การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าสำหรับปัญหาการจับคู่ด้วยการแจกแจงปัวซง

นางสาวธนัชชา บุญญะ

โครงงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปีการศึกษา 2562

An improvement bound of approximation for matching problem by Poisson distribution

Thanutcha Bunya

A Project Summited in Partial Fulfillment of Requirments
for the Degree of Bachelor of Science Program in Mathematics
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Science, Chulalongkorn University
Academic Year 2019

หัวข้อโครงงาน การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าสำหรับปัญหาการจับคู่ด้วยการแจกแจงปัวซง

โดย นางสาวธนัชชา บุญญะ

สาขาวิชา คณิตศาสตร์

อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อนุมัติให้นับโครงงานฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาบัณฑิต ในรายวิชา 2301499 โครงงานวิทยาศาสตร์ (Senior Project)

. . . . หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

คณะกรรมการสอบโครงงาน

. . . . อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานหลัก

(ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี)

. . . . กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี)

เรวัต ถนัดกิจหิรัญ . . . . กรรมการ

(อาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ)

ธนัชชา บุญญะ : การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าสำหรับปัญหาการจับคู่ด้วยการแจกแจงปัวซง (An improvement bound of approximation for matching problem by Poisson distribution)
อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน : ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี, 42 หน้า.

ปัญหาการจับคู่คือ ปัญหาการวางสิ่งของ n สิ่ง ให้ตรงตำแหน่ง ให้ W_n แทนตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่ง เป็นที่ทราบกันดีว่าสำหรับ $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ เราสามารถประมาณค่า $P(W_n \in A)$ ด้วย $P(P_1 \in A)$ โดยที่ P_1 คือตัวแปรสุ่มปัวซงพารามิเตอร์ 1 ซึ่งมีงานวิจัยหลายงานที่หาขอบเขตการประมาณค่าดังกล่าว ในโครงงานนี้ เราปรับปรุงขอบเขตของการประมาณค่าดังกล่าวโดยการใช้วิธีของสไตน์และเชน ผลลัพธ์ที่ได้คือ $|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \dfrac{2}{w_A n}$ โดยที่ $w_A = \max\{w_0, w_1\}$ เมื่อกำหนดให้ $w_0 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \notin A\}$ และ $w_1 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \in A\}$ ผลลัพธ์นี้ดีกว่าขอบเขตที่เคยทำมาในอดีตในหลาย ๆ กรณี

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ลายมือชื่อนิสิต ธนัชชา

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ อาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน ....

ปีการศึกษา 2562

5933511023 : MAJOR MATHEMATICS

KEYWORD : Matching problem, Poisson distribution, Stein-Chen method

THANUTCHA BUNYA : An improvement bound of approximation for matching problem by Poisson distribution

ADVISOR : PROF. Kritsana Neammanee, Ph.D., 42 PP.

Matching problem is the problem that needs to place n objects in the correct position. Let W_n be a random variable representing the number of objects that are in their correct position. It is well-known that for $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$, we can approximate $P(W_n \in A)$ by $P(P_1 \in A)$ where P_1 is a Poisson random variable with parameter 1. There are several researches that calculated bounds on the approximation. In this project, we improve the bound of the approximation by using Stein-Chen method. The result is $|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \frac{2}{w_A n}$, where $w_A = \max\{w_0, w_1\}$, $w_0 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \notin A\}$ and $w_1 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \in A\}$. This result is better than previous bounds in several cases.

Department Mathematics and Computer Science . . Student'Signature ธนัชชา . . . .

Field of Study Mathematics . . Advisor's Signature K. Neammanee . . .

Academic Year 2019

กิตติกรรมประกาศ

โครงงานเรื่อง การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าสำหรับปัญหาการจับคู่ด้วยการแจกแจงปัวซง ได้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เพราะได้รับความช่วยเหลือจากผู้มีพระคุณหลาย ๆ ท่านด้วยกัน ทางผู้ดำเนินงานโครงงานจึงขอขอบคุณในความช่วยเหลือต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี ที่กรุณารับเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงาน และคอยให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ชี้แนะให้เห็นปัญหาและข้อผิดพลาดต่าง ๆ ในการทำโครงงานตลอดมา ตั้งแต่เริ่มต้นทำงานจนโครงงานนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีอย่างสมบูรณ์และมีประสิทธิภาพ

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี และอาจารย์ ดร.เรวัต ถนัดกิจหิรัญ ที่ให้ความกรุณาเป็นกรรมการสอบโครงงาน และได้ให้ข้อเสนอแนะ ข้อคิด รวมถึงข้อผิดพลาดต่าง ๆ ซึ่งทำให้โครงงานนี้สมบูรณ์และมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

นอกจากนี้ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านและรุ่นพี่ทุกคนที่ได้ให้ความรู้และคำแนะนำ ตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาที่จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย และตลอดระยะเวลาที่ได้ทำโครงงานนี้มา

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และครอบครัวที่คอยสนับสนุน และขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคนที่คอยให้กำลังใจ ให้คำปรึกษาและข้อเสนอแนะต่าง ๆ ในการทำโครงงานครั้งนี้

ผู้จัดทำ

ธนัชชา บุญญะ

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

เมื่อปี ค.ศ. 1708 Pierre de Montmort [8] ได้เข้าร่วมงานปาร์ตี้แห่งหนึ่ง ก่อนเข้างานทุกคนต้องถอดหมวกไว้ที่หน้างานแล้วมารับคืนหลังงานเลิก เมื่องานเลิกก่อนที่เขาจะไปเอาหมวกคืน เขาได้นึกคิดว่า ถ้าเขาสุ่มหยิบหมวกเหล่านั้นที่เขาได้ฝากไว้ก่อนเข้างาน โอกาสที่เขาจะได้หมวกของตัวเองเป็นเท่าไร หลังจากนั้นเขาจึงได้เริ่มศึกษาปัญหานี้ ซึ่งได้เรียกปัญหาที่มีสถาณการณ์แบบนี้ว่า ปัญหาการจับคู่ (matching problem) สำหรับปัญหาการจับคู่ เราพิจารณาสิ่งของ n สิ่งที่มีหมายเลข $1, 2, \ldots, n$ กำกับ และมีตำแหน่งการวางอยู่ n ตำแหน่ง เรียก ตำแหน่งที่ 1, ตำแหน่งที่ $2, \ldots,$ ตำแหน่งที่ n โดยแต่ละตำแหน่งสามารถวางสิ่งของได้ตำแหน่งละ 1 สิ่ง ปัญหาที่เราสนใจคือ ความน่าจะเป็นของจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่ง จากสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งปัญหาการจับคู่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง เช่น การจับคู่หาตัวยาที่มีประสิทธิภาพในการรักษา การจัดคนงาน
สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ กำหนดให้

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ถ้าสิ่งของชิ้นที่ } i \text{ วางตรงตำแหน่งที่ } i \\ 0, & \text{ถ้าสิ่งของชิ้นที่ } i \text{ วางไม่ตรงตำแหน่งที่ } i \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

กำหนดให้ W_n คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่ง นั่นคือ $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ สังเกตได้ว่า ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ไม่อิสระต่อกัน

ในปี ค.ศ. 1992 บาร์เบอร์, ฮอลล์และเจนสัน [4] ได้ให้ขอบเขตการประมาณค่าการแจกแจงของ W_n ด้วยการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ 1 โดยที่ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \frac{2(1-e^{-1})}{n} \qquad \text{สำหรับทุก } A \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n\} \tag{1.1}$$

เมื่อ P_1 คือตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีพารามิเตอร์ 1 นั่นคือ $P(P_1 = k) = \dfrac{e^{-1}}{k!}$ สำหรับ $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 คณินทร์และกฤษณะ [11] พิจารณา $A = \{0, 1, 2, \ldots, w\}$ โดยที่ $w \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ โดยได้หาขอบเขตการประมาณค่าของ W_n ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง

พารามิเตอร์ 1 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|P(W_n \leq w) - P(P_1 \leq w)| \leq \Delta(n,w) \tag{1.2}$$

เมื่อ

$$\Delta(n,w) = \begin{cases} \dfrac{2}{en}, & w = 0 \\ \\ \dfrac{2(1-2e^{-1})}{n}, & w = 1 \\ \\ \dfrac{2.08}{(w+1)n}, & w \geq 2 \end{cases}$$

ในปี ค.ศ. 2007 ทิพวัลย์และคณินทร์ [8] พิจารณา $A \subseteq \{0,1,2,\ldots,n\}$ โดยได้หาขอบเขตการประมาณค่าของ W_n ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ 1 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & M_A \leq 1 \\ \\ \dfrac{2e}{(M_A+1)n}, & M_A \geq 2 \end{cases} \tag{1.3}$$

โดยที่

$$M_A = \begin{cases} \max\{w \in \{0,1,\ldots,n\} | C_w \subseteq A\} & \text{เมื่อ } 0 \in A \\ \min\{w \in \{0,1,\ldots,n\} | w \in A\} & \text{เมื่อ } 0 \notin A \end{cases}$$

เมื่อ $C_w = \{0,1,\ldots,w\}$

ในปี ค.ศ. 2018 พิจิตรและกฤษณะ [3] พิจารณา $A = \{w\}$ โดยที่ $w \in \{0,1,\ldots,n\}$ โดยได้หาขอบเขตการประมาณค่าของ W_n ด้วยการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ 1 ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|P(W_n = w) - P(P_1 = w)| \leq \frac{2}{n}\delta_w \tag{1.4}$$

โดยที่

$$\delta_w = \begin{cases} 0.368, & w = 0 \\ \\ 0.633, & w = 1 \\ \\ \dfrac{0.482}{(w+1)!} + \dfrac{1}{w} & , w \geq 2 \end{cases}$$

จากงานวิจัยข้างต้น จะเห็นว่าขอบเขตการประมาณค่าของคณินทร์และกฤษณะ ([11]) กับของพิจิตรและกฤษณะ ([3]) มีค่าน้อยกว่าค่าของบาร์เบอร์ ฮอลล์และเจนสัน ([4]) เมื่อกำหนด $A = \{0, 1, 2, \ldots, w\}$ และ $A = \{w\}$ ตามลำดับ งานวิจัยที่ได้กล่าวมานี้ได้ใช้วิธีของสไตน์และเชน (Stein-Chen's method) ในการหาขอบเขตการประมาณค่า

ในปี ค.ศ. 1972 สไตน์ [9] ได้เสนอการหาขอบเขตการประมาณค่าด้วยการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ ต่อมาในปี ค.ศ.1975 เชน [5] นำแนวคิดของสไตน์มาประยุกต์กับการประมาณค่าด้วยการแจกแจงปัวซง

สำหรับ $h, g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและ $\lambda > 0$ กำหนดให้

$$P_\lambda(h) = E(h(P_\lambda)) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l) \frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}$$

เราจะเรียกสมการผลต่าง

$$\lambda g(w+1) - wg(w) = h(w) - P_\lambda(h) \qquad ; w = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.5}$$

ว่า สมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง (Stein's equation for Poisson distribution function) จาก (1.5) หากเราเลือกฟังก์ชัน h ที่เหมาะสม เช่น ให้ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $h = h_A$ โดยที่

$$h_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

และ $\lambda = 1$ จะได้ว่า

$$g(w+1) - wg(w) = h_A(w) - P_1(h_A) \qquad ; w = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

ให้ g_A เป็นคำตอบของสมการ (1.6) ถ้าเราแทน w ด้วยตัวแปรสุ่ม W_n และหาค่าคาดคะเนของทั้งสองข้างของ (1.6) เราจะได้

$$P(W_n \in A) - P(P_1 \in A) = E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]$$

ดังนั้น เราสามารถหาขอบเขตของ

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)|$$

จากขอบเขต

$$|E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]|$$

แทนได้ ซึ่งเราเรียกวิธีการหาขอบเขตนี้ว่า วิธีของสไตน์และเชน (Stein-Chen method)

ในโครงงานนี้เราสนใจปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าของปัญหาการจับคู่ด้วยการแจกแจงปัวซง โดยวิธีสไตน์และเชน ซึ่งขอบเขตที่ได้เป็นตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1 ให้ $A \subseteq \{0,1,2,\ldots,n\}$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ $A \neq \{0,1,\ldots,n\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \frac{2}{w_A n}$$

เมื่อ $w_A = \max\{w_0, w_1\}$ โดยที่ $w_0 = \min\{w \in \{0,1,\ldots,n\} | w \notin A\}$ และ
$w_1 = \min\{w \in \{0,1,\ldots,n\} | w \in A\}$
ต่อไปนี้จะใช้สัญลักษณ์ w_A, w_0 และ w_1 ตามนิยามข้างต้น

ทฤษฎีบท 1.2 สำหรับ $w \in \{0,1,\ldots,n\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n = w) - P(P_1 = w)| \leq \frac{1}{w!(n-w+1)!}$$

จากทฤษฎีบท 1.1 และทฤษฎีบท 1.2 ทำให้ได้บทแทรก 1.3 ต่อไปนี้

บทแทรก 1.3 สำหรับ $w \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n \leq w) - P(P_1 \leq w)| = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)!}, & w = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{n!}, & w = 1 \\[2ex] \dfrac{2}{(w+1)n}, & w \geq 2 \end{cases}$$

ข้อสังเกต

1. จากทฤษฎีบท 1.1 ถ้า $w_A \geq 2$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{w_A} \leq 1 - \frac{1}{e}$$

ดังนั้นขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 1.1 ดีกว่างานวิจัยของบาร์เบอร์, ฮอลล์และเจนสัน [4] เมื่อ $w_A \geq 2$

2. จาก (1.2) เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับบทแทรก 1.3 จะได้ว่า ขอบเขตการประมาณค่าของบทแทรก 1.3 ดีกว่างานวิจัยของคณินทร์และกฤษณะ ([11])

3. จาก (1.3) เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับทฤษฎีบท 1.1

กรณี $0 \notin A$ จะได้ว่า $w_0 = 0$ และ $w_1 = M_A$ ดังนั้น $w_A = M_A$

ถ้า $M_A = 1$ แล้วขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 1.1 มีค่าเท่ากับขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8])

ถ้า $M_A \geq 2$ จะได้

$$\frac{1}{M_A} \leq \frac{e}{(M_A + 1)}$$

กรณี $0 \in A$ จะได้ว่า $w_1 = 0$ และ $w_0 = M_A + 1$ ดังนั้น $w_A = M_A + 1$

ถ้า $M_A = 0$ แล้วขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 1.1 มีค่าเท่ากับขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8])

ถ้า $M_A = 1$ แล้วขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 1.1 มีค่าดีกว่าขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8])

ถ้า $M_A \geq 2$ จะได้

$$\frac{1}{M_A + 1} \leq \frac{e}{(M_A + 1)}$$

ดังนั้น จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่าขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 1.1 ดีกว่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8]) เมื่อ $M_A \geq 1$ และมีค่าเท่ากับของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8]) เมื่อ $M_A = 0$

4. จาก (1.4) เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับทฤษฎีบท 1.2 จะได้ว่า ขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 1.2 ดีกว่าขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของพิจิตรและกฤษณะ ([3])

บทที่ 2
วิธีของสไตน์และสมการของสไตน์

ในปี ค.ศ.1972 สไตน์ [9] ได้เสนอบทความซึ่งมีเนื้อหาเกี่ยวกับการหาขอบเขตการลู่เข้าของฟังก์ชันการแจกแจงของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่ไม่เป็นอิสระต่อกันสู่ฟังก์ชันการแจกแจงปกติมาตรฐาน โดยวิธีการใหม่ที่ไม่ใช่การแปลงฟูริเยร์ แต่ใช้ความรู้เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์แทน โดยเริ่มต้นจากสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์ได้เป็นช่วง โดยที่อนุพันธ์บางส่วนนั้นมีความต่อเนื่อง

ต่อมาในปี ค.ศ.1975 เชน [5] ได้นำแนวคิดของสไตน์มาประยุกต์กับการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง โดยได้สร้างสมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจกปัวซง ดังต่อไปนี้

$$\lambda g(w+1) - wg(w) = h(w) - P_\lambda(h) \tag{2.1}$$

เมื่อ $g, h : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ และ

$$P_\lambda(h) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l) \frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}$$

สำหรับ $\lambda > 0$

จาก [5] หน้า 82 เชนได้แสดงว่า สำหรับ $h : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและ $\lambda > 0$ เราจะได้ว่า $g_h : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่กำหนดโดย

$$g_h(w) = \begin{cases} (w-1)! \displaystyle\sum_{l=0}^{w-1} \frac{\lambda^{l-w}}{l!}[h(l) - P_\lambda(h)], & w \geq 1 \\ 0, & w = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

เป็นคำตอบของสมการ (2.1)

จาก (2.1) ให้ $A \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $h_A : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$h_A(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$$

และ $\lambda = 1$ จะได้

$$g(w+1) - wg(w) = h_A(w) - P_1(h_A) \tag{2.3}$$

ให้ $g_A : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2.3)
สังเกตว่า $P_1(h_A) + P_1(h_{A^c}) = \sum_{\substack{l=0 \\ l\in A}}^{\infty} \frac{e^{-1}}{l!} + \sum_{\substack{l=0 \\ l\notin A}}^{\infty} \frac{e^{-1}}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{l!} = 1$
จาก (2.2) เมื่อ $\lambda = 1$ และ $C_{w-1} = \{0, 1, ..., w-1\}$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
g_A(w) &= \begin{cases} (w-1)!\left[\sum_{\substack{l=0 \\ l\in A}}^{w-1} \frac{1}{l!}[1 - P_1(h_A)] + \sum_{\substack{l=0 \\ l\notin A}}^{w-1} \frac{1}{l!}[0 - P_1(h_A)]\right], & w \geq 1 \\ 0, & w = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (w-1)!\left[P_1(h_{A^c})\sum_{\substack{l=0 \\ l\in A}}^{w-1} \frac{1}{l!} - P_1(h_A)\sum_{\substack{l=0 \\ l\notin A}}^{w-1} \frac{1}{l!}\right], & w \geq 1 \\ 0, & w = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e(w-1)!\left[P_1(h_{A^c})P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) - P_1(h_A)P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}})\right], & w \geq 1 \\ 0, & w = 0 \end{cases} \qquad (2.4) \\
&= \begin{cases} e(w-1)!\left[P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) - P_1(h_A)P_1(h_{C_{w-1}})\right], & w \geq 1 \\ 0, & w = 0 \end{cases} \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

แทน w ด้วยตัวแปรสุ่ม W_n และหาค่าคาดคะเนทั้งสองข้างของสมการ (2.3) จะได้

$$P(W_n \in A) - P(P_1 \in A) = E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]$$

ดังนั้น เราสามารถหาขอบเขตของ

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)|$$

จากขอบเขต

$$|E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]|$$

แทนได้

ในโครงงานนี้เราสนใจการปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าของปัญหาการจับคู่ ซึ่งคือการหาขอบเขตของ $|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)|$ จากขอบเขต $|E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]|$ โดยเราจำเป็นต้องใช้บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 2.1 ให้ $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ $w_0 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \notin A\}$ ถ้า $w_0 > 0$ จะได้ว่า

$$P_1(h_{A^c}) \leq \frac{w_0 + 1}{e w_0 w_0!}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $w_0 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \notin A\}$ จะได้

$$\begin{aligned} P_1(h_{A^c}) &\leq \frac{1}{e} \sum_{l=w_0}^{\infty} \frac{1}{l!} \\ &< \frac{1}{e w_0!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(w_0 + 1)^i} \\ &= \frac{w_0 + 1}{e w_0 w_0!} \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่าข้อสรุปของบทตั้งเป็นจริง

□

บทตั้ง 2.2 ให้ $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ $w_1 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \in A\}$ ถ้า $w_1 > 0$ จะได้ว่า

$$P_1(h_A) \leq \frac{w_1 + 1}{e w_1 w_1!}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $w_1 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \in A\}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P_1(h_A) &\leq \frac{1}{e} \sum_{l=w_1}^{\infty} \frac{1}{l!} \\ &< \frac{1}{e w_1!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(w_1 + 1)^i} \\ &= \frac{w_1 + 1}{e w_1 w_1!} \end{aligned}$$

ดังนั้น เราจึงได้ว่าข้อสรุปของบทตั้งเป็นจริง

□

บทตั้งที่ 2.3 สำหรับ $w \geq 2$ จะได้ว่า

$$\frac{w+1}{ew!} < \frac{2}{(w-1)w}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก

$$\frac{2+1}{e2!} = \frac{3}{2e} \leq \frac{2}{(2-1)2}$$

ดังนั้น เมื่อ $w = 2$ จะได้ว่า

$$\frac{w+1}{ew!} < \frac{2}{(w-1)w}$$

สำหรับจำนวนเต็ม $w \geq 3$
ให้ $P(w)$ แทนประพจน์ $\dfrac{w+1}{ew!} < \dfrac{2}{(w-1)w}$
ขั้นฐาน เมื่อแทน $w = 3$ จะได้ $P(3)$ คือ

$$\frac{3+1}{e3!} = \frac{2}{3e} < \frac{2}{(3-1)3} = \frac{1}{3}$$

ซึ่งเป็นจริง ดังนั้น $P(3)$ เป็นจริง

ขั้นอุปนัย ให้ w เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ที่ $w \geq 3$ ซึ่งทำให้ $P(w)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\frac{w+1}{ew!} < \frac{2}{(w-1)w}$$

เราต้องการแสดงว่า $P(w+1)$ เป็นจริงสำหรับ $w \geq 2$ นั่นคือจะแสดงว่า

$$\frac{(w+1)+1}{e(w+1)!} < \frac{2}{((w+1)-1)(w+1)}$$

หรือ

$$\frac{w+2}{e(w+1)!} < \frac{2}{w(w+1)}$$

เนื่องจาก

$$\frac{w+1}{ew!} < \frac{2}{(w-1)w}$$

เมื่อคูณด้วย $\dfrac{w-1}{w+1}$ ไปทั้งสองข้างของอสมการจะได้

$$\begin{aligned}\frac{(w+1)(w-1)}{ew!(w+1)} &< \frac{2(w-1)}{(w-1)w(w+1)}\\ &= \frac{2}{w(w+1)}\end{aligned}$$

จากความจริงข้างต้นและความจริงที่ว่า

$$\begin{aligned}\frac{w+2}{e(w+1)!} &\leq \frac{(w+2)(w-2)}{e(w+1)!}\\ &= \frac{w^2-4}{e(w+1)!}\\ &< \frac{w^2-1}{e(w+1)!}\\ &= \frac{(w+1)(w-1)}{e(w+1)w!}\end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า

$$\frac{w+2}{e(w+1)!} < \frac{2}{w(w+1)}$$

ดังนั้น $P(w+1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $\dfrac{w+1}{ew!} < \dfrac{2}{(w-1)w}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $w \geq 3$

ดังนั้นจะได้ว่า $\dfrac{w+1}{ew!} < \dfrac{2}{(w-1)w}$ เมื่อ $w \geq 2$

$\square$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก เราจะใช้สมบัติของ Δg_A เมื่อ

$$\Delta g_A(w) = g_A(w+1) - g_A(w) \qquad \text{สำหรับ } w \geq 1$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นสมบัติของ Δg_A ที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักต่อไป

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ โดยที่ $A \neq \phi$ ถ้า $w \geq 1$ จะได้ว่า

$$|\Delta g_A(w)| < \frac{1}{w}$$

พิสูจน์ ให้ $w \geq 1$ เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 กรณี คือ $w \in A$ และ $w \notin A$

จาก (2.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta g_A(w) &= ew!\Big[P_1(h_{A^c})P_1(h_{A\cap C_w}) - P_1(h_A)P_1(h_{A^c\cap C_w})\Big] \\
&\quad - e(w-1)!\Big[P_1(h_{A^c})P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) - P_1(h_A)P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}})\Big] \\
&= ew!\Bigg[\Big[P_1(h_{A^c\cap C_w}) + P_1(h_{A^c\cap C_w^c})\Big]P_1(h_{A\cap C_w}) \\
&\quad - \Big[P_1(h_{A\cap C_w}) + P_1(h_{A\cap C_w^c})\Big]P_1(h_{A^c\cap C_w})\Bigg] \\
&\quad - e(w-1)!\Bigg[\Big[P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}}) + P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}^c})\Big]P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) \\
&\quad - \Big[P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) + P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c})\Big]P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}})\Bigg] \\
&= \Big[ew!P_1(h_{A^c\cap C_w^c})P_1(h_{A\cap C_w}) - e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}^c})P_1(h_{A\cap C_{w-1}})\Big] \\
&\quad - \Big[ew!P_1(h_{A\cap C_w^c})P_1(h_{A^c\cap C_w}) - e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c})P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}})\Big] \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

กรณีที่ 1 $w \in A$

จาก $w \in A$ จะได้ $A^c \cap C_w^c = A^c \cap C_{w-1}^c$ และ $A^c \cap C_w = A^c \cap C_{w-1}$ จากความจริงดังกล่าว และ (2.6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta g_A(w) &= ew!P_1(h_{A^c\cap C_w^c})P_1(h_{A\cap C_w}) - e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w^c})P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) \\
&\quad - \Bigg[ew!P_1(h_{A\cap C_w^c})P_1(h_{A^c\cap C_w}) - e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c})P_1(h_{A^c\cap C_w})\Bigg] \\
&= e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w^c})\Bigg[wP_1(h_{A\cap C_w}) - P_1(h_{A\cap C_{w-1}})\Bigg] \\
&\quad - e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w})\Bigg[wP_1(h_{A\cap C_w^c}) - P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c})\Bigg] \\
&= e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w^c})\Bigg[wP_1(h_{A\cap C_w}) - P_1(h_{A\cap C_{w-1}})\Bigg] \\
&\quad + e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w})\Bigg[P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c}) - wP_1(h_{A\cap C_w^c})\Bigg]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w^c})\Big[wP_1(h_{A\cap C_w}) - P_1(h_{A\cap C_{w-1}})\Big] \\
&\quad + e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w})\Big[(1-w)P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c}) + \frac{1}{e(w-1)!}\Big]
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

จากบทตั้ง 2.1 จะได้ว่า

$$
P_1(h_{C_{w^*}^c}) \leq \frac{w^*+2}{e(w^*+1)(w^*+1)!} \qquad \text{ทุก } w^* \geq 0 \tag{2.8}
$$

ดังนั้น จาก (2.8) จะได้

$$
\begin{aligned}
0 &\leq e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w^c})\Big[wP_1(h_{A\cap C_w}) - P_1(h_{A\cap C_{w-1}})\Big] \\
&\leq ew!P_1(h_{C_w^c})P_1(h_{A\cap C_w}) \\
&\leq \frac{w+2}{(w+1)^2}P_1(h_{A\cap C_w}) \\
&< \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w})
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (w-1)P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c}) \\
&\leq (w-1)P_1(h_{C_{w-1}^c}) \\
&\leq \frac{(w-1)(w+1)}{eww!} \\
&= \frac{(w-1)(w+1)}{e(w-1)!w^2} \\
&< \frac{1}{e(w-1)!}
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

จาก (2.10) จะได้ว่า $e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w})\Big[(1-w)P_1(h_{A\cap C_{w-1}^c}) + \frac{1}{e(w-1)!}\Big] \geq 0$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
0 &\le e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C_w})\left[(1-w)P_1(h_{A\cap C^c_{w-1}}) + \frac{1}{e(w-1)!}\right] \\
&= P_1(h_{A^c\cap C_w})\left[e(w-1)!(1-w)P_1(h_{A\cap C^c_{w-1}}) + 1\right] \\
&= P_1(h_{A^c\cap C_w})\left[1 - e(w-1)!(w-1)P_1(h_{A\cap C^c_{w-1}})\right] \\
&= P_1(h_{A^c\cap C_w})\left[1 - e(w-1)!(w-1)\left[P_1(h_{A\cap C^c_{w}}) + P_1(h_{A\cap\{w\}})\right]\right] \\
&= P_1(h_{A^c\cap C_w})\left[1 - e(w-1)!(w-1)P_1(h_{A\cap C^c_{w}}) - \frac{w-1}{w}\right] \\
&= P_1(h_{A^c\cap C_w})\left[\frac{1}{w} - e(w-1)!(w-1)P_1(h_{A\cap C^c_{w}})\right] \\
&< \frac{1}{w}P_1(h_{A^c\cap C_w}) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

จาก (2.7), (2.9) และ (2.11) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|\Delta g_A(w)| &< \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w}) + \frac{1}{w}P_1(h_{A^c\cap C_w}) \\
&= \frac{1}{w}P_1(h_{C_w}) \\
&\le \frac{1}{w}
\end{aligned}
$$

กรณีที่ 2 $w \notin A$

จาก $w \notin A$ จะได้ $A\cap C_w = A\cap C_{w-1}$ และ $A\cap C^c_w = A\cap C^c_{w-1}$ จากความจริงดังกล่าว และ (2.6) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\Delta g_A(w) &= ew!P_1(h_{A^c\cap C^c_w})P_1(h_{A\cap C_w}) - e(w-1)!P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}})P_1(h_{A\cap C_w}) \\
&\quad - \left[ew!P_1(h_{A\cap C^c_w})P_1(h_{A^c\cap C_w}) - e(w-1)!P_1(h_{A\cap C^c_w})P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}})\right] \\
&= e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_w})\left[wP_1(h_{A^c\cap C^c_w}) - P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}})\right] \\
&\quad - e(w-1)!P_1(h_{A\cap C^c_w})\left[wP_1(h_{A^c\cap C_w}) - P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}})\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_w})\left[(w-1)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}}) - wP_1(h_{A^c\cap\{w\}})\right] \\
&\quad - e(w-1)!P_1(h_{A\cap C^c_w})\left[(w-1)P_1(h_{A^c\cap C_w}) + P_1(h_{A^c\cap\{w\}})\right] \\
&= e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_w})\left[(w-1)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}}) - \frac{1}{e(w-1)!}\right] \\
&\quad - e(w-1)!P_1(h_{A\cap C^c_w})\left[(w-1)P_1(h_{A^c\cap C_w}) + \frac{1}{ew!}\right] \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

จาก (2.8) และ $0 \leq (w-1)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}})$ จะได้

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (w-1)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}}) \\
&\leq (w-1)P_1(h_{C^c_{w-1}}) \\
&\leq \frac{(w-1)(w+1)}{eww!} \\
&= \frac{(w-1)(w+1)}{e(w-1)!w^2} \\
&< \frac{1}{e(w-1)!}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_w})\left[(1-w)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}}) + \frac{1}{e(w-1)!}\right] \geq 0$
จากความจริงดังกล่าว จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 &\leq e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_w})\left[(1-w)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}}) + \frac{1}{e(w-1)!}\right] \\
&= P_1(h_{A\cap C_w})\left[e(w-1)!(1-w)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}}) + 1\right] \\
&= P_1(h_{A\cap C_w})\left[1 - e(w-1)!(w-1)P_1(h_{A^c\cap C^c_{w-1}})\right]
\end{aligned}
$$

และเนื่องจาก $\{w\} \subseteq A^c \cap C_{w-1}^c$ จะได้

$$
\begin{aligned}
0 &\leq e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_w})\left[(1-w)P_1(h_{A^c\cap C_{w-1}^c}) + \frac{1}{e(w-1)!}\right] \\
&\leq P_1(h_{A\cap C_w})\left[1 - e(w-1)!(w-1)P_1(h_{\{w\}})\right] \\
&= P_1(h_{A\cap C_w})\left[1 - \frac{w-1}{w}\right] \\
&= \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w}) \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

จาก (2.8) และ $(w-1)(w+2) < (w+1)^2$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
0 &\leq e(w-1)!P_1(h_{A\cap C_w^c})\left[(w-1)P_1(h_{A^c\cap C_w}) + \frac{1}{ew!}\right] \\
&= P_1(h_{A\cap C_w^c})\left[e(w-1)!(w-1)P_1(h_{A^c\cap C_w}) + \frac{1}{w}\right] \\
&\leq e(w-1)!(w-1)P_1(h_{C_w^c})P_1(h_{A^c\cap C_w}) + \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w^c}) \\
&\leq \frac{(w-1)(w+2)}{w(w+1)^2}P_1(h_{A^c\cap C_w}) + \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w^c}) \\
&< \frac{1}{w}P_1(h_{A^c\cap C_w}) + \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w^c}) \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

จาก (2.12) $-$ (2.14) เมื่อ $w \notin A$ จะได้

$$
\begin{aligned}
|\Delta g_A(w)| &< \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w}) + \frac{1}{w}P_1(h_{A^c\cap C_w}) + \frac{1}{w}P_1(h_{A\cap C_w^c}) \\
&\leq \frac{1}{w}P_1(h_A) + \frac{1}{w}P_1(h_{A^c}) \\
&= \frac{1}{w} \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า

$$|\Delta g_A(w)| < \frac{1}{w}$$

$\square$

ทฤษฎีบท 2.5 ให้ $A \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ $A \neq \{0, 1, \ldots, n\}$
กำหนดให้ $w_A = \max\{w_0, w_1\}$ เมื่อ $w_0 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \notin A\}$ และ
$w_1 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \in A\}$ จะได้ว่า

$$|\Delta g_A(w)| < \frac{1}{w_A}$$

ทุก $w \in \{1, 2, \ldots, n\}$

พิสูจน์ ให้ $w \in \{1, 2, \ldots, n\}$
เนื่องจาก w_0 และ w_1 ไม่สามารถมีค่าเป็น 0 พร้อมกันได้ ดังนั้น $w_A \geq 1$
ถ้า $w \geq w_A$ จากบทตั้ง 2.3 จะได้

$$|\Delta g_A(w)| < \frac{1}{w} < \frac{1}{w_A}$$

ดังนั้น เราจึงเหลือการพิสูจน์ในกรณี $w < w_A$
เราแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ $w_A = w_0$ หรือ $w_A = w_1$
กรณีที่ 1 $1 \leq w < w_A$ และ $w_A = w_0$
จาก $w < w_0$ จะได้ $A \cap C_w = C_w$ และ $A \cap C_{w-1} = C_{w-1}$ จากความจริงดังกล่าวและ (2.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta g_A(w) &= ew!\Big[P_1(h_{A\cap C_w}) - P_1(h_A)P_1(h_{C_w})\Big] \\
&\quad - e(w-1)!\Big[P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) - P_1(h_A)P_1(h_{C_{w-1}})\Big] \\
&= e(w-1)!\Big[wP_1(h_{C_w}) - wP_1(h_A)P_1(h_{C_w}) - P_1(h_{C_{w-1}}) + P_1(h_A)P_1(h_{C_{w-1}})\Big] \\
&= e(w-1)!\Big[wP_1(h_{C_w})P_1(h_{A^c}) - P_1(h_{C_{w-1}})P_1(h_{A^c})\Big] \\
&= e(w-1)!P_1(h_{A^c})\Big[wP_1(h_{C_w}) - P_1(h_{C_{w-1}})\Big] \\
&= e(w-1)!P_1(h_{A^c})\Big[(w-1)P_1(h_{C_w}) + \frac{1}{ew!}\Big] \\
&> 0 \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

จาก (2.16), บทตั้ง 2.1 และ $w \leq w_0 - 1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
|\Delta g_A(w)| &= e(w-1)!P_1(h_{A^c})\Big[(w-1)P_1(h_{C_w}) + \frac{1}{ew!}\Big] \\
&\leq e(w-1)!P_1(h_{A^c})(w-1) + P_1(h_{A^c})\frac{1}{w} \\
&\leq \frac{e(w_0-2)!(w_0-2)(w_0+1)}{ew_0w_0!} + \frac{w_0+1}{ew_0w_0!} \\
&= \frac{(w_0-2)(w_0+1)}{(w_0-1)w_0w_0} + \frac{w_0+1}{ew_0w_0!} \\
&= \frac{1}{w_0}\Big[\frac{w_0^2-w_0-2}{(w_0-1)w_0} + \frac{w_0+1}{ew_0!}\Big] \\
&= \frac{1}{w_0}\Big[1 - \frac{2}{(w_0-1)w_0} + \frac{w_0+1}{ew_0!}\Big]
\end{aligned}$$

และจากบทตั้ง 2.3 ทำให้ได้ว่า

$$|\Delta g_A(w)| < \frac{1}{w_0}$$

กรณีที่ 2 $1 \leq w < w_A$ และ $w_A = w_1$

จาก $w < w_1$ จะได้ว่า $A \cap C_w = \phi = A \cap C_{w-1}$ จากความจริงดังกล่าวและ (2.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\Delta g_A(w) &= ew!\Big[P_1(h_{A\cap C_w}) - P_1(h_A)P_1(h_{C_w})\Big] \\
&\quad - e(w-1)!\Big[P_1(h_{A\cap C_{w-1}}) - P_1(h_A)P_1(h_{C_{w-1}})\Big] \\
&= ew!\Big[-P_1(h_A)P_1(h_{C_w})\Big] - e(w-1)!\Big[-P_1(h_A)P_1(h_{C_{w-1}})\Big] \\
&= e(w-1)!P_1(h_A)\Big[P_1(h_{C_{w-1}}) - wP_1(h_{C_w})\Big] \\
&= e(w-1)!P_1(h_A)\Bigg[(1-w)P_1(h_{C_w}) - \frac{1}{ew!}\Bigg] \\
&< 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|\Delta g_A(w)| = e(w-1)!P_1(h_A)\Big[(w-1)P_1(h_{C_w}) + \frac{1}{ew!}\Big]$$

จากบทตั้ง 2.2 และ $w \leq w_1 - 1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|\Delta g_A(w)| &\leq \Big[e(w-1)!(w-1) + \frac{1}{w}\Big] P_1(h_A) \\
&\leq \Big[e(w-1)!(w-1) + 1\Big] \frac{(w_1+1)}{ew_1 w_1!} \\
&\leq \frac{(w_1-2)!(w_1-2)(w_1+1)}{w_1 w_1!} + \frac{w_1+1}{ew_1 w_1!} \\
&= \frac{(w_1-2)(w_1+1)}{(w_1-1)w_1 w_1} + \frac{w_1+1}{ew_1 w_1!} \\
&= \frac{1}{w_1}\Big[\frac{(w_1-2)(w_1+1)}{(w_1-1)w_1} + \frac{w_1+1}{ew_1!}\Big] \\
&= \frac{1}{w_1}\Big[\frac{w_1^2 - w_1 - 2}{(w_1-1)w_1} + \frac{w_1+1}{ew_1!}\Big] \\
&= \frac{1}{w_1}\Big[1 - \frac{2}{(w_1-1)w_1} + \frac{w_1+1}{ew_1!}\Big]
\end{aligned}
$$

และจากบทตั้ง 2.3 ทำให้ได้ว่า

$$|\Delta g_A(w)| < \frac{1}{w_1}$$

□

บทที่ 3

ทฤษฎีบทหลัก

ในบทนี้เราจะใช้วิธีของสไตน์และเชน เพื่อปรับปรุงขอบเขต $|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)|$ ของปัญหาการจับคู่ที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 1 เมื่อ W_n เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่งของปัญหาการจับคู่ ซึ่งมีทั้งหมด n ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งสามารถวางสิ่งของได้เพียงตำแหน่งละ 1 สิ่ง กำหนดให้

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ให้

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ วางตรงตำแหน่งที่ } i \\ 0, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ วางไม่ตรงตำแหน่งที่ } i \end{cases}$$

โดยเราได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $A \subseteq \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ โดยที่ $A \neq \phi$ และ $A \neq \{0, 1, \ldots, n\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \frac{2}{w_A n}$$

เมื่อ $w_A = \max\{w_0, w_1\}$ โดยที่ $w_0 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \notin A\}$
และ $w_1 = \min\{w \in \{0, 1, \ldots, n\} | w \in A\}$

พิสูจน์ ในการพิสูจน์ บาเบอร์ ฮอลล์และเจนสัน [4] ได้นิยามตัวแปรสุ่ม Y_j^i
สำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ โดยที่ $i \neq j$
ถ้า $X_i = 1$ เราจะกำหนดให้ $Y_j^i = X_j$
ถ้า $X_i = 0$ เราจะพิจารณาเหตุการณ์ที่มีการจับคู่ $n-1$ คู่ โดยที่ไม่รวมคู่ i และกำหนด

$$Y_j^i = \begin{cases} 1, & \text{ถ้าสิ่งของชิ้นที่ } j \text{ ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } j \\ 0, & \text{ถ้าสิ่งของชิ้นที่ } j \text{ ไม่ถูกวางลงบนตำแหน่งที่ } j \end{cases}$$

กำหนดให้

$$W_{n,i}^* = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} Y_j^i$$

ดังนั้น เราจะได้ว่า ถ้า $X_i = 1$ แล้ว $W_{n,i}^* = W_n - 1$
เนื่องจากคณินทร์และกฤษณะ [10] หน้า 90 ได้แสดงไว้ว่า

$$E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)] \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{w \geq 1} |\Delta g_A(w)| E|(W_n - W_{n,i}^*)|$$

และ

$$E|W_n - W_{n,i}^*| \leq \frac{2}{n}$$

ดังนั้น

$$E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)] \leq \frac{2}{n} \sup_{w \geq 1} |\Delta g_A(w)| \tag{3.1}$$

จาก (3.1) และทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า

$$|E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]| \leq \frac{2}{w_A n}$$

เนื่องจาก

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| = |E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]|$$

ดังนั้น

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \frac{2}{w_A n}$$

□

บทตั้ง 3.2 สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่า
1. $0 \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \leq \frac{1}{n!}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
2. $-\frac{1}{n!} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \leq 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่
3. $\Big| \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \Big| \leq \frac{1}{n!}$

พิสูจน์ 1. ให้ n เป็นจำนวนคู่และ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k \geq n$ โดยเราจะแบ่ง k ออกเป็น 2 กรณี คือ k เป็นจำนวนคี่ หรือ k เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 1 k เป็นจำนวนคี่และ $k > n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} &= \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}+\ldots+\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\\ &= \Big[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\Big]+\Big[\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\Big]+\ldots+\Big[\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\Big]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

จากความจริงข้างต้นและความจรึงที่ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} &= \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}+\ldots+\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\\ &= \frac{1}{n!}-\Big[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\ldots+\frac{1}{k!}\Big]\\ &= \frac{1}{n!}-\Big[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\Big]-\ldots-\Big[\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{(k-1)!}\Big]-\frac{1}{k!}\\ &\leq \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$0 \leq \sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} \leq \frac{1}{n!} \tag{3.2}$$

จาก (3.2) และ $\displaystyle\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จะได้ว่า

$$0 \leq \sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!} \leq \frac{1}{n!}$$

กรณีที่ 2 k เป็นจำนวนคู่จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} &= \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}+\ldots-\frac{1}{(k-1)!}+\frac{1}{k!}\\ &= \Big[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\Big]+\Big[\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!}\Big]+\ldots+\Big[\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{(k-1)!}\Big]+\frac{1}{k!}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

จากความจริงข้างต้นและความจริงที่ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} &= \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!} + \ldots - \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!} \\
&= \frac{1}{n!} - \Big[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\Big] \\
&= \frac{1}{n!} - \Big[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}\Big] - \Big[\frac{1}{(n+3)!} - \frac{1}{(n+4)!}\Big] - \ldots - \Big[\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}\Big] \\
&\leq \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$0 \leq \sum_{j=n}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} \leq \frac{1}{n!} \tag{3.3}$$

จาก (3.3) และ $\sum_{j=n}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จะได้ว่า

$$0 \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \leq \frac{1}{n!}$$

ดังนั้น จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$0 \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \leq \frac{1}{n!}$$

2. ให้ n เป็นจำนวนคี่และ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $k \geq n$ โดยเราจะแบ่ง k ออกเป็น 2 กรณีคือ k เป็นจำนวนคี่หรือ k เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 1 k เป็นจำนวนคู่และ $k \geq n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sum_{j=n}^{k} \frac{(-1)^j}{j!} &= -\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \ldots - \frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{k!} \\
&= \Big[-\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\Big] + \ldots + \Big[-\frac{1}{(k-1)!} + \frac{1}{(n+k)!}\Big] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

จากความจริงข้างต้นและความจริงที่ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} &= -\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\cdots-\frac{1}{(k-1)!}+\frac{1}{k!}\\ &= -\frac{1}{n!}+\Big[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\cdots-\frac{1}{(k-1)!}\Big]+\frac{1}{k!}\\ &= -\frac{1}{n!}+\Big[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\Big]+\cdots+\Big[\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{(k-1)!}\Big]+\frac{1}{k!}\\ &\geq -\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{n!}\leq\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\leq 0 \tag{3.4}$$

จาก (3.4) และ $\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จะได้ว่า

$$-\frac{1}{n!}\leq\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!}\leq 0$$

'**กรณีที่ 2** k เป็นจำนวนคี่และ $k>n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} &= -\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\cdots-\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\\ &= \Big[-\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\Big]-\cdots+\Big[\frac{1}{(k-2)!}-\frac{1}{(k-1)!}\Big]-\frac{1}{k!}\\ &\leq 0\end{aligned}$$

จากความจริงข้างต้นและความจริงที่ว่า

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!} &= -\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}-\cdots-\frac{1}{(k-1)!}+\frac{1}{k!}\\ &= -\frac{1}{n!}+\Big[\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\Big]+\cdots+\Big[\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\Big]\\ &\geq -\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{n!}\leq\sum_{j=n}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\leq 0 \tag{3.5}$$

จาก (3.5) และ $\sum_{j=n}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จะได้ว่า

$$-\frac{1}{n!} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \leq 0$$

ดังนั้น จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่จะได้ว่า

$$-\frac{1}{n!} \leq \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \leq 0$$

3. ได้โดยตรงจากข้อที่ 1. และข้อที่ 2.

$\square$

ทฤษฎีบท 3.3 สำหรับ $w \in \{0, 1, \ldots, n\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n = w) - P(P_1 = w)| \leq \frac{1}{w!(n - w + 1)!}$$

พิสูจน์ จาก [12] หน้า 107 เราทราบว่า

$$P(W_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \tag{3.6}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} |P(W_n = w) - P(P_1 = w)| &= \Big|\frac{1}{w!} \sum_{j=0}^{n-w} \frac{(-1)^j}{j!} - \frac{1}{ew!}\Big| \\ &= \frac{1}{w!}\Big| \sum_{j=0}^{n-w} \frac{(-1)^j}{j!} - \frac{1}{e}\Big| \\ &= \frac{1}{w!}\Big| \sum_{j=0}^{n-w} \frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}\Big| \\ &= \frac{1}{w!}\Big| \sum_{j=n-w+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!}\Big| \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 3.2 จะได้ว่า

$$|P(W_n = w) - P(P_1 = w)| \leq \frac{1}{w!(n - w + 1)!}$$

$\square$

บทแทรก 3.4 สำหรับ $w \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n \le w) - P(P_1 \le w)| = \begin{cases} \dfrac{1}{(n+1)!}, & w = 0 \\ \\ \dfrac{1}{n!}, & w = 1 \\ \\ \dfrac{2}{(w+1)n}, & w \ge 2 \end{cases}$$

พิสูจน์ ในกรณี $w = 0$ และ $w \ge 2$ ได้โดยตรงจาก ทฤษฎีบท 3.3 และทฤษฎีบท 3.1 ตามลำดับ ดังนั้นจะเหลือการพิสูจน์กรณี $w = 1$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้
เนื่องจาก (3.6) จะได้

$$\begin{aligned} |P(W_n \le 1) - P(P_1 \le 1)| &= |P(W_n = 0) + P(W_n = 1) - P(P_1 = 0) - P(P_1 = 1)| \\ &= \Big| \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!} - \frac{2}{e} \Big| \\ &= \Big| \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \Big| \\ &= \Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \Big| \end{aligned}$$

ถ้า n เป็นเลขคู่ จะได้ว่า $n+1$ เป็นเลขคี่ จากบทตั้ง 3.2 ข้อที่ 1. และข้อที่ 2. จะได้

$$0 \le \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \le \frac{1}{n!} \quad \text{และ} \quad -\frac{1}{(n+1)!} \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \le 0$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{n!} \le -\frac{1}{(n+1)!} \le \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \le \frac{1}{n!}$$

ซึ่งทำให้

$$\Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \Big| \le \frac{1}{n!}$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า n เป็นเลขคี่ เราสามารถแสดงได้ว่า

$$\Big| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \Big| \le \frac{1}{n!}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$|P(W_n \leq 1) - P(P_1 \leq 1)| \leq \frac{1}{n!}$$

$\square$

ข้อสังเกต

1. จาก (1.1) ในบทที่ 1 งานวิจัยของบาร์เบอร์, ฮอลล์และเจนสัน ([4]) จะได้ว่า

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \frac{2(1-e^{-1})}{n}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีบท 3.1 จะเห็นว่า

$$\frac{1}{w_A} \leq 1 - \frac{1}{e} \qquad \text{เมื่อ } w_A \geq 2$$

ดังนั้น ขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 3.1 ดีกว่าขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของบาร์เบอร์, ฮอลล์และเจนสัน ([4]) เมื่อ $w_A \geq 2$

2. จาก (1.2) ในบทที่ 1 งานวิจัยของคณินทร์และกฤษณะ ([11]) เมื่อ $w \in \{0, 1, \ldots, n\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n \leq w) - P(P_1 \leq w)| = \begin{cases} \dfrac{2}{en}, & w = 0 \\[2ex] \dfrac{2(1-2e^{-1})}{n}, & w = 1 \\[2ex] \dfrac{2.08}{(w+1)n}, & w \geq 2 \end{cases}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับบทแทรก 3.4 พบว่า ขอบเขตการประมาณค่าของบทแทรก 3.4 ดีกว่าของงานวิจัยของคณินทร์และกฤษณะ ([11])

3. จาก (1.3) ในบทที่ 1 งานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8]) เมื่อ $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \begin{cases} \dfrac{2}{n}, & M_A \leq 1 \\[2ex] \dfrac{2e}{n(M_A+1)}, & M_A \geq 2 \end{cases}$$

โดยที่

$$M_A = \begin{cases} \max\{w | C_w \subseteq A\} & \text{เมื่อ } 0 \in A \\ \min\{w | w \in A\} & \text{เมื่อ } 0 \notin A \end{cases}$$

กรณี $0 \notin A$ จะได้ว่า $w_0 = 0$ และ $w_1 = M_A$ ดังนั้น $w_A = M_A$

เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า ถ้า $M_A = 1$ แล้วขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 3.1 มีค่าเท่ากับขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8])

ถ้า $M_A \geq 2$ จะได้

$$\frac{1}{M_A} \leq \frac{e}{(M_A+1)}$$

ดังนั้น ขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 3.1 ดีกว่าขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์ ([8])

กรณี $0 \in A$ จะได้ว่า $w_1 = 0$ และ $w_0 = M_A + 1$ ดังนั้น $w_A = M_A + 1$

เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่า ถ้า $M_A = 0$ แล้วขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 3.1 มีค่าเท่ากับขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8])

ถ้า $M_A = 1$ แล้วขอบเขตการประมาณค่าของ ทฤษฎีบท 3.1 มีค่าดีกว่าขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ [8]

ถ้า $M_A \geq 2$ จะได้

$$\frac{1}{M_A+1} \leq \frac{e}{(M_A+1)}$$

ดังนั้น ขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 3.1 ดีกว่าขอบเขตการประมาณค่าของงานวิจัยของทิพวัลย์และคณินทร์ ([8])

4. จาก (1.4) ในบทที่ 1 งานวิจัยของพิจิตรและกฤษณะ ([3]) เมื่อ $w \in \{0, 1, \ldots, n\}$ จะได้ว่า

$$|P(W_n = w) - P(P_1 = w)| = \begin{cases} \dfrac{0.736}{n} & , w = 0 \\[2ex] \dfrac{1.266}{n} & , w = 1 \\[2ex] \dfrac{2}{n}\Big[\dfrac{0.482}{(w+1)!} + \dfrac{1}{w}\Big] & , w \geq 2 \end{cases}$$

กรณี $w \geq 2$ เนื่องจาก $\dfrac{1}{w!(n-w+1)!} \leq \dfrac{2}{nw}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{w!(n-w+1)!} &\leq \frac{0.964}{n(w+1)!} + \frac{2}{nw} \\ &= \frac{2}{n}\Big[\frac{0.482}{(w+1)!} + \frac{1}{w}\Big] \end{aligned}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับทฤษฎีบท 3.3 พบว่าขอบเขตการประมาณค่าของทฤษฎีบท 3.3 ดีกว่างานวิจัยของพิจิตรและกฤษณะ ([3])

บรรณานุกรม

[1] กฤษณะ เนียมมณี, *ทฤษฎีความน่าจะเป็น*, พิมพ์ครั้งที่1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัดพิทักษ์การพิมพ์, 2542.

[2] กฤษณะ เนียมมณี, *ทฤษฎีความน่าจะเป็นขั้นสูงและขอบเขตการประมาณค่า*, พิมพ์ครั้งที่1. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัดพิทักษ์การพิมพ์, 2548.

[3] พิจิตร เจริญผล และ กฤษณะ เนียมมณี. (2562). *ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่*. กรุงเทพมหานคร: สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[4] A.D. Barbour, L. Holst, and S. Janson, Poisson Approximation, *Oxford Studies in Probability 2,* Clarendon Press, Oxford University, 1992.

[5] L. Y. H. Chen, Poisson approximation for dependent trials, *Annals of Probability 3,* (1975) : pp. 534 – 545.

[6] R. Kun, K. Teerapabolarn, A pointwise Poisson approximation by w-functions *Applied Mathematical Sciences,* Vol. 6, (2012) : pp. 5029 – 5037.

[7] P.R. de Montmort, *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Quillau, Paris, published anonymously, 1708.

[8] T. Suntipiwanon, and K. Teerapabolarn, Two non-uniform in the Poisson approximation of sums of dependent indicator, *Thai Journal of Mathematics*, (2007) : pp. 36 – 37.

[9] C. Stein, A bound for the error in normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables, Proc. Sixth Berkeley Sympos. *Math*, *Statist.Probab 3*, (1972) : pp. 583 – 602.

[10] K. Teerapabolarn, and K. Neammanee, Poisson approximation for sums of dependent Bernoulli random variables, *Acta Math*, (2006) : pp. 87 – 99.

[11] K. Teerapabolarn, and K. Neammanee, A non-uniform bound on matching problem, *Kyungpook Math*, (2006) : pp. 489 – 496.

[12] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Applications,* Vol. I, 3rd ed., (1968). John Wiley Sons, Inc., New York,

ภาคผนวก

แบบเสนอหัวข้อโครงงาน รายวิชา 2301399 Project Proposal

ปีการศึกษา 2562

ชื่อโครงงาน (ภาษาไทย)	การปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่าสำหรับปัญหาการจับคู่ด้วยการแจกแจงปัวซง
ชื่อโครงงาน (ภาษาอังกฤษ)	Improvement bounds of approximation for Matching Problem by Poisson distribution
อาจารย์ที่ปรึกษา	ศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี
ผู้ดำเนินการ	นางสาวธนัชชา บุญญะ เลขประจำตัวนิสิต 5933511023 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

หลักการและเหตุผล

ปัญหาการจับคู่ (matching problem) เริ่มมีการศึกษาโดย Pierre Remond de Montmort ในปี ค.ศ.1708 [6] โดยพิจารณาสิ่งของ n สิ่ง ที่มีหมายเลข $1, 2, ..., n$ กำกับ และมีตำแหน่งการวางอยู่ n ตำแหน่ง โดยแต่ละตำแหน่งสามารถวางได้ตำแหน่งละ 1 สิ่ง ปัญหาการจับคู่ที่เราสนใจ คือ ความน่าจะเป็นของจำนวนสิ่งของที่วางสิ่งของตรงตำแหน่ง เราเรียกปัญหานี้ว่าปัญหาการจับคู่ ซึ่งปัญหาการจับคู่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง เช่น การจับคู่หาตัวยาที่มีประสิทธิภาพในการรักษา การจัดคนงานให้เหมาะสมกับงาน เป็นต้น

สำหรับ $i \in 1, 2, 3, \ldots, n$ กำหนดให้

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ วางตรงตำแหน่งที่ } i \\ 0, & \text{สิ่งของชิ้นที่ } i \text{ วางไม่ตรงตำแหน่งที่ } i \end{cases}$$

จะได้ว่า

$$P(X_i = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

กำหนดให้ W_n คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนสิ่งของที่วางตรงตำแหน่ง นั่นคือ $W_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

สังเกตได้ว่า ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ไม่อิสระต่อกัน

ในปี ค.ศ.1992 บาร์เบอร์, ฮอลล์และเจนสัน [2] ได้ให้ขอบเขตประมาณค่าการแจกแจงของ W_n ด้วยการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ โดยที่ $A \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \frac{2(1 - e^{-1})}{n}$$

เมื่อ P_1 คือตัวแปรสุ่มปัวซงที่มีพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ นั่นคือ $P(P_1 = k) = \dfrac{e^{-1}}{k!}$ สำหรับ $k = 0, 1, \ldots$

ต่อมาในปี ค.ศ.2006 คณินทร์และกฤษณะ [7] พิจารณา $A = \{0, 1, 2, ..., w_2\}$ โดยที่ $w_2 \in \{0, 1, \ldots, n\}$ โดยได้หาขอบเขตการประมาณค่าของ W_n ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)| \leq \Delta(n, w_2)$$

เมื่อ

$$\Delta(n, w_2) = \begin{cases} \dfrac{2}{en}, & w_2 = 0 \\[2ex] \dfrac{2(1 - 2e^{-1})}{n}, & w_2 = 1 \\[2ex] \dfrac{2.08}{(w_2 + 1)n}, & w_2 \geq 2 \end{cases}$$

ในปี ค.ศ.2018 พิจิตรและกฤษณะ [1] พิจารณา $A = \{w_2\}$ โดยได้หาขอบเขตการประมาณค่าของ W_n ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ $\lambda = 1$ ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$|P(W_n = w_2) - P(P_1 = w_2)| \leq \frac{2}{n}\delta_{w_2}$$

โดยที่

$$\delta_{w_2} = \begin{cases} 0.368, & w_2 = 0 \\[2ex] 0.633, & w_2 = 1 \\[2ex] \dfrac{0.482}{(w_2 + 1)!} + \dfrac{1}{w_2}, & w_2 \geq 2 \end{cases}$$

จากงานวิจัยข้างต้น จะเห็นว่าขอบเขตการประมาณค่าของคณินทร์และกฤษณะ กับของพิจิตรและกฤษณะ มีค่าน้อยกว่าค่าของบาร์เบอร์ ฮอลล์และเจนสัน เมื่อกำหนด $A = \{0, 1, 2, \ldots, w_2\}$ และ

$A = \{w_2\}$ ตามลำดับ งานวิจัยที่ได้กล่าวมานี้ได้ใช้วิธีของสไตน์และเชน (Stein-Chen’s method) ในการหาขอบเขตการประมาณค่า

ในโครงงานนี้เราจะปรับปรุงขอบเขตการประมาณค่า โดยประมาณค่าของ $P(W_1 \in A)$ ด้วย $P(P_1 \in A)$ โดยใช้วิธีของสไตน์และเชนในการหาขอบเขตการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ 1

ในปี ค.ศ.1975 [3] เชนนำแนวคิดของสไตน์ปี 1972 [2] มาประยุกต์กับการประมาณค่าด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง โดยได้สร้างสมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง
สำหรับ $h, g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตและ $\lambda > 0$ กำหนดให้

$$P_\lambda(h) = E(h(P_1)) = \sum_{l=0}^{\infty} h(l) \frac{e^{-\lambda}\lambda^l}{l!}$$

เราจะเรียกสมการผลต่าง

$$\lambda g(w+1) - wg(w) = h(w) - P_\lambda(h) \qquad ; w = 0, 1, 2, \ldots$$

ว่า สมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง (Stein’s equation for Poisson distribution function)
จาก สมการของสไตน์สำหรับฟังก์ชันการแจกแจงปัวซง หากเราเลือกฟังก์ชัน h ที่เหมาะสม เช่น
ให้ $A \subseteq N \cup \{0\}$ และ $h = h_A$ โดยที่

$$h_A(w) = \begin{cases} 1 & , w \in A \\ 0 & , w \notin A \end{cases}$$

และ $P_\lambda(h) = P_1(h)$ จะได้ว่า

$$\lambda g(w+1) - wg(w) = h_A(w) - P_1(h) \qquad ; w = 0, 1, 2, \ldots$$

ให้ g_A เป็นคำตอบของสมการก่อนหน้า ถ้าเราแทน w ด้วยตัวแปรสุ่ม W_n และหาค่าคาดคะเนของทั้งสองข้าง เราจะได้

$$P(W_n \in A) - P(P_1 \in A) = E[g_A(W_n + 1) - W_n g_A(W_n)]$$

ดังนั้น เราสามารถหาขอบเขตของ

$$|P(W_n \in A) - P(P_1 \in A)|$$

จากขอบเขต

$$|E[g_A(W_n+1)-W_n g_A(W_n)]|$$

แทนได้

วัตถุประสงค์

โครงงานนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะใช้วิธีของสไตน์และเชนในการปรับปรุงขอบเขตของการประมาณค่าของปัญหาการจับคู่ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ 1

ขอบเขตของโครงงาน

ในโครงงานนี้จะศึกษา ความน่าจะเป็นของปัญหาการจับคู่ โดยการประมาณค่าด้วยการแจกแจงปัวซง และหาขอบเขตการประมาณค่าของปัญหาการจับคู่

วิธีการดำเนินการ

1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัย และกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา
2. หาขอบเขตการประมาณค่าของปัญหาการจับคู่โดยใช้วิธีสไตน์และเชน
3. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน
4. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน

วิธีการดำเนินงาน	สิงหาคม 2562 - เมษายน 2563								
	ส.ค.	ก.ย..	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.
1. ศึกษาปัญหา สืบค้นข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับงานวิจัยและกำหนดหัวข้อที่จะศึกษา									
2. หาขอบเขตการประมาณค่าของปัญหาการจับคู่โดยใช้วิธีสไตน์และเชน									
3. ตรวจสอบความถูกต้องของผลการดำเนินงาน									
4. สรุปและจัดทำรูปเล่มรายงาน									

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้ขอบเขตการประมาณค่าของเซต A ใด ๆ ของปัญหาการจับคู่ด้วยฟังก์ชันการแจกแจงปัวซงพารามิเตอร์ 1

อุปกรณ์และเครื่องมือที่ใช้

1. กระดาษ A4
2. Notebook
3. โปรแกรม Microsoft Word และ โปรแกรม LaTex
4. อุปกรณ์จัดเก็บข้อมูล

เอกสารอ้างอิง

[1] พิจิตร เจริญผล และ กฤษณะ เนียมมณี. (2562). *ขอบเขตของการประมาณค่าแบบจุดสำหรับปัญหาการจับคู่*. กรุงเทพมหานคร: สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[2] A.D. Barbour, L. Holst, and S. Janson, Poisson Approximation, *Oxford Studies in Probability 2,* Clarendon Press, Oxford University, 1992.

[3] L. Y. H. Chen, Poisson approximation for dependent trials, *Annals of Probability 3,* (1975) : pp. 534 – 545.

[4] P.R. de Montmort, *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*, Quillau, Paris, published anonymously, 1708.

[5] T. Suntipiwanon, and K. Teerapabolarn, Two non-uniform in the Poisson approximation of sums of dependent indicator, *Thai Journal of Mathematics*, (2007) : pp. 36 – 37.

[6] C. Stein, A bound for the error in normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables, Proc. Sixth Berkeley Sympos. *Math*, *Statist.Probab 3*, (1972) : pp. 583 – 602.

[7] K. Teerapabolarn, and K. Neammanee, A non-uniform bound on matching problem, *Kyungpook Math*, (2006) : pp. 489 – 496.

ประวัติผู้เขียน

นางสาวธนัชชา บุญญะ

เลขประจำตัวนิสิต 5933523623

สาขาวิชาคณิตศาสตร์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย