่อ μ เป็นค่าเฉลี่ยและ σ เป็นค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มนี้ จากนั้นให้พิจารณาค่าของ X ถ้า $K < X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X แต่ถ้า $K > X$ ให้ผู้เล่นตอบว่า Y มีค่ามากกว่า K

นอกจากนี้ยังมีคำตอบที่มีความทั่วไปมากกว่า ให้ X เป็นตัวเลขหลังประตูบานที่เปิดดู และ Y เป็นตัวเลขที่ซ่อนอยู่หลังประตูอีกบาน เราจะกำหนดฟังก์ชันหนึ่งขึ้นมาเพื่อใช้ประกอบในการตัดสินใจ โดยเมื่อเราเห็นค่าของ X แล้ว เราจะนำฟังก์ชันดังกล่าวมาคำนวณค่า ณ จุด X แล้วตัดสินใจว่าจะตอบอย่างไร เช่น ให้ $f(X)$ แทนความน่าจะเป็นที่จะตอบว่า Y มีค่าน้อยกว่า X เราสามารถแสดง

ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ เนื่องจากในความเป็นจริงเราไม่รู้ว่า X มีค่าที่เป็นไปได้อะไรบ้าง เราจึงต้องให้โดเมนของ f เป็น $\mathbb{R}$ ดังนั้นฟังก์ชัน f ที่แทนความน่าจะเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานมีค่าน้อยกว่าตัวเลขเห็นที่ช่วยในการตัดสินใจนี้ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่เพิ่มโดยแท้จาก $\mathbb{R}$ ไป $[0,1]$

ในโครงงานนี้เราจะศึกษาผลลัพธ์จากการเปลี่ยนฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจและการแจกแจงที่ใช้ในการสุ่มตัวเลขสองตัว โดยเราจะหาค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกตามทฤษฎี เมื่อกำหนดการแจกแจงที่ใช้ในการสุ่มตัวเลขสองตัวและฟังก์ชันความน่าเป็นที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานมีค่ามากกว่า (หรือน้อยกว่า) ตัวเลขที่เห็น นอกจากนี้เรายังทำการจำลองโดยใช้กระบวนการ Monte Carlo เพื่อสนับสนุนผลลัพธ์ทางทฤษฎีด้วย

วัตถุประสงค์

ศึกษาผลลัพธ์จากการเปลี่ยนฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจและการแจกแจงที่ใช้ในการสุ่มตัวเลขสองตัว

ขอบเขตของโครงงาน

1. การแจกแจงสำหรับการสุ่มตัวเลขสองตัวที่ใช้ในโครงงานนี้ ได้แก่ การแจกแจงแบบปกติ, การแจกแจงแบบเอกรูป(ต่อเนื่อง), การแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล, การแจกแจงแบบทวินามและการแจกแจงแบบปัวซง
2. ฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่จะตอบว่าตัวเลขหลังประตูอีกบานมีค่ามากกว่า(หรือน้อยกว่า) ตัวเลขที่เห็น ได้แก่

$$I_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{arctan\,(x)}{\pi} \qquad D_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{arctan\,(x)}{\pi}$$

$$I_2(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{9}}} \qquad D_2(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-\frac{x}{9}}}$$

$$I_3(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{1 + |x|}\right) \qquad D_3(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{1 + |x|}\right)$$

$$I_4(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{5}{2} - x} & ; x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x + \frac{5}{2}} & ; x \geq 0 \end{cases} \qquad D_4(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x - \frac{5}{2}} & ; x < 0 \\ \dfrac{1}{x + \frac{5}{2}} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$I_5(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{2e} & ; x < -1 \\ \dfrac{x+5}{10} & ; -1 \le x < 0 \\ \dfrac{x+11}{20} & ; 0 \le x < 1 \\ 1-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{2e} & ; x \ge 1 \end{cases} \qquad D_5(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{2e} & ; x < -1 \\ \dfrac{5-x}{10} & ; -1 \le x < 0 \\ \dfrac{9-x}{20} & ; 0 \le x < 1 \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{2e} & ; x \ge 1 \end{cases}$$

วิธีการดำเนินงาน

1. ศึกษาปัญหาสืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. กำหนดการแจกแจงสำหรับการสุ่มตัวเลขสองตัวและฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่จะตอบว่าตัวหลังประตูอีกบานมีค่ามากกว่า(หรือน้อยกว่า)ตัวเลขหลังประตูบานที่เห็น
3. ทำการจำลองโดยใช้กระบวนการ Monte Carlo
4. หาค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกตามทฤษฎี
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2562 - เมษายน 2563								
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาปัญหาสืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา									
2. กำหนดการแจกแจงสำหรับการสุ่มตัวเลขสองตัวและฟังก์ชันที่ใช้ในการตัดสินใจที่จะตอบว่าตัวหลังประตูอีกบานมีค่ามากกว่า(หรือน้อยกว่า)ตัวเลขหลังประตูบานที่เห็น									
3. ทำการจำลองโดยใช้กระบวนการ Monte Carlo									
4. หาค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกตามทฤษฎี									
5. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้เห็นกลยุทธ์ที่ใช้ในการตอบคำถามดังกล่าวที่ทำให้ความน่าจะเป็นที่จะตอบถูกมีค่ามากกว่า 0.5 พร้องทั้งตัวอย่างประกอบทั้งในแง่ของการคำนวณความน่าจะเป็นทางทฤษฎีและการจำลองการประมาณค่าความน่าจะเป็น

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. คอมพิวเตอร์
2. กระดาษ A4
3. MATLAB, Microsoft Word
4. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล

งบประมาณ

1.	กระดาษ A4	1,000	บาท
2.	ค่าถ่ายเอกสาร	1,000	บาท
3.	อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล	1,500	บาท
4.	หมึกพิมพ์	1,500	บาท

เอกสารอ้างอิง

[1] Bill, T. (1960). *How is it that you can guess if one of a pair of random numbers is larger with probability > 1/2?*. Retrieved August 15, 2019, from https://mathoverflow.net/questions/9037/how-is-it-that-you-can-guess-if-one-of-a-pair-of-random-numbers-is-larger-with.

[2] Mutalik, P. (2015). *Solution: 'Information From Randomness?'*. Retrieved November 4, 2019, from https://www.quantamagazine.org/solution-information-from-randomness-20150722/.

[3] Randall. (2010). *Math Puzzle.* Retrieved October 28, 2019, from https://blog.xkcd.com/2010/02/09/math-puzzle/comment-page-1/.

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างโปรแกรมการคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

การคำนวณตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า เราจะใช้โปรแกรม Mathematica ในการประมาณค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก

1. ตัวอย่างโปรแกรมที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $N(0,1)$

```
In[1]:= "N(0,1)...I1";
ClearAll["Global'*"]
FI[x_] := 1/2 + (ArcTan[x]/Pi)
FM[x_] := 2*((E^((-1/2)(x^2)))/(Sqrt[2 Pi]))((1/2)(1+Erf[x/Sqrt[2]]))
Fm[x_] := 2*((E^((-1/2)(x^2)))/(Sqrt[2 Pi]))(1-((1/2)(1+Erf[x/Sqrt[2]])))
EM = NIntegrate[FI[x] FM[x], {x, -Infinity, Infinity}];
Em = NIntegrate[FI[x] Fm[x], {x, -Infinity, Infinity}];
EB = 1/2 + (EM-Em)/2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[9]//MatrixForm=
 EM = 0.6231986548
 Em = 0.3768013452
 EB = 0.6231986548
```

```
In[103]:= "N(0,1)...D5";
ClearAll["Global'*"]
FD1[x_] := 1-((E^(-1/x))-1)/(2 E)
FD2[x_] := (5-x)/(10)
FD3[x_] := (9-x)/(20)
FD4[x_] := ((E^(1/x))-1)/(2 E)
FM[x_] := 2*((E^((-1/2)(x^2)))/(Sqrt[2 Pi]))((1/2)(1+Erf[x/Sqrt[2]]))
Fm[x_] := 2*((E^((-1/2)(x^2)))/(Sqrt[2 Pi]))(1-((1/2)(1+Erf[x/Sqrt[2]])))
EM1 = NIntegrate[FD1[x] FM[x], {x, -Infinity, -1}];
EM2 = NIntegrate[FD2[x] FM[x], {x, -1, 0}];
EM3 = NIntegrate[FD3[x] FM[x], {x, 0, 1}];
EM4 = NIntegrate[FD4[x] FM[x], {x, 1, Infinity}];
EM = EM1+EM2+EM3+EM4;
Em1 = NIntegrate[FD1[x] Fm[x], {x, -Infinity, -1}];
Em2 = NIntegrate[FD2[x] Fm[x], {x, -1, 0}];
Em3 = NIntegrate[FD3[x] Fm[x], {x, 0, 1}];
Em4 = NIntegrate[FD4[x] Fm[x], {x, 1, Infinity}];
Em = Em1+Em2+Em3+Em4;
EB = 1/2 + (Em-EM)/2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[122]//MatrixForm=
 EM = 0.3903610065
 Em = 0.5912016745
 EB =  0.600420334
```

2. ตัวอย่างโปรแกรมที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $U(0,1)$

```
In[10]:= "U(0,1)...I2";
ClearAll["Global'*"]
FI[x_] := 1 - (1 / (1 + (E ^ (x / 9))))
FM[x_] := 2 x
Fm[x_] := 2 (1 - x)
EM = NIntegrate[FI[x] FM[x], {x, 0, 1}];
Em = NIntegrate[FI[x] Fm[x], {x, 0, 1}];
EB = 1 / 2 + (EM - Em) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[18]//MatrixForm=
 EM = 0.5185070974
 Em = 0.5092564031
 EB = 0.5046253471
```

```
In[73]:= "U(0,1)...D4";
ClearAll["Global'*"]
FD[x_] := 1 / (2.5 + x)
FM[x_] := 2 x
Fm[x_] := 2 (1 - x)
EM = NIntegrate[FD[x] FM[x], {x, 0, 1}];
Em = NIntegrate[FD[x] Fm[x], {x, 0, 1}];
EB = 1 / 2 + (Em - EM) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[81]//MatrixForm=
 EM = 0.3176388169
 Em = 0.3553056563
 EB = 0.5188334197
```

3. ตัวอย่างโปรแกรมที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $Exp(1)$

```
In[19]:= "Exp(1)...I3";
ClearAll["Global'*"]
FI[x_] := (1 + (x / (1 + Abs[x]))) / 2
FM[x_] := 2 * (E ^ (-x)) * (1 - (E ^ (-x)))
Fm[x_] := 2 * (E ^ (-2 x))
EM = NIntegrate[FI[x] FM[x], {x, 0, Infinity}];
Em = NIntegrate[FI[x] Fm[x], {x, 0, Infinity}];
EB = 1 / 2 + (EM - Em) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[27]//MatrixForm=
 EM = 0.7649812547
 Em = 0.6386713831
 EB = 0.5631549358
```

```
In[69]:= "Exp(1)...D3";
ClearAll["Global'*"]
FD[x_] := (1 - (x / (1 + Abs[x]))) / 2
FM[x_] := 2 * (E ^ (-x)) * (1 - (E ^ (-x)))
Fm[x_] := 2 * (E ^ (-2 x))
EM = NIntegrate[FD[x] FM[x], {x, 0, Infinity}];
Em = NIntegrate[FD[x] Fm[x], {x, 0, Infinity}];
EB = 1 / 2 + (Em - EM) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[77]//MatrixForm=
 EM = 0.2350187454
 Em = 0.3613286169
 EB = 0.5631549357
```

4. ตัวอย่างโปรแกรมที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $B(10,0.2)$

```
In[34]:= "B(10,0.2)...I4";
ClearAll["Global'*"]
n = 10;
p = 0.2;
S = 1 - Sum[ PDF[BinomialDistribution[n, p], x] * PDF[BinomialDistribution[n, p], x], {x, 0, n}];
FI2[x_] := 1 - (1 / (2.5 + x))
f[x_, y_] := ( PDF[BinomialDistribution[n, p], x] * PDF[BinomialDistribution[n, p], y]) / (S)
EM = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FI2[x], {x, 0, n}, {y, 0, x - 1}];
Em = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FI2[x], {x, 0, n}, {y, x + 1, n}];
EB = 1 / 2 + (EM - Em) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[44]//MatrixForm=
 EM = 0.8085012652
 Em = 0.7095441963
 EB = 0.5494785344
```

```
In[73]:= "B(10,0.2)...D2";
ClearAll["Global'*"]
n = 10;
p = 0.2;
S = 1 - Sum[ PDF[BinomialDistribution[n, p], x] * PDF[BinomialDistribution[n, p], x], {x, 0, n}];
FD[x_] := 1 - (1 / (1 + (E ^ (-x / 9))))
f[x_, y_] := ( PDF[BinomialDistribution[n, p], x] * PDF[BinomialDistribution[n, p], y]) / (S)
EM = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FD[x], {x, 0, n}, {y, 0, x - 1}];
Em = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FD[x], {x, 0, n}, {y, x + 1, n}];
EB = 1 / 2 + (Em - EM) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[83]//MatrixForm=
 EM = 0.4193150109
 Em = 0.4680964582
 EB = 0.5243907237
```

5. ตัวอย่างโปรแกรมที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ใช้ในการสุ่มโจทย์ คือ $Poi(1)$

```
In[41]:= "Poi(1)...I5";
ClearAll["Global`*"]
lamda = 1;
S =
  1 - Sum[ PDF[PoissonDistribution[lamda], x] * PDF[PoissonDistribution[lamda], x], {x, 0, Infinity}];
FI3[x_] := (x + 11) / (20)
FI4[x_] := 1 - (((E^(1 / x)) - 1) / (2 E))
f[x_, y_] := ( PDF[PoissonDistribution[lamda], x] * PDF[PoissonDistribution[lamda], y]) / (S)
EM3 = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FI3[x], {x, 0, 0}, {y, 0, x - 1}];
EM4 = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FI4[x], {x, 1, Infinity}, {y, 0, x - 1}];
EM = EM3 + EM4;
Em3 = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FI3[x], {x, 0, 0}, {y, x + 1, Infinity}];
Em4 = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FI4[x], {x, 1, Infinity}, {y, x + 1, Infinity}];
Em = Em3 + Em4;
EB = 1 / 2 + (EM - Em) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[55]//MatrixForm=
EM =  0.815020708
Em =  0.6031218358
EB =  0.6059494361
```

```
In[56]:= "Poi(1)...D1";
ClearAll["Global`*"]
lamda = 1;
S =
  1 - Sum[ PDF[PoissonDistribution[lamda], x] * PDF[PoissonDistribution[lamda], x], {x, 0, Infinity}];
FD[x_] := 1 / 2 - (ArcTan[x] / Pi)
f[x_, y_] := ( PDF[PoissonDistribution[lamda], x] * PDF[PoissonDistribution[lamda], y]) / (S)
EM = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FD[x], {x, 0, Infinity}, {y, 0, x - 1}];
Em = NSum[(f[x, y] + f[y, x]) * FD[x], {x, 0, Infinity}, {y, x + 1, Infinity}];
EB = 1 / 2 + (Em - EM) / 2;
MatrixForm[
 {{"EM =", DecimalForm[EM, 10]}, {"Em =", DecimalForm[Em, 10]}, {"EB =", DecimalForm[EB, 10]}}]
Out[65]//MatrixForm=
EM = 0.1763647338
Em = 0.4132455397
EB = 0.6184404029
```

ตัวอย่างโปรแกรมการจำลองตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า

การจำลองตามกลยุทธ์ที่มีความทั่วไปมากกว่า เราจะใช้โปรแกรม MATLAB ในการประมาณค่าความน่าจะเป็นที่จะตอบถูก

```
q = ["I(1)/D(2)" "key" "dist I" "dist II" "percent"];
dist = ["norm" "unif" "exp" "bino" "poiss"];

n = 1000000;

for g = 1:2            %choose increasing or discount function
for f = 1:1:5          %choose key of probability
for a = 1:1:5          %distI  1-norm  2-unif  3-exp  4-bino  5-poiss  6-int
for b = a          %distII 1-norm  2-unif  3-exp  4-bino  5-poiss  6-int
    count = 0;
    %F(s) is probability of answer which another one number is less than s
    if g == 1   %increasinf function
        for i = 1:n
            XY = [R(a)];
            XY = [XY rec(XY(1),R(b),b)];

            %random open l or r
            X = XY(binornd(1,0.5)+1);
            if X == XY(1)
                Y = XY(2);
            else
                Y = XY(1);
            end

            answer = binornd(1,I(X,f));
            if answer == logical(X > Y)
                count = count + 1;
            end
        end
    %-----------------------------------------------------------------------
    %F(s) is probability of answer which another one number is more than s
    elseif g == 2   %discount function
        for i = 1:n
            XY = [R(a)];
            XY = [XY rec(XY(1),R(b),b)];

            %random open l or r
            X = XY(binornd(1,0.5)+1);
            if X == XY(1)
                Y = XY(2);
            else
                Y = XY(1);
            end

            answer = binornd(1,D(X,f));
            if answer == logical(X < Y)
                count = count + 1;
            end
        end
    end
q = [q;g f dist(a) dist(b) (count/n)*100];
end
end
end
end
%---------------------------------------------------------------------------
```

```
    %---------------------functions are used in program------------------------
function m = I(s,t)      %key increase
    if t == 1
        m = atan(s)./pi + 0.5;
    %...................................................................
    elseif t == 2
        m = 1-(1./(1 + exp(s./9)));
    %...................................................................
    elseif t == 3
        m = 0.5.*(1+(s./(1 + abs(s))));
    %...................................................................
    elseif t == 4
        if s >= 0
            m = 1 - (1./(2.5 + s));
        else
            m = 1./(2.5 - s);
        end
    %...................................................................
    elseif t == 5
        if s < -1
            m = (exp(1./-s)-1)./(2.*exp(1));
        elseif -1 <= s && s < 0
            m = (s + 5)./10;
        elseif 0 <= s && s < 1
            m = (s + 11)./20;
        elseif s >= 1
            m = 1 - ((exp(1./s) - 1)./(2.*exp(1)));
        end
    %...................................................................
    end
end
function m = D(s,t)      %key discount
    if t == 1
        m = 0.5 - atan(s)./pi;
    %...................................................................
    elseif t == 2
        m = 1-(1./(1 + exp(-s./9)));
    %...................................................................
    elseif t == 3
        m = 0.5.*(1-(s./(1 + abs(s))));
    %...................................................................
    elseif t == 4
        if s >= 0
            m = 1./(s + 2.5);
        else
            m = 1 + (1./(s - 2.5));
        end
    %...................................................................
    elseif t == 5
        if s < -1
            m = 1 - ((exp(1./-s) - 1)./(2.*exp(1)));
        elseif -1 <= s && s < 0
            m = (5 - s)./10;
        elseif 0 <= s && s < 1
            m = (9 - s)./20;
        elseif s >= 1
            m = (exp(1./s)-1)./(2.*exp(1));
        end
    %...................................................................
    end
end
```

```
function z = R(r)         %distribution
    if r == 1          % 1-norm
        mu = 0;
        sigma = 1;
        z = normrnd(mu,sigma);
    %::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
    elseif r == 2     % 2-unif
        low = 0;
        up = 1;
        z = unifrnd(low,up);
    %::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
    elseif r == 3     % 3-exp
        e = 1;
        z = exprnd(e);
    %::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
    elseif r == 4     % 4-bino
        k = 10;
        p = 1/5;
        z = binornd(k,p);
    %::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
    elseif r == 5     % 5-poiss
        lambda = 1;
        z = poissrnd(lambda);
    %::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
    elseif r == 6
        x = 1;
        z = randi([-x,x]);
    end
end
function z = rec(s,t,u) %Recursive for X!=Y
    if t == s
        z = rec(s,R(u),u);
    else
        z = t;
    end
end
```

ประวัติผู้เขียน

นายพีรวิชญ์ เหลืองสิริทรัพย์

รหัสประจำตัวนิสิต 5933537423

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย